

Optimal stopping problems with partial observations

愛媛大・教養 森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

§1. Friedman [4], Bensoussan-Lions [2] による optimal stopping problem については Troianiello [10], 最近では Garroni-Vivaldi [5] により 偏微分の観点を保って論じられて いる。しかしながら、多くの部分が偏微分によらず Martingale theory を用いて、一般的且つ簡潔に述べられることが分かって来た。その一つを紹介します。

今、状態と観測過程が次の様に与えられているとする。

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t^1$$

$$dy_t = h(x_t)dt + dW_t^2,$$

ここで W^1, W^2 は独立な Wiener Processes とする。

問題は cost function

$$C(\tau) = E \left[\int_0^\tau e^{\alpha r} f(x_r) dr + e^{\alpha \tau} g(x_\tau) \right]$$

$\tau: \tau_t^y = \sigma(y_s, s \leq t)$ - stopping times

を最小にすることをす。

System が Linear の場合 [2] や Menaldi [7] が stochastic control における separation principle の idea を基に,
Non-linear の場合 Benes [1] が measure transformation technique を用いて論じている。ここで述べる特徴は次の点です。

- (1) Penalty equation の non-linear filtering equation を導く。
- (2) (1) を用いて conditional value process の近似法を与える。
- (3) separation principle によらず optimal s.t. の存在を示す。

§2. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を complete probability space, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ を通常の条件をみたす filtration で $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, $\forall t$ とする。 W を $\mathcal{F}$ -adapted bounded right-continuous processes x の全体とすると norm $\|x\| = \|\sup_t |x_t|\|_{\infty}$ で Banach space となる。

$T_s : W \rightarrow W$, conditioned shift による semi-group :

$$T_s x(t) = E[x(t+s) | \mathcal{F}_t].$$

$A : \mathcal{D}(A) \subset W \rightarrow W$, generator :

$$A = \beta - G_\beta^{-1}, \quad \mathcal{D}(A) = G_\beta(W), \quad \beta > 0 \quad (\beta = \text{dep}(\beta))$$

とする。ここで

$$G_\beta x(t) = \int_0^\infty e^{-\beta s} T_s x(t) ds = E \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} x_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

$\mathcal{D}(A)$ の closure を W_0 とする :

$$W_0 = \{x \in W \mid \|T_s x - x\| \rightarrow 0, s \downarrow 0\}.$$

与る。問題を次の様に一般的に定式化する:

$f, g \in W, \alpha > 0$; given

$$\text{Minimize } J(T) = E \left[\int_0^T e^{\alpha r} f_r dr + e^{\alpha T} g_T \right] \quad T: \mathcal{F}\text{-s.t.}$$

$\pi(x)$ によって $x \in W$ の $\mathcal{F}$ -optional projection を記すことにすると, $\pi(x) \in \hat{W}$ となる, $\hat{W}$ は $\mathcal{F}$ に関する W である。

そうすると $J(T)$ は

$$J(T) = E \left[\int_0^T e^{\alpha r} \pi(f)_r dr + e^{\alpha T} \pi(g)_T \right]$$

と書けるので, 問題は complete observable case に帰着される。

それ故, complete observation の結果と関連する注意を述べます。証明は [8] のやり方を modify して得られる。

V を次の様な class とする:

$$V = \{ v \in W \mid v_t \leq g_t \quad \forall t \\ (e^{\alpha t} v_t + \int_0^t e^{\alpha r} f_r dr) : \mathcal{F}\text{-submartingale} \}$$

Penalty equation を考えよう:

$$(\alpha - A) z^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (z^\varepsilon - g)^+ = f, \quad \varepsilon > 0.$$

解 z^ε は, $g \in W_0$ なる仮定の下で, 適当に数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ を選ぶと, z^{ε_n} はある $z \in W_0$ に強収束する,

(実は $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ でよい)。更に

(1) Z は V の maximal element

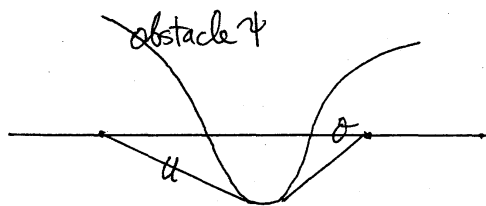
$$\begin{aligned} (2) \quad Z_u &= \operatorname{ess\,inf}_{T \geq u} E \left[\int_u^T \bar{e}^{\alpha(r-u)} f_r dr + \bar{e}^{\alpha(T-u)} g_T \mid \mathcal{F}_u \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{s \in \mathcal{D}_u} E \left[\int_u^{s+u} \bar{e}^{\alpha(r-u)} f_r dr + \bar{e}^{\alpha s} g_{s+u} \mid \mathcal{F}_u \right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{ess\,inf}_{s \in \mathcal{D}_u} (f_{r+u})_{r \geq 0} - \text{s.t.} \{.$$

(3) $T^* = \inf \{t \mid g_t = Z_t\} : \text{optimal s.t.}$

Remark 1. 次の obstacle problem を考える: Find u

$$\begin{cases} \alpha u - \frac{1}{2} u'' \leq f \\ u \leq \psi \\ (u - \psi)(\alpha u - \frac{1}{2} u'' - f) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



Variational inequality の問題であるこの問題 (Bensoussan [3], p. 307 参照) は, Wiener process の semi-group を用いて [3] の Theorems 5.1, 5.3 によって与えられる。 Z 及 u^* V は丁度これに対応するものです。

Remark 2. Quasi-variational inequality に関して [3], Theorem 4.3 に対応する maximal element が martingale 観点より得られる。ただし, Impulsive control の適用には,

optimal control を求めるために measurable selection theorem ([3], p.382 ↑ 6) が必要なので, 困難である。

Remark 3. Maximal element の近似法は Zorn's lemma が関連して難しい点を含んでいる。

§4. 結果は以下の通りです。証明は [9] による。

Theorem

(1) Z^ε を penalty equation の解とする:

$$(\alpha - A) Z^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (Z^\varepsilon - g)^+ = f.$$

このとき $\pi(Z^\varepsilon)$ は次の関係式を満たす

$$(\alpha - \hat{A}) \pi(Z^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \pi((Z^\varepsilon - g)^+) = \pi(f)$$

ここで, $\hat{A}$ は $\mathcal{G}$ に関する generator.

(2) $\begin{cases} g \in W_0 \\ \text{すべての } \mathcal{G}\text{-martingale は連続} \end{cases}$

を仮定する。このとき $\varepsilon_n \downarrow 0$ が存在して

$\pi(Z^{\varepsilon_n}) \longrightarrow y$ in $\hat{W}$ (強収束), y : maximal element of the class $\{y \in \hat{W} \mid y \leq \pi(g), (\bar{e}^{\alpha t} y_t + \int_0^t \bar{e}^{\alpha r} \pi(f)_r dr) : \mathcal{G}\text{-submartingale}\}$.

(3) 更に $\hat{T}^* = \inf \{t \mid y_t = \pi(g)_t\}$: optimal s.t.

参考文献

- [1] V. E. Beneš, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 42
Springer, 1982, 18-37.
- [2] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Applications des inéquations
variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, 1978.
- [3] A. Bensoussan, *Stochastic control by functional analysis methods*,
North-Holland, 1982.
- [4] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications vol 2*
Acad. Press, 1975.
- [5] M. G. Garroni and M. A. Viraldi, *Manuscripta Math.*, 1984, 39-69.
- [6] H. Kunita, 確率過程の推定, 産業図書
- [7] J. L. Menaldi, *Stochastics* 3, 1979, 47-60.
- [8] H. Morimoto, *Stochastics* 13, 1984, 213-228.
- [9] H. Morimoto, *C.R. Acad. Sc.*, 229, 1984, 623-626.
- [10] G. M. Trianiello, *Ann. Mathematica*, 1979, 365-381.