

On linear relations between roots of unity

お茶の水女子大 藤原正高
M. FUJIWARA

次の定理は良く知られている。(Chowla, 岩沢等)

定理 A 素数 $p > 2$ に対して $\cos \frac{2\pi a}{p}$ ($a=1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$)

は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。

定理 B 素数 $p > 2$ に対して $\tan \frac{2\pi a}{p}$ ($a=1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$)

は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。

さて、 χ を character mod p とする。また χ は $\mathbb{Z}/(p)$ の乗法群から単位円周上への準同型。この時

$\text{Th A} \Leftrightarrow \text{Th B} \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{p-1} a\chi(a) \neq 0$ for χ s.t. $\chi(-1) = -1$

$$\Leftrightarrow L(1, \chi) \neq 0 \text{ for } \chi \text{ s.t. } \chi(-1) = -1$$

なる同値関係が、やはり Chowla, 岩沢等によって知られて

いる。また、簡単な計算により、 $\chi(-1) = -1$ なる χ に対し

$$(*) \quad \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a \chi(a) \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{p-1} a\chi(a) \neq 0$$

が成立することが分る。

整数論的に重要な意味を持つ $L(1, \chi) \neq 0$ の証明は、通常、複素解析を用いて、あることは類体論より 導かれる。

そこで、この $L(1, \chi) \neq 0$ の初等的証明が大愛好家らしいのであるが、今のところまだ完成できていない。その目的のためには (A) を示せば良いのだが、ここでは、(A) の左辺を、 p に制限をつけて上で、全く初等的に示す。

ζ を 1 の原始 n 乗根と取り、 $\zeta^n = 1$ 。これを fix する。

$a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \zeta^i = 0$ なる関係を polygon と名付ける。これを $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ と表す。

これを、単位円周上の正 n 角形の頂点に重さ $a_0, \dots, a_{n-1}$ を付けたものと解釈する。

頂点の回りで釣り合っていると考えよう。 a_i のうち丁度 m 個 ($m|n$) だけが 0 と異なるとき、 $\text{regular } m\text{-gon}$ と呼ぶ。また、 $\text{primitive } p\text{-gon}$ とは $\text{regular } p\text{-gon}$ (p は素数) であり各 a_i が ± 1 又は ± -1 なるものとする。

Shoenberg と Mann は 次を証明した。

(Th.) 任意の polygon は $\text{primitive } p\text{-gon}$ 達の 整係数 一次結合である。

さて、以下で、 n は偶数とし、その素因子分解を、

$n = 2^a p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$ とする。 そう = ったけで済む。

polygon $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ が

skew symmetric とは、 $a_i = -a_{i+\frac{n}{2}}$ for $i=0, \dots, \frac{n}{2}-1$

unitary とは、 $a_i = \pm 1$ for $i=0, \dots, n-1$

すなわち、skew-symmetric とは、原素を通る対角線上
で異なる符号 (絶対値は同じ) を持つということ。この時
次が成立する。ただし証明を与えたのは $\Delta=1$ あるいは 2 だけ。

(Th.) skew symmetric, unitary n -gon は、
primitive p_i -gon 達の disjoint sum で書ける。

証明は円分体の理論を少し用いる他は全く初等的である。

また、次の Th. を $\Delta=1$ の時だけに示した。

(Th.)

$$\sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a \chi(a) = 0 \quad (\text{ただし } \chi \text{ は } 1:-1 \text{ で } \chi(-1)=-1)$$

(もちろんこれは、skew-symm, unitary $p-1$ gon である)

は primitive p_i -gon 達の disjoint sum と (2) で書ける
すことが出来る。

$$(\text{Cor}) \quad \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a \chi(a) \neq 0 \quad \text{if } \chi \text{ is } 1:-1, \chi(-1)=-1$$