

Subadditivity and Superadditivity

北星学園大 経済学部 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

1. 背景と問題 以下では $A, B, \dots$ は $n \times n$ 行列とする。Hermitian A, B の間の順序 (order) $A \geq B$ は $A - B$ が positive (semi-definite) で定義される。

実数値連続関数 $f(t)$ が $[0, \infty)$ で定義されていると、どの $A \geq 0$ にたいしても functional calculus で Hermitian $f(A)$ が定義される。positive 行列のなす錐 (cone) $\mathcal{P}$ には affine 構造と順序が定義されているのであるから、この対応 $A \mapsto f(A)$ に関して単調性、凸性、凹性が考えられる。(次元 n に関係なく)

$$A \geq B \geq 0 \implies f(A) \geq f(B)$$

が成り立つとき、 $f(t)$ は 作用素単調 (operator monotone) であるという。また

$$\lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \geq f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \quad (A, B \in \mathcal{P}; 1 \geq \lambda \geq 0)$$

を満たすとき、 $f(t)$ を 作用素凸 (operator convex) という。勿論、 $-f(t)$ が作用素凸のとき、 $f(t)$ 自身を作用素凹 (operator concave) という。しかし、作用素単調性と作用素凹性は同じであることが知られている。また $f(t) \geq 0$ で $f(0) = 0$ のときは $f(t)$ が作用素凸であることと、 $f(t)/t$ が作用素単調であることは同値となる。

行列空間の norm $|||\cdot|||$ で興味あるのは (strong) unitarily invariant なもの、すなわち

$$|||UAV||| = |||A||| \quad \forall \text{ unitary } U, V$$

という性質をもつものである。このような norm $|||A|||$ は A の特異値 (singular value) (すなわち $|A| \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{1/2}$ の固有値) だけで決まる。unitarily invariant norm の全体を $\mathcal{N}$ で表そう。

表面には出ないが最も重要な unitarily invariant norm は Ky Fan k -norm $\|\cdot\|_{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) である：

$$\|A\|_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k s_i(A).$$

ここで $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots \geq s_n(A)$ は A の特異値である。

次の基本的な事実 (Ky Fan の dominance theorem と呼ばれるものの一部である (これらに関しては Ando [3] の解説を参照))。

補題 1 $A, B \geq 0$ に関して以下の条件は同値である。

- (1) $\|A\|_{(k)} \geq \|B\|_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$
- (2) $\|A\| \geq \|B\| \quad (\|\cdot\| \in \mathcal{N}),$
- (3) $\|\varphi(A)\| \geq \|\varphi(B)\| \quad (\|\cdot\| \in \mathcal{N}; \forall \text{ convex, increasing } \varphi(t) \geq 0).$

また $A \geq 0$ の Ky Fan norm を使うときには、Ky Fan 自身による次の変分表示が役に立つ。

補題 2 $A \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\|A\|_{(k)} = \sup_{v_i; \text{ o.n.}} \sum_{i=1}^k \langle Av_i, v_i \rangle.$$

$\|A\|_{(1)}$ は spectral norm $\|A\|_\infty$ であり、 $\|A\|_{(n)}$ は trace norm $\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(|A|)$ となる。spectral norm と trace norm を補間するより popular な unitarily invariant norm として p -norm ($1 \leq p < \infty$) がある：

$$\|A\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{tr}|A|^p\}^{1/p}.$$

以下では記述を簡単にするため以下のような記号を使おう。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+ &= \{f(t); \text{ operator monotone, } f(0) = 0\}, \\ \mathcal{C}_+ &= \{g(t); \text{ operator convex, } g(t) \geq 0, g(0) = 0\}, \\ \mathcal{I}_+ &= \{h(t); h(t) \geq 0, h(0) = 0, h^{-1}(t) \text{ operator monotone}\}. \end{aligned}$$

補題 3

- (1) $f(t) \in \mathcal{M}_+$ にたいして $\alpha \geq 0$ と $[0, \infty)$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に決まり $f(t)$ は

$$f(t) = \alpha t + \int_0^\infty \frac{t}{t+s} d\mu(t)$$

と表示できる。

- (2) $g(t) \in \mathcal{C}_+$ にたいして $\alpha, \beta \geq 0$ と $[0, \infty)$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に決まり $g(t)$ は

$$g(t) = \alpha t + \beta t^2 + \int_0^\infty \frac{t^2}{t+s} d\mu(t)$$

と表示できる。

これらに関しては Kubo - Ando [5] を参照。

次の事実は Ando [1] の摂動定理の直接の系である。

定理 1

- (1) $|||f(A+B) - f(A)||| \leq |||f(B)||| \quad (A, B \in \mathcal{P}; f \in \mathcal{M}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N}),$
- (2) $|||g(A+B) - g(A)||| \geq |||g(B)||| \quad (A, B \in \mathcal{P}; g \in \mathcal{C}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N}).$

これに関連して Hiai [4] は、関数と norm に関する subadditivity および superadditivity とでも考えられる次のような予想を提出した。

予想

- (1) $|||f(A+B)||| \leq |||f(A) + f(B)||| \quad (A, B \in \mathcal{P}; f \in \mathcal{M}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N}),$
- (2) $|||g(A+B)||| \geq |||g(A) + g(B)||| \quad (A, B \in \mathcal{P}; g \in \mathcal{C}_+; |||\cdot||| \in \mathcal{N}).$

特別な関数 $h(t) = t^p$ ($p \geq 1$) に関しては、Bhatia - Kittaneh [3] により、上の予想の (2) が示されている。

定理 2 $p = 1, 2, \dots$ にたいして

$$|||(A+B)^p||| \geq |||A^p + B^p||| \quad (A, B \in \mathcal{P}; |||\cdot||| \in \mathcal{N}).$$

一方、spectral norm $\|\cdot\|_\infty$ と trace norm $\|\cdot\|_1$ に関しては、別な理由から次の不等式を導くのはさして困難ではない ([2], [3] 参照)。

- (1) $A, B \in \mathcal{P}; 0 \leq p \leq 1$ にたいして

$$\|(A+B)^p\|_\infty \leq \|A^p + B^p\|_\infty, \quad \|(A+B)^p\|_1 \leq \|A^p + B^p\|_1,$$

- (2) $A, B \in \mathcal{P}; 1 \leq p < \infty$ にたいして

$$\|(A+B)^p\|_\infty \geq \|A^p + B^p\|_\infty, \quad \|(A+B)^p\|_1 \geq \|A^p + B^p\|_1.$$

この講演では、上の予想および関連した問題へのいくつかの試みを展開する。

2. 同値性 予想を解決するためには、より簡単な何を証明すればよいかを見定めるために、同値命題を挙げる。

命題1 以下の4つの条件は互いに同値である。

- (I) $|||g(A+B)||| \geq |||g(A)+g(B)|||$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $g(t) \in \mathcal{C}_+$; $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$),
- (II) $|||h(A+B)||| \geq |||h(A)+h(B)|||$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $h(t) \in \mathcal{I}_+$; $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$),
- (III) $|||f(A+B)||| \leq |||f(A)+f(B)|||$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $f(t) \in \mathcal{M}_+$; $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$),
- (IV) どの $A, B \in \mathcal{P}$ にたいしても、 $A+B$ の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 、対応する正規化された固有ベクトルを $u_1, u_2, \dots, u_n$ とすると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \langle \{(A+I)^{-1} + (B+I)^{-1}\} u_i, u_i \rangle \\ & \leq \sum_{i=1}^k \langle \{I + (A+B+I)^{-1}\} u_i, u_i \rangle \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

(IV) $\Rightarrow$ (III) の証明: $s > 0$ にたいして

$$\begin{aligned} A(A+s)^{-1} + B(B+s)^{-1} &= 2 - \{(s^{-1}A+I)^{-1} + (s^{-1}B+I)^{-1}\} \\ (A+B)(A+B+s)^{-1} &= 2 - [1 + \{s^{-1}(A+B)+1\}^{-1}] \end{aligned}$$

であるから、 $s^{-1}A, s^{-1}B$ にたいする (VI) より

$$\sum_{i=1}^k \langle \{A(A+s)^{-1} + B(B+s)^{-1}\} u_i, u_i \rangle \geq \sum_{i=1}^k \langle \{(A+B)(A+B+s)^{-1}\} u_i, u_i \rangle$$

がでる。 $f(t) \in \mathcal{M}_+$ にたいして補題3の積分表示より

$$\sum_{i=1}^k \langle \{f(A) + f(B)\} u_i, u_i \rangle \geq \sum_{i=1}^k \langle f(A+B) u_i, u_i \rangle$$

となるが、 $u_1, \dots, u_k$ は $f(A+B)$ の (最大の) 固有値 $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)$ に対応する固有ベクトルとなっているから

$$\sum_{i=1}^k \langle f(A+B) u_i, u_i \rangle = \|f(A+B)\|_{(k)}$$

となっている。一方補題2より

$$\|f(A) + f(B)\|_{(k)} \geq \sum_{i=1}^k \langle \{f(A) + f(B)\} u_i, u_i \rangle$$

なので

$$\|f(A) + f(B)\|_{(k)} \geq \|f(A + B)\|_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

がでて、補題1より (III) が導かれる。

(III) $\implies$ (II) の証明： $h(A), h(B) \in \mathcal{P}$ と $h^{-1}(t) \in \mathcal{M}_+$ に (III) を適用して

$$|||h^{-1}(h(A) + h(B))||| \leq |||A + B|||$$

がすべての $||| \cdot ||| \in \mathcal{N}$ に成り立つが、 $h(t)$ は convex, increasing であるから、補題1より (II) が導かれる。

(II) $\implies$ (I) の証明： $s > 0$ にたいして

$$h_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t^2}{t + s}$$

を考えると、この逆関数

$$h_s^{-1}(t) = \frac{t + \sqrt{t}\sqrt{t + 2s}}{2}$$

は作用素単調となるので、(II) により

$$\|A^2(A+s)^{-1} + B^2(B+s)^{-1}\|_{(k)} \leq \|(A+B)^2(A+B+s)^{-1}\|_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

がでるが、補題3の積分表示から、(VI) $\implies$ (III) の証明と同様に、どの $g(t) \in \mathcal{C}_+$ にたいしても

$$\|g(A) + g(B)\|_{(k)} \leq \|g(A + B)\|_{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

がわかるが、補題1より (I) が導かれる。

(I) $\implies$ (IV) の証明：作用素凸関数

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t^2}{t + 1}$$

に (I) を適用して

$$\|A^2(A+1)^{-1} + B^2(B+1)^{-1}\|_{(k)} \leq \|(A+B)^2(A+B+1)^{-1}\|_{(k)}$$

ができるが、定義から

$$\|(A+B)^2(A+B+1)^{-1}\|_{(k)} = \sum_{i=1}^k \langle (A+B)^2(A+B+1)^{-1}u_i, u_i \rangle$$

なので、補題 2 より

$$\sum_{i=1}^k \langle \{A^2(A+1)^{-1} + B^2(B+1)^{-1}\}u_i, u_i \rangle \leq \sum_{i=1}^k \langle (A+B)^2(A+B+1)^{-1}u_i, u_i \rangle$$

ができる。これから (IV) をだすには

$$\begin{aligned} A^2(A+1)^{-1} + B^2(B+1)^{-1} &= (A+B) - 2 + \{(A+1)^{-1} + (B+1)^{-1}\} \\ (A+B)^2(A+B+1)^{-1} &= (A+B) - 2 + \{1 + (A+B+1)^{-1}\} \end{aligned}$$

の関係を使えばよい。 (証明終)

次に特に spectral norm $\|\cdot\|_\infty$ について考えてみよう。

$A \geq 0$ の最大の固有値に対応する正規化された固有ベクトルを v_1 とすると、どの $[0, \infty)$ での non-negative, increasing な関数 $\varphi(t)$ にたいしても

$$\|\varphi(A)\|_\infty = \varphi(\|A\|_\infty) = \langle \varphi(A)v_1, v_1 \rangle$$

の関係が成り立つから、上の命題の証明をたどると次が証明される。

命題 2 以下の 4 つの条件は互いに同値である。

- (I) $\|g(A+B)\|_\infty \geq \|g(A) + g(B)\|_\infty$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $g(t) \in \mathcal{C}_+$),
- (II) $\|h(A+B)\|_\infty \geq \|h(A) + h(B)\|_\infty$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $h(t) \in \mathcal{I}_+$)
- (III) $\|f(A+B)\|_\infty \leq \|f(A) + f(B)\|_\infty$ ($A, B \in \mathcal{P}$; $f(t) \in \mathcal{M}_+$)
- (IV) どの $A, B \in \mathcal{P}$ にたいしても、 $A+B$ の最大の固有値に対応する正規化された固有ベクトルを u_1 とすると

$$\langle \{(A+I)^{-1} + (B+I)^{-1}\}u_1, u_1 \rangle \leq \langle \{I + (A+B+I)^{-1}\}u_1, u_1 \rangle.$$

3. 幾つかの結果 残念ながら前節の命題1の中の同値条件のどれをも証明するまでには至っていないが、命題2の(IV)を証明することができる。

定理3 $A, B \geq 0$ にたいして、 $A + B$ の最大の固有値を λ_1 それに対応する正規化された固有ベクトルを u_1 とすると

$$\langle \{(A+1)^{-1} + (B+1)^{-1}\}u_1, u_1 \rangle \leq \frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_1 + 1} = \langle \{1 + (A+B+1)^{-1}\}u_1, u_1 \rangle.$$

証明

$$C \stackrel{def}{=} A + B + 1, \quad D \stackrel{def}{=} C^{-1/2}(A+1)C^{-1/2}$$

とすると

$$A+1 = C^{1/2}DC^{1/2}, \quad B+1 = C^{1/2}(1-D+C^{-1})C^{1/2}$$

で

$$(\lambda_1 + 1)^{-1} \leq C^{-1} \leq D \leq 1$$

なので

$$\begin{aligned} (A+1)^{-1} + (B+1)^{-1} &= C^{-1/2}\{D^{-1} + (1-D+C^{-1})^{-1}\}C^{-1/2} \\ &= C^{-1/2}\{D^{-1} + (1-D+(\lambda_1+1)^{-1})^{-1}\}C^{-1/2} \\ &= \frac{\lambda_1+2}{\lambda_1+1}C^{-1/2}D^{-1}\{1-D+(\lambda_1+1)^{-1}\}^{-1}C^{-1/2} \\ &\leq (\lambda_1+2)C^{-1}. \end{aligned}$$

ここで

$$1 - (\lambda_1 + 1)^{-1}D^{-1}\{1 - D + (\lambda_1 + 1)^{-1}\}^{-1} = (1 - D)\{1 - D + (\lambda_1 + 1)^{-1}\}^{-1} \geq 0$$

を使った。最後に

$$\langle C^{-1}u_1, u_1 \rangle = \frac{1}{\lambda_1 + 1}$$

を使えばよい。(証明終)

$(A+1)^{-1} + (B+1)^{-1}$ と $1 + (A+B+1)^{-1}$ の関係については、直接予想の解決には結びつかないが、次が言える。

定理4 どの $A, B \geq 0$ と、どの unitarily invariant norm $||| \cdot |||$ にたいしても

$$|||\{(A+1)^{-1} + (B+1)^{-1}\}^{-1}||| \geq |||\{1 + (A+B+1)^{-1}\}^{-1}|||.$$

証明

$$H \stackrel{def}{=} \{(A+1)^{-1} + (B+1)^{-1}\}^{-1}$$

とすると、

$$\begin{aligned} H &\geq \{(A+1)^{-1} + 1\}^{-1} = (A+1)(A+2)^{-1} \\ &= [A(A+2)]^{-1/2} A(A+1)[A(A+2)]^{-1/2} \end{aligned}$$

であるから

$$[A(A+2)]^{1/2} H [A(A+2)]^{1/2} \geq A(A+1)$$

がでる。一方

$$H = (A+1) - (A+1)(A+B+2)^{-1}(A+1)$$

と書かれるから

$$-(A+B+2)^{-1} = (A+1)^{-1} H (A+1)^{-1} - (A+1)^{-1}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \{1 + (A+B+1)^{-1}\}^{-1} &= 1 - (A+B+2)^{-1} \\ &= 1 - (A+1)^{-1} + (A+1)^{-1} H (A+1)^{-1} \\ &= (A+1)^{-1} \{A(A+1) + H\} (A+1)^{-1} \\ &\leq (A+1)^{-1} [A(A+2)]^{1/2} H [A(A+2)]^{1/2} (A+1)^{-1} \\ &\quad + (A+1)^{-1} H (A+1)^{-1} \\ &= \Phi(H) \end{aligned}$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は行列空間の線形写像で

$$\begin{aligned} \Phi(X) &\stackrel{def}{=} (A+1)^{-1} [A(A+2)]^{1/2} X [A(A+2)]^{1/2} (A+1)^{-1} \\ &\quad + (A+1)^{-1} X (A+1)^{-1} \end{aligned}$$

で定義される。unitarily invariant norm の性質から

$$|||\Phi(H)||| \geq |||\{1 + (A + B + 1)^{-1}\}^{-1}|||$$

がでる。また 明らかにこの写像は unital completely positive になっているので、一般論 (Ando[1] 参照) により

$$|||H||| \geq |||\Phi(H)|||$$

がでるので、合わせて定理が証明された。 (証明終)

4. 文献

- [1] T.Ando, Comparison of norms $|||f(A) - f(B)|||$ and $|||f(|A - B|)|||$,
Math. Z. 197(1988), 403-409.
- [2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of
eigenvalues, Linear Alg. Appl. 118(1989), 163-248.
- [3] R. Bhatia and F. Kittaneh, Norm inequalities for positive operators
(Preprint),
- [4] F. Hiai, Log - majorizations and norm inequalities for exponential
operators, in "Linear Operators", Banach Center Publication 38(1996),
119-181.
- [5] F.Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators,
Math. Ann. 246(1979/80), 347-352.