

均質 $\mathbb{C}^n$ 多様体の Levi 条件と自然な fibration

(若干の例と問題)

岐阜大 教育 竹内 茂

§0. 多変数函数論の一元数函数論との違いは色々あるだろうが、その一つとして函数の定義域が高次元であることにより、幾何学的、幾何学的性質の複雑さに起因する諸問題がある。一方同じ多変数でも代数性と解析性という比較をした場合、(多様体に限定した場合) Serre の GAGA や Chow の結果によらば、(射影的でないコンパクト複素多様体を“多”い) 非コンパクト多様体に限定する方が大域的な函数論の立場からは興味がある様に思われる。

複素解析的等質空間の研究には色々な要素が絡んでいて、函数論固有の研究対象とは言えないかも知れないが、幾何学的、幾何学的制約を強く課せられたところの研究の手掛りも多く、他の分野(偏微分方程式論等)への応用も期待される。特に高次元ホモロジー一群の消滅定理等が偏微分方程式論において有効かどうか興味がある。(非 Stein の場合)

§ 1. Preliminary results

ここで複素多様体とは複素リー群 G が複素解析的かつ推移的に作用する (連結) 複素多様体 M のことをする。このとき M の一点 o における isotropy subgroup H によって $M = G/H$ と表すことができる。さて一般にこのような M の多様体としての構造及び解析的性質がどうなっているかは、今までに色々な著者が調べている。紙数の関係もあるがここでそのうち著者が知った限りで重要だと思ふものを思いつくまま述べてみると以下の様になる。定義、証明等の詳細は「」内の文献を見らした。

(1) Algebraic Category

定理 1 ([11]) G : 線型 H -群, $H \in \mathcal{A}$ の部分 H -群とするとき G/H が射影的 $\Leftrightarrow H$ が parabolic subgroup (i.e. Borel 部分群を含む)

定理 2 ([10]) 上と同じ G, H に對し, H^0 nilpotent 列の時,

$$\mathrm{Hom}(H^0, \mathbb{C}^*) = \{0\} \Rightarrow G/H \text{ quasi-affine}$$

(2) Compact Category

定理 3 ([13]) $G \in$ (連結) 複素リー群, $H \in \mathcal{A}$ の内複素部分群とするとき, G/H が compact ならば H^0 の G における正規化群 $N := N_G(H^0)$ は parabolic であるとして $N/H \rightarrow G/H \rightarrow G/N$ なる自然な Libration によってファイバーは complex parallelizable, 基底空間が rational になる。

定理 4 ([1]) 上と同様に G, H に対し $\alpha: M=G/H \rightarrow \alpha(M) \in \mathcal{A}_N$ バネーセ写像とすれば、 α は全射でこのファイバーはコンパクト複素多様体となるファイバーバンドルが得られる。

定理 5 ([1]) 上の定理で特に M が Kähler ならば $M=T \times Q$

(T : complex torus, Q : projective rational) と直積に分解する。

定理 6 ([3]) G/H projective algebraic $\Leftrightarrow \frac{1}{h} \dim(G/H) = \dim(G/H)$

(3) Stein Category

G の極大コンパクト部分群 K を H の極大コンパクト部分群 L と含むようにとる。 K^c を K の張る複素部分群 (閉になる) L^c を L の張る (H の) 複素部分群とする。以下同様のため H を連結 ($\because H=H^0$) と仮定する。

定理 7 ([7]) $G=K^c$ Stein, G/H Stein $\Leftrightarrow H=L^c$

定理 8 ([12]) $K^c H = H K^c$ ならば G/H Stein $\Leftrightarrow K^c \cap H = L^c$ ($\exists K^c L$)

(4) Intermediate category

定理 9 ([8]) G を任意の連結複素リー群とする。 $\mathcal{O}(G) := \{f; f: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ 正則関数}\}$ に対して $G_0 := \{x \in G \mid f(x) = f(e), \forall f \in \mathcal{O}(G)\}$ は G/G_0 が Stein になる最小の閉複素部分群で更に G_0 は G の中心に含まれ $\mathcal{O}(G_0) = \mathbb{C}$, 従って $\mathcal{O}(G/G_0) \cong \mathcal{O}(G)$ となる。

定理 10 ([12]) $H=L^c$ のとき $\pi: T_e(G) \rightarrow T_e(G/H)$ (接空間の写像) に対して $cd(G/H) = \dim_{\mathbb{C}} \pi T_e(K) \cap \sqrt{-1} \pi T_e(K)$ が成立。但し cd は複素多様体の cohomological dimension を表す。

その他 (4) に属するものとして 1972 年に始る Hucklebury の一連の研究があるが文献は [6] を参照したい。これらの仕事は松島、森本の一連の仕事及び Borel-Remmert [1] を一般化する事が主な目的となっており、思想的には Remmert の研究の流れの上であり、その途に得られた多変数函数論の結果を等質空間の問題に適用してその構造を説明する事に主眼があるといえる。丁度と云はれり一環 (群) 論と代数幾何学が結合して代数群の理論が展開されているのと似てゐるが、複素等質空間の場合代数的理論だけでなく超越的、位相的方法が必要になつて来て問題を複雑にしている。(特に非コンパクトの場合そうである。)

§2. Levi "fibration"

$M = G/H$ に対して K の軌道を考える。以下 $H \approx \mathbb{C}^n$ (多様体として) と仮定する。 $o = eH \in M$ として $x = g \cdot o \in M$ $\exists g \in G$ とすると、 x に於ける G の isotropy subgroup: $G_x = gHg^{-1}$ (但し $H = G_o$) o の K -軌道: $K(o) = \{k \cdot o \mid k \in K\} \cong K/K \cap H = K$ ($\because K \cap H = \{o\}$) 同様、
 $K(x) \cong K/K \cap G_x = K$ ($\because G_x \approx G_o$ contractible)。従つて K は M 上自由に作用し各軌道は全て diffeomorphic である。

定義: $M = G/H$ の部分多様体が均質 $\mathbb{C}R$ 多様体とは、 G の適当な (実) 部分群の軌道になっているものをいう。(一般には not closed)

従つて上の K 軌道は全てコンパクト均質 $\mathbb{C}R$ 多様体である。

命題: 均質CR多様体は「X」の n 重 CR 部分多様体である。

証明: $Y := S/S \cap H \hookrightarrow M = G/H$ S : G の部分群, $p \in Y$ と $\tau(Y = S(p))$

$$\dim T_p(Y) \cap J T_p(Y) = \text{const. on } Y \ni u \ni 1 \neq u. \text{ 故 } (J: M) \text{ の概接多様性.}$$

$$\rho = g^0 = g \in S \quad \text{let us write} \quad T_p(Y \cap J T_p Y) = g_{T_p}^*(Y \cap J(g_{T_p}^* Y)) = g_{T_p}^*(Y \cap g_{T_p}^* J Y) = g_{T_p}^*(Y \cap J T_p Y)$$

$\therefore \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{G} : \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{Y} \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{Y}$
 $\text{ 对 } \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{G} : \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{Y} \cong \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{Y} \quad \Rightarrow \quad G \in J_{12} \text{ 可破.}$
 g.e. d.

問題 1. V_K 軌道は CR 同型か (但し G が $\mathbb{C}$ 移り $\mathbb{R}$ と意味する)。

13) 1. $G = SL(2, \mathbb{C}) \supset H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\} \approx \mathbb{C}$, $K = SU(2, \mathbb{C}) \approx S^3$ $\exists \varphi \in \mathfrak{g}$

4 K-平面 (M = $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ = $\mathbb{C}/4$ の 4α) は原点 0 への3次元球面を全

ここで $\mathcal{O}^2(\mathfrak{o})$ の スカラー変換で移り合ふが (従って $\mathcal{O}^2$ 同型だから) G

の Σ は 移り 合 ち な い。

以下 $G = K^c$: Stein 1-限定. ($\because$ アフィン代数群)

定義: $M = G/H \propto K$ に関する (極大) Lorentz Null space N には $T(M)$ の J -不変 integrable sub-bundle で各点における 極大種分多様体が K -軌道に含まれるものをいう。

例2. $G = K^c \supset H$ $\gamma = \text{ホリント}$ 部分群 ならば $M = G/H \hookrightarrow \mathbb{C}^n$
quasi-affine 故 $N = \{0\}$.

∴ Na 種分と標本とは H_n の数値の $\frac{1}{2}$ 以外残事と標本 $C(D^n) \therefore$ 一致

例3. $K(x) \hookrightarrow M$ 强拟凸超曲面 (e.g. $K = S^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 等等)

$$\Rightarrow N = \{0\} \quad (\because K \text{ 是複素數域, 故 } 0 \in K)$$

Ex 7. $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \hookrightarrow H = \{ (e^z, e^{\alpha z}) \mid z \in \mathbb{C} \} \simeq \mathbb{C} \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\Rightarrow N = T(M)$ (注意: H : not algebraic), $M = \mathbb{C}T^1$ (complex torus)

問題2. N の各 leaf は等質多様体か? 特に次の意味で M の自然な fibration の fibre になるか? 即ち $\mathcal{O}(M)$ による M の等質空間 $B = M/N$ は G の等質空間となり G の適当な部分群 J をといて $B = G/J$ と表すことができる fibre $F = J/H$ となるか N の各 leaf $= F$ となるかといふこと。但し一般に各 leaf は closed とは限らないうえに $J \subset G$ のような場合は除外する条件が必要である。($J = \{g \in G \mid f(g) = f(e)\}$, $\forall f \in \mathcal{O}(G/H)$) にとすればよい。cf. [2])

標題の Levi 条件の説明をここで示す。[5] に従って $K(x) \hookrightarrow M$ の Levi form を次の基本形式 $L: T(K) \times T(K) \rightarrow T(M)/T(K)$
 $(x, y) \mapsto \pi(J[X, Y])$

で定義する。但し $\pi: T(M) \rightarrow T(M)/T(K)$ は natural projection とする。又 $\tilde{T}(K) := T(K) \cap JT(K)$ とおく。このとき $L|_N \equiv 0$ は明らかである。その意味で N は (maximal) Levi Null space と呼ばれるわけである。Levi 条件とは K -軌道, 従って M の N による foliation から Levi form の Nullity によって決定される事を標語的に述べたものである。問題2が解決しない限り N による foliation は真の u ではなく fibration と呼べるのかそれと Levi "fibration" と呼ぶかは差(又となく)である。

例5. $L \equiv 0 \Rightarrow N = \tilde{T}(K)$

例6. L non degenerate (e.g. $K \hookrightarrow M$ contact hypersurface) $\Rightarrow N = \{0\}$

§ 3. Concluding Remarks

最後に複素リー群の等質空間全体の構造を明らかにするために上記の様な問題を考えることの意味について述べておこう。

連結複素リー群 G は松島 [7] によつて $G = K \times \mathbb{C}^\alpha$ と多様体としての直積に分解される (松島分解と呼ぶ)。一方 $M = G/H$ なる G の等質空間に対して $H \ni H$ の単位元の連結成分としたとき $\tilde{M} := G/H_0$ は M の covering manifold で等質である。そこで $\tilde{M}$ が明確にならば M とは covering の間の関係を調べればよいという意味で最初の問題は連結な isotropy subgroup を持つ場合に帰着される。次に H の極大コンパクト群 L に対して $H = L \times \mathbb{C}^\beta$ と松島分解すれば、 $H/L = \mathbb{C}^\beta \rightarrow G/L = K/L \times \mathbb{C}^\alpha \rightarrow G/H = M$ なる fibration を得る。従つて M は G/L への " H の作用" に関する "orbit space" $G/L \backslash G/H$ と考えることが出来る。一般に代数論的及び位相的方法によつてこの "orbit space" の解析的構造を調べるためにはその最も簡単な α かつ non-trivial な case の 1 つとして $\alpha = 0$ $L = \{e\}$ の場合から始めるのが順序としては自然であろう。そこで今我々の問題にして来た case である。

そこで $G/H = M$ の解析的構造とは何と云ふかといへば:

- (i) $\mathcal{O}(M)$ はどの程度大いか (2 重に分離するかどうか、その階数は?)。

(ii) 正則凸性

(iii) Stein かつ compact ではないとき、その中間的な性質を解析的連続層級数の cohomological dimension で表わしたとき、それは組 (G, H) のどのような量をもち、で特徴づけられるか。特に各々の极大コンパクト部分群の複素構造 J に対する関係などを表わされるか？

ほかがあればよい。今の場合 total space, fibre ともに (iii) すべて性質がよいからこゝでいふわけで、それらの情報から base space の (i)~(iii) に関する情報を得ようという訳である。

参考文献

- [1] Borel, A., and Remmert, R., "Über Kompakte Homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten," Math. Ann. 145(1962), 429-439.
- [2] Gilligan, B., and Huckleberry, A.T., "On non compact complex nilmanifolds," Math. Ann. 238(1978), 39-49.
- [3] Grauert, H., and Remmert, R., "Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten," Arch. Math. 13(1962), 498-507.
- [4] Greenfield, S.J., "Cauchy-Riemann equations in several variables," Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22(1968), 275-314.
- [5] Hermann, R., "Convexity and pseudoconvexity for complex manifolds," J. Math. & Mech. 13(1964), 667-672.
- [6] Huckleberry, A., and Snow, D., "Pseudoconcave homogeneous manifolds," Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV-7 (1980), 29-54.
- [7] Matsushima, Y., "Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes," Nagoya Math. J. 16(1960), 205-218, II, 18(1961), 153-164.
- [8] Morimoto, A., "Non compact complex Lie groups without non constant holomorphic functions," Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis (1965), 257-272
- [9] Rea, C., "Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations," Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26(1972), 665-681.

- [10] Rosenlicht, M., "On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces," Trans. A.M.S. 101(1961), 211-223.
- [11] Steinberg, R., "Conjugacy classes in algebraic groups," Lect. Notes in Math. 366(1974), Springer.
- [12] Takeuchi, S., "Cohomological dimension of homogeneous spaces of complex Lie groups, I, II, " Publ.RIMS, Kyoto Univ.12(1976), 255-257; Sci. Rep.Fac. Educ., Gifu Univ. 7(3) (1979), 391-393.
- [13] Tits, J., "Espaces homogenes complexes compacts," Comment. Math. Helvet. 37(1962), 111-120.