

楕円母集団の下での一般モーメント パラメータの推定について

東京理科大・理 丸山 芳人 (Yoshihito Maruyama)

東京理科大・理 瀬尾 隆 (Takashi Seo)

*Department of Mathematical Information Sciences, Faculty of Science,
Tokyo University of Science.*

1 はじめに

非正規母集団の一つとして有名な楕円母集団における一般モーメントパラメータの推定問題を考える. 一般モーメントパラメータには, 楕円母集団において, 多変量統計解析を行う上で重要となる尖度パラメータを含み, それに関してさまざまな議論がされてきた. 特に, 推定問題については, 正規母集団の下では Mardia[M70], 非正規性の下では Anderson[A93], Seo and Toyama[ST96] などの結果がある. もう少し詳しく述べると, 母集団が正規分布のときに, Mardia[M70] は尖度に関する測度を定義した. また, その測度を基に Anderson[A93] は楕円母集団における尖度パラメータの推定について論じた. そしてそのようなときに, Seo and Toyama[ST96] は尖度パラメータの推定量の漸近分布について考察した.

本論においては, 初めに, 楕円分布について簡単に説明する. また, Berkane and Bentler[BB87] とは異なる計算法で, 楕円分布に従う確率ベクトルの一般モーメントを導出し, 合わせてモーメントパラメータを定義する. 次に, Anderson[A93] による尖度パラメータの推定に関する結果を一般化し, 一般モーメントパラメータの一致推定量を提案する. そして, 母集団共分散行列が既知の場合と未知の場合に分けて, 推定量の漸近分布を考察する. 具体的には, Mardia[M70], Seo and Toyama[ST96] が議論した尖度パラメータの

一致推定量の漸近的性質を基にして、一般モーメントパラメータへの拡張を与える。ここでは更に、最小二乗誤差 (MSE) も考慮して、推定量の bias 修正を考える。また、いくつかの楕円母集団に対しシミュレーション実験を行い、推定量を数値的に検討する。

2 楕円分布とモーメント

次のような確率密度関数 f と特性関数 ϕ をもつ p 変量確率ベクトル $\mathbf{X}$ の一般モーメントを考える。

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = c_p |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} g\left({}^t(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \\ \phi(\boldsymbol{\theta}) = \exp[i {}^t \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\mu}] \psi({}^t \boldsymbol{\theta} \Lambda \boldsymbol{\theta}), \end{cases}$$

ここで、 c_p は正定数、 g はある非負関数、 Λ は正値定符号行列、 ψ はある関数で、 ${}^t \mathbf{X}$ は $\mathbf{X}$ の転置を表す。このとき、 $\mathbf{X}$ はパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ 、 Λ の p 変量楕円分布 $E_p(\boldsymbol{\mu}, \Lambda)$ に従うという。 $\mathbf{X}$ の平均と共分散行列はそれぞれ、 $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ 、 $Cov(\mathbf{X}) = \Sigma = -2\psi'(0)\Lambda$ となる。楕円分布族にはいくつかの特殊な分布があり、例えば、正規分布、Contaminated normal 分布、 t 分布なども含まれる ([K70], [M82] 参照)。

いま、確率ベクトル $\mathbf{X}$ に、条件 ${}^t A A = \Lambda$ を満たす正則行列 A を用いた変数変換 $A^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ を施したとき、単位球面上の一様分布に従う確率ベクトル $\mathbf{U}$ (${}^t \mathbf{U} \mathbf{U} = 1$) と非負のスカラー量 R を用いて、 $A^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = R\mathbf{U}$ と書ける ([A84] 参照)。また、 R と $\mathbf{U}$ は独立である。つまり、 $\mathbf{X}$ のモーメントは、 R と $\mathbf{U}$ のモーメントから得られる。正規分布の場合、 R^2 は自由度 p のカイ二乗分布に従うので、 $E(R^{2m}) = 2^m (\frac{p}{2})_m \equiv 2^m (\frac{p}{2})(\frac{p}{2}+1)\cdots(\frac{p}{2}+m-1)$ が分かる。

補題 1 $\mathbf{U}$ の奇数次モーメントは 0、 $2m$ 次モーメントは、

$$E(U_i U_j \cdots U_u U_v) = \frac{1}{2^m (\frac{p}{2})_m} \sum_{(d_m)} \delta_{ij} \delta_{kl} \cdots \delta_{uv}$$

である。ただし、 δ_{ij} は単位行列 I_p の成分であり、 d_m は添え字 $ijkl \cdots uv$ の組み分けの総数を表し、

$$d_m = 2^m \left(\frac{1}{2} \right)_m$$

である。

例えば、 U の 2 次、4 次、6 次モーメントはそれぞれ、

$$\begin{aligned} E(U^t U) &= \frac{1}{p} I_p, \\ E(U_i U_j U_k U_l) &= \frac{1}{p(p+2)} \sum_{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl}, \\ E(U_i U_j U_k U_l U_s U_t) &= \frac{1}{p(p+2)(p+4)} \sum_{(15)} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{st} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \sum_{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}, \\ \sum_{(15)} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{st} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{st} + \delta_{ij} \delta_{ks} \delta_{lt} + \delta_{ij} \delta_{kt} \delta_{ls} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{st} + \delta_{ik} \delta_{js} \delta_{lt} \\ &\quad + \delta_{ik} \delta_{jt} \delta_{ls} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{st} + \delta_{il} \delta_{js} \delta_{kt} + \delta_{il} \delta_{jt} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{jk} \delta_{lt} \\ &\quad + \delta_{is} \delta_{jl} \delta_{kt} + \delta_{is} \delta_{jt} \delta_{kl} + \delta_{it} \delta_{jk} \delta_{ls} + \delta_{it} \delta_{jl} \delta_{ks} + \delta_{it} \delta_{js} \delta_{kl}. \end{aligned}$$

補題 2 ([HP85]). 楕円分布における R の $2m$ 次モーメントは、

$$E(R^{2m}) = (-4)^m \left(\frac{p}{2} \right)_m \psi^{(m)}(0)$$

である。

補題 1, 2 から、次の結果を得る。

定理 1 (楕円分布における $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$ のモーメント). 奇数次は 0, $2m$ 次は,

$$E[(X_i - \mu)(X_j - \mu) \cdots (X_v - \mu)] = (\mathcal{K}_{(m)} + 1) \sum_{(d_m)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \cdots \sigma_{uv}$$

である. ただし, σ_{ij} は共分散行列 Σ の成分である. また,

$$\mathcal{K}_{(m)} \equiv \frac{\psi^{(m)}(0)}{\{\psi'(0)\}^m} - 1, \quad d_m = 2^m \left(\frac{1}{2}\right)_m$$

である.

$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$ のモーメントは, Berkane and Bentler[BB87] も, 特性関数 $\phi(\boldsymbol{\theta})$ の逐次微分によって示しているが, 上の定理 1 と一致することを確認できる. ここで, $\mathcal{K}_{(m)}$ を次数 $2m$ のモーメントパラメータと定義する. 特に, $m = 2$ のとき, 次数 4 のモーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(2)}$ は尖度パラメータと呼び, κ と略記する. 楕円分布は尖度パラメータ κ によって特徴付けられている. また, モーメントとキュムラントの関係が次のように表せる ([SO94] 参照).

$$\begin{aligned} \kappa_{ijkl} &= \kappa \sum_{(3)} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \\ \kappa_{ijklst} &= (\mathcal{K}_{(3)} - 3\kappa) \sum_{(15)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{st}, \\ \kappa_{ijklstuv} &= (\mathcal{K}_{(4)} - 4\mathcal{K}_{(3)} - 3\kappa^2 + 6\kappa) \sum_{(105)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{st} \sigma_{uv}. \end{aligned}$$

3 漸近的性質

本節では, モーメント法を用いて, 楕円分布における一般モーメントパラメータの推定を議論する. また, それによって得られる一致推定量の漸近的性質, 具体的には, 母集団共分散行列が既知の場合と未知の場合に分けて, 推定量の平均と分散を漸近展開の形で考察する.

定義 1 ([M70]). $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ を正規母集団からのランダム標本とする.

- Multivariate coefficient of kurtosis.

$$\beta_{2,p} \equiv E \left[\{ {}^t(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \}^2 \right],$$

- Sample measure of kurtosis.

$$b_{2,p} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) S^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \}^2.$$

ただし, $\bar{\mathbf{X}}$, S はそれぞれ標本平均, 標本共分散行列である.

$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ を $E_p(\boldsymbol{\mu}, \Lambda)$ からのランダム標本とするとき, 定理 1 を用いれば, $\beta_{2,p} = p(p+2)(\kappa+1)$ と計算できるので, 尖度パラメータ κ の一致推定量として

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{p(p+2)} b_{2,p} - 1$$

が得られる ([A93]). これを一般化すれば,

$$\beta_{m,p} \equiv E \left[\{ {}^t(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \}^m \right] = 2^m \left(\frac{p}{2} \right)_m (\mathcal{K}_{(m)} + 1)$$

となるので, $2m$ 次モーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(m)}$ の一致推定量を以下のように作ることができる.

$$\hat{\mathcal{K}}_{(m)} = \frac{1}{2^m \left(\frac{p}{2} \right)_m} b_{m,p} - 1, \quad (1)$$

ただし,

$$b_{m,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) S^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \}^m$$

とする. また, S の定義について, Mardia[M70] は Σ の最尤推定量 (MLE) である $S \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$ を用いているが, 本論では, 冒頭で述べたように Anderson[A93], Seo and Toyama[ST96] の結果を踏まえて, S を Σ の不偏推定量, 即ち $S \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$ として議論

初めに Σ が既知の場合, 一般性を失うことなく $\Sigma = I_p$ とし, S を Σ で置き換えることにより $T_i^2 = {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$ とすれば,

$$b_{m,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{2m}$$

と表現できる. $\mathbf{X}_i$ と $\bar{\mathbf{X}}$ の従属を避けるために,

$$\bar{\mathbf{X}}_{(i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i}^n \mathbf{X}_k$$

を定義すると,

$$T_i^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)})$$

となり, $\mathbf{X}_i$ と $\bar{\mathbf{X}}_{(i)}$ は独立である. $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ の期待値を計算するために,

$$\bar{\mathbf{X}}_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \mathbf{V}$$

とおくと, T_i^{2m} の展開が次のように表せる.

$$\begin{aligned} T_i^{2m} &= ({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^m + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ -2m({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^{m-1} {}^t\mathbf{V}\mathbf{X}_i \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left\{ m({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^{m-1} ({}^t\mathbf{V}\mathbf{V} - 2{}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i) \right. \\ &\quad \left. + 2m(m-1)({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^{m-2} ({}^t\mathbf{V}\mathbf{X}_i)^2 \right\} \\ &\quad + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

$\mathbf{X}_i$ と $\mathbf{V}$ に関して期待値を計算することにより, $T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)})$ の漸近平均が

$$E(T) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ -m(2\mathcal{K}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m-1)} + 1) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

となる。正規母集団では、 $\mathcal{K}_{(m)} = 0$ であるから、

$$E(T) = -\frac{m}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。同様に、 T_i^{4m} の展開式について期待値を計算することにより、以下の結果を得た。

定理 2 (T の漸近分散). Σ が既知のとき、 $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ を (1) で定義される一致推定量とする。このとき、

$$T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_T^2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

ただし、 $\xrightarrow{d}$ は法則収束を表し、

$$\sigma_T^2 = \frac{(\frac{p}{2} + m)_m}{(\frac{p}{2})_m} (\mathcal{K}_{(2m)} + 1) - (\mathcal{K}_{(m)} + 1)^2 \quad (3)$$

である。

次に、 Σ が未知の場合を考える。一般に、非正規性の下では $\bar{\mathbf{X}}$ と S は独立でない。そこで、 $\mathbf{X}_i$, $\bar{\mathbf{X}}$, S の従属を避けるために、

$$\begin{aligned} T_i^2 &= {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})S^{-1}(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}), \\ \bar{\mathbf{X}}_{(i)} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i}^n \mathbf{X}_k, \\ S_{(i)} &= \frac{1}{n-2} \sum_{k \neq i}^n (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) {}^t(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) \end{aligned}$$

を定義すると、 S について、

$$S = \frac{n-2}{n-1} S_{(i)} + \frac{1}{n} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}),$$

また、

$$S^{-1} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{-1} S_{(i)}^{-1} - \frac{\frac{(n-1)^2}{n(n-2)^2} S_{(i)}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) S_{(i)}^{-1}}{1 + \frac{n-1}{n(n-2)} {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) S_{(i)}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)})}$$

となる. これより, T_i^2 が以下のように書ける.

$$T_i^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{\tilde{T}_i^2}{1 + \frac{1}{n}\tilde{T}_i^2},$$

ここで,

$$\tilde{T}_i^2 = \frac{n-1}{n-2} {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}) S_{(i)}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i)}).$$

期待値を計算するために,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \mathbf{V}, \\ S_{(i)} &= I_p + \frac{1}{\sqrt{n-1}} M \end{aligned}$$

とおくと, $\tilde{T}_i^2$ の展開が次のように表せる.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i^2 &= {}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i + \frac{1}{\sqrt{n}} (-2 {}^t\mathbf{X}_i \mathbf{V} - {}^t\mathbf{X}_i M \mathbf{X}_i) \\ &\quad + \frac{1}{n} ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i + 2 {}^t\mathbf{X}_i M \mathbf{V} + {}^t\mathbf{X}_i M^2 \mathbf{X}_i + {}^t\mathbf{V} \mathbf{V}) \\ &\quad + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

これより, T_i^{2m} の展開が次のように表せる.

$$\begin{aligned} T_i^{2m} &= ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i)^m + \frac{1}{\sqrt{n}} \{-m ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i)^{m-1} (-2 {}^t\mathbf{X}_i \mathbf{V} - {}^t\mathbf{X}_i M \mathbf{X}_i)\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left[\frac{m}{2} ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i)^{m-2} \{(m-1) (-2 {}^t\mathbf{X}_i \mathbf{V} - {}^t\mathbf{X}_i M \mathbf{X}_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 {}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i + 2 {}^t\mathbf{X}_i M \mathbf{V} + {}^t\mathbf{X}_i M^2 \mathbf{X}_i + {}^t\mathbf{V} \mathbf{V}) \right. \\ &\quad \left. - 4 ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i)^2 - 2 ({}^t\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i)^3 \} \right] \\ &\quad + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

楕円母集団において, $\mathbf{V}$ と M の正確な同時確率密度関数 (joint probability density function 略して j.p.d.f) は現在得られていない. そこで, Wakaki[W94]

による漸近展開された j.p.d.f を利用して期待値を計算する．結果として， $T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)})$ の漸近平平均が以下のように与えられる．

$$E(T) = \frac{1}{\sqrt{n}}c + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (4)$$

ここで，

$$c = m(\mathcal{K}_{(m-1)} + 1) - m(p + 2m)(\mathcal{K}_{(m+1)} + 1) \\ + (3 + mp + 2m)(\kappa + 1)(\mathcal{K}_{(m)} + 1) - (2m + 1)(\mathcal{K}_{(m)} + 1).$$

同様にして，分散についても計算できる． $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$, $\bar{\mathbf{X}}$, S の従属を避けるために，

$$\bar{\mathbf{X}}_{(i,j)} = \frac{1}{n-2} \sum_{k \neq i,j}^n \mathbf{X}_k, \\ S_{(i,j)} = \frac{1}{n-3} \sum_{k \neq i,j}^n (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)})^t (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)})$$

を定義すると， $\tilde{T}_i^2$ が以下のように書ける．

$$\tilde{T}_i^2 = \frac{1}{n-2} \left\{ (n-1)Q_i + Q_i Q_j - Q_{i,j}^2 - 2Q_{i,j} + \frac{Q_j}{n-1} \right\} \left(1 + \frac{Q_j}{n-1} \right)^{-1},$$

ここで，

$$Q_i = \left(1 + \frac{1}{n-3} \right) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}) S_{(i,j)}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}), \\ Q_j = \left(1 + \frac{1}{n-3} \right) {}^t(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}) S_{(i,j)}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}), \\ Q_{i,j} = \left(1 + \frac{1}{n-3} \right) {}^t(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}) S_{(i,j)}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_{(i,j)}),$$

また，

$$E(b_{m,p}^2) = \frac{1}{n} E(T_i^{4m}) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) E(T_i^{2m} T_j^{2m}).$$

更に, 期待値を計算するために,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}_{(i,j)} &= \frac{1}{\sqrt{n-2}} \tilde{\mathbf{V}}, \\ S_{(i,j)} &= I_p + \frac{1}{\sqrt{n-2}} \tilde{M}\end{aligned}$$

とおくと, $\tilde{T}_i^{2m}$ の展開が次のように表せる.

$$\begin{aligned}\tilde{T}_i^{2m} &= ({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^m - \frac{1}{\sqrt{n}}m({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^{m-1}(2{}^t\mathbf{X}_i\tilde{\mathbf{V}} + {}^t\mathbf{X}_i\tilde{M}\mathbf{X}_i) \\ &\quad + \frac{1}{n}\left[m({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^{m-2}\left\{\frac{m-1}{2}(2{}^t\mathbf{X}_i\tilde{\mathbf{V}} + {}^t\mathbf{X}_i\tilde{M}\mathbf{X}_i)^2\right.\right. \\ &\quad \left.+ {}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i + 2{}^t\mathbf{X}_i\tilde{M}\mathbf{V} + {}^t\mathbf{X}_i\tilde{M}^2\mathbf{X}_i + \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}) \right. \\ &\quad \left.+ ({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i)^2 - 2{}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i{}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j - {}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i({}^t\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j)^2\right\}\Big] \\ &\quad + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

T_i^{4m} は $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{V}$, M に関して期待値を計算し, $T_i^{2m}T_j^{2m}$ は $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$, $\tilde{\mathbf{V}}$, $\tilde{M}$ に関して期待値を計算することにより, 以下の結果を得た.

定理 3 (T の漸近分散). Σ が未知のとき, $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ を (1) で定義される一致推定量とする. このとき,

$$T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_T^2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 &= \frac{\left(\frac{p}{2} + m\right)_m}{\left(\frac{p}{2}\right)_m}(\mathcal{K}_{(2m)} + 1) + (-m^2 + 3m + 1)(\mathcal{K}_{(m)} + 1)^2 \\ &\quad + \frac{2^{-m+2}m^2}{p\left(\frac{p}{2} + 2\right)_{m-2}}(\mathcal{K}_{(m)} + 1)(\kappa + 1)\left\{(p+2)(\kappa+1) - p\right\} \\ &\quad - \frac{2m(p+2m)}{p}(\mathcal{K}_{(m)} + 1)(\mathcal{K}_{(m+1)} + 1) \\ &\quad + 3(m^2 - m - 2)(\kappa + 1)(\mathcal{K}_{(m)} + 1)^2\end{aligned} \tag{5}$$

である.

ここで, $m = 2$ とした場合, Seo and Toyama[ST96] が証明した $\hat{\kappa}$ に関する漸近結果と一致する. 更に, 正規母集団の場合, 即ち $\kappa_{(m)} = 0$ のとき, Mardia[M70] が証明した結果と本質的に一致する.

4 数値計算

楕円母集団を次の 3 分布としたとき, 次数 6 のモーメントパラメータ $\kappa_{(3)}$ の推定量について, 数値的評価をする.

(a) $\omega = 0.1$, $\tau = 3$ の Contaminated normal 分布.

$$\kappa_{(m)} = \frac{1 + \omega(\tau^{2m} - 1)}{\{1 + \omega(\tau^2 - 1)\}^m} - 1,$$

(b) 多変量正規分布.

(c) 自由度 $\nu = 13$ の多変量 t 分布.

$$\kappa_{(m)} = \frac{(\nu - 2)^m}{2^m \left(\frac{\nu}{2} - m\right)_m} - 1, \quad \nu > 2m.$$

$m = 3$ とした場合は, 次数 12 までのモーメントパラメータが必要になり, そのときの理論値を表 1 で与える. p , n をいろいろ変えて近似式 (2), (4)

表 1: モーメントパラメータ $\kappa_{(m)}$ の理論値.

	κ	$\kappa_{(3)}$	$\kappa_{(4)}$	$\kappa_{(6)}$
(a)	1.78	11.65	61.58	1561.52
(b)	0	0	0	0
(c)	0.22	0.92	3.22	169.42

の値を計算すると表 2, 3 となる. これに対して, 一般性を失うことなく $\Sigma = I_p$ として, 10,000 回のモンテカルロシミュレーション実験で統計量 T

表 2: 近似式 (2) で求めた統計量 T の期待値 (Σ が既知のとき).

$n \backslash p$	(a)			(b)			(c)		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
10	-6.75	-6.75	-6.75	-0.30	-0.30	-0.30	-0.78	-0.78	-0.78
20	-4.77	-4.77	-4.77	-0.21	-0.21	-0.21	-0.55	-0.55	-0.55
50	-3.02	-3.02	-3.02	-0.13	-0.13	-0.13	-0.35	-0.35	-0.35
100	-2.38	-2.38	-2.38	-0.10	-0.10	-0.10	-0.27	-0.27	-0.27
200	-2.13	-2.13	-2.13	-0.09	-0.09	-0.09	-0.22	-0.22	-0.22
500	-1.15	-1.15	-1.15	-0.06	-0.06	-0.06	-0.17	-0.17	-0.17
800	-1.06	-1.06	-1.06	-0.04	-0.04	-0.04	-0.12	-0.12	-0.12

表 3: 近似式 (4) で求めた統計量 T の期待値 (Σ が既知のとき).

$n \backslash p$	(a)			(b)			(c)		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
10	-92.50	-99.73	-95.96	-1.30	-1.30	-1.30	-7.59	-8.16	-8.72
20	-74.60	-80.42	-86.24	-0.91	-0.91	-0.91	-5.37	-5.77	-6.16
50	-47.18	-50.86	-54.54	-0.58	-0.58	-0.58	-3.39	-3.64	-3.90
100	-37.30	-40.21	-43.12	-0.45	-0.45	-0.45	-2.68	-2.88	-3.08
200	-33.36	-35.96	-38.56	-0.41	-0.41	-0.41	-2.40	-2.58	-2.75
500	-23.59	-25.43	-27.27	-0.29	-0.29	-0.29	-1.69	-1.82	-1.95
800	-16.68	-17.98	-19.28	-0.20	-0.20	-0.20	-1.20	-1.29	-1.37

の平均を調べると, 表 4, 5 の値が得られる. (a) と (c) は多少のバラツキがあるが, (b) は実によく一致している. また, Σ が既知の場合は, (b) のみならず (a), (c) についても, 標本数小 (せいぜい $n = 50$) で一致する.

表 4: シミュレーション実験で求めた統計量 T の平均 (Σ が既知のとき).

$n \backslash p$	(a)			(b)			(c)		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
10	-6.04	-6.17	-6.07	-0.36	-0.34	-0.30	-3.72	-3.69	-3.54
20	-5.45	-5.31	-5.04	-0.27	-0.23	-0.14	-2.90	-2.65	-2.72
50	-4.14	-3.41	-3.13	-0.15	-0.11	-0.09	-2.78	-2.23	-2.48
100	-3.84	-2.96	-2.65	-0.12	-0.08	-0.07	-1.14	-1.21	-1.14
200	-2.65	-2.53	-2.38	-0.10	-0.07	-0.07	-1.10	-1.14	-1.12
500	-2.31	-1.48	-1.20	-0.07	-0.06	-0.06	-1.02	-1.05	-0.77
800	-1.70	-1.29	-1.18	-0.03	-0.02	-0.02	-0.33	-0.23	-0.18

表 5: シミュレーション実験で求めた統計量 T の平均 (Σ が未知のとき).

$n \backslash p$	(a)			(b)			(c)		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
10	-58.32	-62.25	-66.10	-0.89	-0.87	-0.85	-5.66	-4.92	-5.05
20	-49.27	-53.04	-57.98	-0.63	-0.64	-0.63	-4.38	-4.01	-4.41
50	-36.46	-39.89	-42.12	-0.40	-0.36	-0.39	-3.31	-3.28	-3.67
100	-31.15	-32.58	-35.71	-0.32	-0.28	-0.30	-2.44	-2.15	-2.62
200	-26.59	-28.75	-30.59	-0.31	-0.27	-0.28	-2.28	-2.29	-2.38
500	-21.13	-20.44	-22.68	-0.21	-0.22	-0.20	-1.22	-1.75	-1.41
800	-12.90	-14.29	-16.33	-0.18	-0.16	-0.14	-1.16	-1.07	-1.26

次に, bias 修正した推定量として, $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ を与える. Σ が既知のときは,

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(m)} = \hat{\mathcal{K}}_{(m)} + \frac{m}{n}(2\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \hat{\mathcal{K}}_{(m-1)} + 1). \quad (6)$$

Σ が未知のときは,

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(m)} = \hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \frac{\hat{c}}{n}, \quad (7)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \hat{c} = & m(\hat{\mathcal{K}}_{(m-1)} + 1) - m(p + 2m)(\hat{\mathcal{K}}_{(m+1)} + 1) \\ & + (3 + mp + 2m)(\hat{\kappa} + 1)(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} + 1) - (2m + 1)(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} + 1). \end{aligned}$$

どちらも期待値を計算すると, n^{-1} の項を消去できる.

$$E(\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}) = \mathcal{K}_{(m)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の bias を比較すると, 表 6, 7, 8 となる. Σ が既知, 未知に関わらず, いずれの場合も bias は $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ より (6), (7) の $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の方が小さくなった. また, $n \rightarrow \infty$ のときは, MSE についても $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の方が小さくな

り，漸近的には $\tilde{\kappa}_{(m)}$ は $\hat{\kappa}_{(m)}$ より改良されたといえる。

表 6-1 : $\hat{\kappa}_{(3)}$ と $\tilde{\kappa}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p = 2$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$
$n = 10$	-0.381	-0.090	-0.011	-0.008	-0.098	-0.082
$n = 50$	-0.174	-0.052	-0.006	-0.005	-0.094	-0.080
$n = 100$	-0.182	-0.042	-0.004	-0.004	-0.091	-0.075
$n = 500$	-0.070	-0.033	-0.002	-0.003	-0.089	-0.068
$n = 1000$	-0.019	-0.009	-0.001	-0.001	-0.072	-0.052
σ_T^2	31090.397		19.000		3404.797	

表 6-2 : $\hat{\kappa}_{(3)}$ と $\tilde{\kappa}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p = 2$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$
$n = 10$	-3.484	-0.754	-0.044	-0.013	-0.274	-0.050
$n = 50$	-1.631	-0.050	-0.018	-0.006	-0.152	-0.040
$n = 100$	-1.101	-0.043	-0.011	-0.004	-0.121	-0.032
$n = 500$	-0.472	-0.017	-0.004	-0.002	-0.053	-0.011
$n = 1000$	-0.200	-0.011	-0.001	-0.001	-0.040	-0.003
σ_T^2	17981.067		10.500		3276.594	

表 7-1 : $\hat{\kappa}_{(3)}$ と $\tilde{\kappa}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p = 3$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$	$\hat{\kappa}_{(3)}$	$\tilde{\kappa}_{(3)}$
$n = 10$	-0.154	-0.181	-0.011	-0.003	-0.091	-0.077
$n = 50$	-0.190	-0.060	-0.002	-0.002	-0.080	-0.075
$n = 100$	-0.101	-0.042	-0.002	-0.001	-0.078	-0.069
$n = 500$	-0.006	-0.032	-0.002	-0.001	-0.071	-0.066
$n = 1000$	-0.001	-0.023	-0.001	-0.000	-0.051	-0.012
σ_T^2	18891.978		11.257		2085.226	

表 7-2 : $\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p = 3$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n = 10$	-3.751	-0.832	-0.045	-0.012	-0.281	-0.050
$n = 50$	-1.784	-0.091	-0.016	-0.008	-0.152	-0.044
$n = 100$	-1.152	-0.064	-0.010	-0.005	-0.113	-0.033
$n = 500$	-0.457	-0.044	-0.005	-0.001	-0.061	-0.027
$n = 1000$	-0.225	-0.023	-0.002	-0.000	-0.050	-0.021
σ_T^2	10558.367		8.114		2003.759	

表 8-1 : $\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p = 4$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n = 10$	-0.350	-0.031	-0.011	-0.001	-0.110	-0.087
$n = 50$	-0.091	-0.024	-0.006	-0.001	-0.091	-0.084
$n = 100$	-0.112	-0.022	-0.002	-0.000	-0.083	-0.079
$n = 500$	-0.041	-0.020	-0.002	-0.000	-0.081	-0.071
$n = 1000$	-0.030	-0.014	-0.001	-0.000	-0.073	-0.060
σ_T^2	13511.974		7.750		1487.524	

表 8-2 : $\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p = 4$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n = 10$	-4.100	-1.119	-0.045	-0.013	-0.310	-0.072
$n = 50$	-1.833	-0.072	-0.017	-0.007	-0.162	-0.041
$n = 100$	-1.262	-0.051	-0.010	-0.005	-0.131	-0.037
$n = 500$	-0.507	-0.032	-0.004	-0.001	-0.075	-0.035
$n = 1000$	-0.258	-0.014	-0.002	-0.001	-0.060	-0.020
σ_T^2	7415.491		7.312		1429.473	

5 おわりに

本論では、一般モーメントパラメータの推定について、bias や MSE を中心に点推定を行ったが、 T の漸近正規性を利用すれば、区間推定や検定も考えられる。今後は、定理で得た漸近分散 (3), (5) を利用して、 $\mathcal{K}_{(m)}$ の近似

信頼区間を構成し、その際に $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ を用いた場合の精度の違いを考察する。また、標本共分散行列 S として Mardia[M70] が用いた Σ の MLE による議論が必要であり、理論的、数値的に検討し、本論の結果と比較していきたい。

参考文献

- [A84] Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, (Second ed). John Wiley & Sons, New York.
- [A93] Anderson, T. W. (1993). Nonnormal multivariate distributions: Inference based on elliptically contoured distributions. *Multivariate Analysis. Future Directions*, (C.R.Rao ed.), Elsevier Science Publishers, pp.1-24.
- [BB87] Berkane, M. and Bentler, P. M. (1987). Characterizing parameters of multivariate elliptical distributions. *Comm. Statist. Simulation Comput.* **16**, 193-198.
- [HP85] Hayakawa, T. and Puri, M. L. (1985). Asymptotic distributions of likelihood ratio criteria for testing latent roots and latent vectors of a covariance matrix under an elliptical population. *Biometrika* **72**, 331-338.
- [K70] Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location scale parameter generalization. *Sankhyā* **A32**, 419-430.
- [M70] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika* **57**, 519-530.
- [M82] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, New York.
- [SO94] Stuart, A. and Ord, J. K. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, (Sixth ed. Vol.1), Distribution Theory. Edward Arnold.
- [ST96] Seo, T. and Toyama, T. (1996). On the estimation of kurtosis parameter in elliptical distributions. *J. Japan. Statist. Soc.* **26**, 59-68.

- [W94] Wakaki, H. (1994). Discriminant analysis under elliptical population.
Hiroshima Math. J. **24**, 257-298.