

Sur les ondes de surface de l'eau

Tadayoshi KANO\* et Takaaki NISHIDA\*\*

I. Problèmes et conclusions.

1. Considérons le mouvement irrotationnel d'un liquide parfait qu'on appellera l'eau dans ce qui suit, remplissant l'espace  $\Omega(t) = \{(x,y): x \in \mathbb{R}, 0 < y < \Gamma(t,x)\}$ ,  $t \geq 0$ . Les ondes de surface de l'eau en deux dimension sont régies par :

$$(1.1) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0 \quad \text{pour } (x,y) \in \Omega(t) \\ \Phi_y &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } y = 0 \\ \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + gy &= 0 \\ \Gamma_t + \Gamma_x \Phi_x - \Phi_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad x \in \mathbb{R}, y = \Gamma(t,x)$$

où  $\Phi$  est le potentiel de ce champs conservatif des vitesses,  $y = \Gamma(t,x)$  l'équation de la frontière libre qui est à déterminer en même temps que  $\Phi$  et  $g$  la

---

\* Dépt. Math., Univ. d'Osaka; \*\* Dépt. Math. et Phys. Appl., Univ. de Kyoto

constante de gravité.. Supposons qu'on connaisse le potentiel et la frontière libre à  $t = 0$  :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}(0, x, y) &= \bar{\Phi}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega(0), \\ \Gamma(0, x) &= \Gamma_0(x) > 0. \end{aligned}$$

Problème I Résoudre le problème de Cauchy  
(1.1) - (1.2).

Non-dimensionalisation de (1.1) - (1.2):

Soient

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x &= \lambda x', \quad y = hy', \quad t = (\lambda/c)t', \\ \bar{\Phi} &= c\lambda \bar{\Phi}', \quad \Gamma = h\Gamma', \quad \bar{\Phi}_0 = c\lambda \bar{\Phi}_0', \quad \Gamma_0 = h\Gamma_0' \end{aligned}$$

où  $c = \sqrt{gh}$ ,  $h$  étant la profondeur moyenne de l'eau.  
En désignant  $h/\lambda$  par  $\delta$  et en omettant le signe  
" ' ", le problème I revient à résoudre le problème  
de Cauchy suivant:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \delta^2 \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} = 0 & , x \in \mathbb{R}, 0 < y < \Gamma(t, x) \\ \bar{\Phi}_y = 0, & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2 (\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + y) + \frac{1}{2} \Phi_y^2 = 0 \\ \delta^2 (\Gamma_t + \Gamma_x \Phi_x) - \bar{\Phi}_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \Gamma(t, x) \end{array}$$

$$(1.5) \quad \Phi(0, x, y) = \Phi_0(x, y), \quad \Gamma(0, x) = \Gamma_0(x).$$

2. Développement de Friedrichs et les équations des ondes en eau peu profonde. Friedrichs a proposé en 1948, un développement en série par rapport à  $\delta^2$  du potentiel et de la frontière libre:

K.-O. Friedrichs: Comm. Pure Appl. Math., 1, p. 81-85

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{\Phi}^0 + \delta^2 \bar{\Phi}^1 + \delta^4 \bar{\Phi}^2 + \dots \\ \Gamma &= \Gamma^0 + \delta^2 \Gamma^1 + \delta^4 \Gamma^2 + \dots \end{aligned}$$

En rapportant (2.1) dans (1.4), il en a déduit comme le terme d'ordre zéro les équations des ondes en eau peu profonde considérées en 1850 par G. Airy:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}_t^0 + \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_x^0)^2 + \Gamma^0 &= 0 \\ \Gamma_t^0 + (\bar{\Phi}_x^0 \Gamma^0)_x &= 0 \end{aligned}$$

Il a ainsi suggéré une procédure systématique de dériver ces équations des ondes en eau peu profonde et des approximations d'ordres supérieurs, sans toutefois démontrer la justification mathématique de ce développement.

Problème II Démontrer oui ou non la convergence de développement de Friedrichs.

3. Après le rapport de Scott-Russel, en 1844, sur l'observation des ondes solitaires sur les eaux d'un canal rectangulaire, Boussinesq, Rayleigh, Korteweg-de Vries ... ont proposé des équations des approximations pour expliquer la possibilité théorique d'elles:

$$(3.1) \quad u_{tt} = u_{xx} + \left( \frac{3}{2} u^2 \right)_{xx} + \frac{1}{3} u_{xxxx}, \text{Boussinesq, 1871,}$$

$$(3.2) \quad u_t = u_x + \frac{3}{2} u \cdot u_x + \frac{1}{6} u_{xxx}, \text{K-dV, 1895.}$$

Et encore:

$$\begin{cases} u_t + \eta_x + u u_x = \frac{1}{2} u_{xxt} \\ \eta_t + ((1 + \eta)u)_x = \frac{1}{6} u_{xxx} \end{cases}$$

par Long (1964) et Broer(1964).

Long:J.Fluid Mech.,20,p.161, Broer:Appl.Sci.Res.,11

$$u_t + u_x + \frac{3}{2} uu_x = \frac{1}{6} u_{xxt}, \quad \eta = u + O(\delta^2)$$

par Peregrine, en 1966.

Peregrine:J. Fluid.Mech., 25, p.321

Problème III Peut-on donner une justification mathématique pour l'équation de Boussinesq ou de Korteweg-de Vries etc ?

4. On considère dans ce qui suit ces trois problèmes et nos résultats , jusqu'ici, sont:

I. L'existence de solution analytique, localement par rapport au temps.

II. La solution du problème de Cauchy (1.1)-(1.2) est indéfiniment différentiable par rapport à  $\delta^2$ . Le développement de Friedrichs est asymptotique par rapport à  $\delta^2 < \delta_0^2$ .

III. On peut donner une justification mathématique pour l'équation des ondes en eau peu profonde,

l'équation de Boussinesq et celle de Korteweg-de Vries,  
pour les solutions analytiques, localement par rapport  
au temps.

## II. Problème de Cauchy (1.4) - (1.5).

5. Soit  $\bar{\Psi}$  la conjuguée complexe de  $\bar{\Phi}$ . Alors  
 $F = \bar{\Phi} + i\bar{\Psi}$  définit le potentiel complexe des  
vitesses: une fonction holomorphe de  $z = x + iy$   
pour  $(x, y) \in \Omega(t)$ . Soit  $z(t, \zeta) = x(t, \zeta) +$   
 $iy(t, \zeta)$  la représentation conforme de  $\Omega(t)$   
sur  $\Omega_h$  :

$$(5.1) \quad \Omega_h = \{ \zeta = \xi + i\eta, \xi \in \mathbb{R}, 0 < \eta < h \}$$

Soit encore  $f$  l'image de  $F$  par cette représentation:

$$(5.2) \quad f = f(t, \zeta) = F(t, z=z(t, \zeta)) = \varphi(t, \zeta) + i\psi(t, \zeta).$$

Alors la vitesse complexe  $s$  est

$$(5.3) \quad s = \frac{dF}{dz}(t, z=z(t, \zeta)) = f_{\zeta} / z_{\zeta}.$$

6. Une notion générale Soit  $\Omega_h$  une bande  
du plan complexe  $\zeta = \xi + i\eta$

$$(6.1) \quad \Omega_h = \left\{ \zeta = \xi + i\eta : \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 < \eta < h \right\}.$$

Considérons une fonction holomorphe  $w(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$  dans  $\Omega_h$  avec  $v(\xi, 0) = 0$ . Soit  $u(\xi) + iv(\xi) \equiv u(\xi, h) + iv(\xi, h)$  les valeurs au bord  $\eta = h$ . Alors on a:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} v(\xi_0) = A_h u(\xi_0) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2h} (\xi - \xi_0) u(\xi) d\xi \\ u(\xi_0) = B_h v(\xi_0) &= -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi}{2h} (\xi - \xi_0) v(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u_{\infty} + u_{-\infty}) \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{2} (u_{\infty} - u_{-\infty}) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) d\xi$$

ajoutant quelques conditions supplémentaires: condition de Hölder, sommabilité de  $v(\xi)$  etc.

Une autre expression de  $B_h$  nous sera utile:

$$\begin{aligned} u(\xi_0) = B_h v(\xi_0) &= -A_h v(\xi_0) + \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh \frac{\pi}{4h} (\xi - \xi_0)) v(\xi) d\xi + u_{-\infty} \\ &= -A_h v(\xi_0) + C_h v(\xi_0) + u_{-\infty} . \end{aligned}$$

7. Le problème de Cauchy (1.1)-(1.2) n'est autre que le problème de Cauchy pour les équations par rapport aux fonctions  $x(t, \xi + i\eta)$  et  $\varphi(t, \xi + i\eta)$  sur  $\gamma = h$  déduites de deux dernières équations de (1.1):

$$x_t = \frac{A_h x_\xi A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} - x_\xi B_h \left( \frac{A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} \right) \quad (7.1)$$

$$\varphi_t = -g A_h x + \frac{1}{2} \frac{(A_h \varphi_\xi)^2 - \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} - \varphi_\xi B_h \left( \frac{A_h \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_h x_\xi)^2} \right)$$

avec des données initiales

$$(7.2) \quad x(0, \xi) = \operatorname{Re} z(0, \xi + ih), \quad \varphi(0, \xi) = \varphi(0, z(0, \xi + ih)),$$

et enfin

$$(7.3) \quad y = A_h x, \quad \psi = A_h \varphi \quad .$$

On résout en effet le problème de Dirichlet pour  $\Delta f = 0$  sur  $\Omega_h$  et les images par cette représentation conforme  $z = z(t, \zeta)$  nous donnent les solutions cherchées.

8. Par la non-dimensionalisation telle que

$$(8.1) \quad \xi = \lambda \xi', \quad \eta = h \eta', \quad x = \lambda x', \quad y = h y', \quad t = \frac{\lambda}{c} t', \quad \varphi = c \lambda \varphi',$$

on a, en désignant  $h/\lambda$  par  $\delta$  et omettant le signe " , ", les équations suivantes correspondantes au problème de Cauchy non-dimensional (1.4)-(1.5):

$$(8.2) \quad y = \frac{1}{\delta} A_\delta x, \quad \psi = A_\delta \varphi \quad ,$$

$$x_t = \frac{A_\delta x_\xi A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - x_\xi B_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right)$$

(8.3)

$$\varphi_t = -\frac{1}{\delta} A_\delta x + \frac{1}{2} \frac{(A_\delta \varphi_\xi)^2 - \varphi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - \varphi_\xi B_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right)$$

On résoudra dans le prochain numéro le problème de Cauchy pour (8.3).

9. Soient  $u, v$  fonctions holomorphes dans une bande voisinage de l'axe réel  $\Omega_\rho = \{z = \xi + i\eta ; \xi \in \mathbb{R}, |\eta| < \rho\}$ . Soit  $B_{\sigma, \rho}$  l'espace de Banach muni de la norme

(des fonctions  $u$ )

$$|u|_{\sigma, \rho} = \sup_{\Omega_\rho} |u| + \sup_{|\eta| < \rho} \sup_{d > 0} \frac{|u(\xi + d + i\eta) - u(\xi + i\eta)|}{d^\sigma}$$

et  $L_\rho^\sigma$  l'espace de Banach des fonctions  $v$  muni de la norme

$$|v|_{L_\rho^\sigma} = \sup_{|\eta| < \rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi + i\eta)| d\xi + \sup_{|\eta| < \rho} \sup_{d > 0} \frac{1}{d^\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |v(\xi + d + i\eta) - v(\xi + i\eta)| d\xi$$

Soit enfin  $X$  une échelle des espaces de Banach:

$$X = \bigcup_{\rho > 0} X_\rho = \left\{ u: \text{holomorphes dans } \Omega_\rho \text{ avec } \|u\|_\rho = \max(|u|_{\sigma, \rho}, |u|_{L_\rho^\sigma}) \right\}.$$

Après une différentiation par rapport à  $\xi$ , on a une quasilinéarisation de (8.3):

$$(9.1) \quad \begin{aligned} v_t &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ w A_\delta v A_\delta u + v A_\delta (w A_\delta u) - v C_\delta (w A_\delta u) \right\} \\ u_t &= -\frac{1}{\delta} A_\delta v - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{w}{2} (u^2 - (A_\delta u)^2) - u A_\delta (w A_\delta u) + u C_\delta (w A_\delta u) \right\} \end{aligned}$$

où  $v = x_\xi$ ,  $u = \varphi_\xi$  et  $w = (v^2 + (A_\delta v)^2)^{-1}$ .

Lemme 9.1 Lorsque  $\delta$  tend vers zéro, on a

$$\frac{1}{\delta} A_\delta u \longrightarrow u_\xi, \quad \int C_\delta v \longrightarrow \int_{-\infty}^{\xi} v \, d\xi.$$

Lemme 9.2 Soient  $u$  et  $v \in X$ , il y a une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que:

$$\|A_\delta u\|_p \leq C \|u\|_p, \quad \left\| \frac{1}{\delta} A_\delta u \right\|_p \leq C \|u_\xi\|_p, \quad \left\| \int C_\delta v \right\|_p \leq C \|v\|_{L^p}.$$

Supposons que  $v(0, \xi), u(0, \xi) \in X_{p_0}$ ,  $p_0 > 0$  et que

$$(9.2) \quad \|v - v_-\|_{p_0} < \frac{R_0}{2}, \quad v_- > 0, \quad R_0 = \min \left\{ \frac{v_-}{4}, \frac{v_-}{4C^2} \right\}$$

avec la constante  $C$  dans le Lemme 9.2. Cette

hypothèse interdit le bas-fond sec. D'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski en version Nirenberg-Nishida :

Nirenberg: J.Diff.Geometry,6 ;Nishida:ibid,12,

on a le

Théorème 9.1 Supposons

$$\max \left\{ \|u(0) - u_-\|_{\rho_0}, \|v(0) - v_-\|_{\rho_0} \right\} = E_0 < R_0/2,$$

où  $(v_-, u_-) = \lim_{\delta \rightarrow -\infty} (v, u)$ , alors il existe une constante  $a$  positive, indépendante de  $\delta$ , telle qu'on ait une solution unique du problème de Cauchy pour (9.1) dans  $X_\delta$ , quel que soit  $\delta < \delta_0$ , pour  $|t| < a(\delta_0 - \delta)$  satisfaisant à

$$\|u(t) - u_-\|_\delta, \|v(t) - v_-\|_\delta < 2E_0.$$

Remarque Notons que  $w$  satisfait à

$$\|w - w_-\|_\delta < C \|v - v_-\|_\delta \text{ si } \|v - v_-\|_\delta < R_0.$$

### III. Développement asymptotique de Friedrichs et les équations des ondes en eau peu profonde

10. En appliquant encore le théorème de Cauchy-

Kowalevski aux équations par rapport à  $(\frac{\partial u}{\partial \delta}, \frac{\partial v}{\partial \delta})$ ,  $(\frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \delta^2})$  etc..., avec des estimations uniformes par rapport à  $\delta$  des termes non homogènes, on a le

Théorème 10.1 Les solutions  $v(t, \xi; \delta)$  et  $u(t, \xi; \delta)$  du théorème 9.1 sont indéfiniment différentiables par rapport à  $\delta$  dans  $X_{\rho}$ , quel que soit  $\rho' < \rho$ , pour  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ .

11. Puisque  $(v, u)(t, \xi) \rightarrow (v^0, u^0)(t, \xi)$  lorsque  $\delta$  tend vers zéro, on a de (8.2):

$$(11.1) \quad y^0 = x_{\xi}^0 = v^0, \quad \varphi_{\xi}^0 = u^0.$$

On a d'autre part

$$(11.2) \quad y = \frac{1}{\delta} A_{\delta} x = x_{\xi} + \frac{\delta^2}{3} x_{\xi\xi\xi} + o(\delta^4)$$

$$(11.3) \quad \begin{cases} x_t = -x \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi_{\xi\xi}}{x_{\xi}^2} d\xi + \delta^2 \{ \dots \} + o(\delta^4) \\ \varphi_t = -x_{\xi} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_{\xi}^2}{x_{\xi}^2} - \varphi_{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi_{\xi\xi}}{x_{\xi}^2} d\xi + \delta^2 \{ \dots \} + o(\delta^4) \end{cases}$$

D'où, pour  $\delta = 0$ , on a

$$(11.4) \quad \begin{aligned} y^0 &= x_{\xi}^0, \quad x_t^0 = -x_{\xi}^0 \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi_{\xi\xi}^0}{(x_{\xi}^0)^2} d\xi \\ \varphi_t^0 &= -x_{\xi}^0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_{\xi}^0}{x_{\xi}^0} \right)^2 - \varphi_{\xi}^0 \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\varphi_{\xi\xi}^0}{(x_{\xi}^0)^2} d\xi. \end{aligned}$$

Vu que  $v = x_\xi(t, \xi; \delta^2) > 0$ , on peut définir des fonctions images de  $y(t, \xi; \delta)$  et  $\varphi(t, \xi; \delta)$  par la représentation conforme  $z = z(t, \zeta)$  par:

$$\begin{aligned} \Gamma(t, x(t, \xi; \delta); \delta^2) &= y(t, \xi; \delta) \\ (11.5) \quad \Phi(t, x(t, \xi; \delta); \delta^2) &= \Phi(t, x(t, \xi; \delta), \delta \Gamma(t, x; \delta^2); \delta^2) = \\ &= \varphi(t, \xi; \delta). \end{aligned}$$

S'appuyant sur le théorème 10.1, lorsque  $\delta$  tend vers zéro, on a

$$\Gamma^0(t, x^0(t, \xi)) = y^0(t, \xi)$$

$$\Phi^0(t, x^0(t, \xi)) = \varphi^0(t, \xi).$$

#### Théorème 11.1

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x)^2 + \Gamma &= \frac{1}{2} \delta^2 (\Gamma \phi_{xx})^2 + o(\delta^4) \\ (11.6) \quad \Gamma_t + (\phi_x \Gamma)_x &= -\frac{1}{3} \delta^2 (\Gamma^3 \phi_{xx})_{xx} + o(\delta^4). \end{aligned}$$

Pour  $\delta = 0$ , (11.6) donne les équations des ondes

en eau peu profonde:

Corollaire (Equations des ondes en eau peu profonde)

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \phi_t^0 + \frac{1}{2} (\phi_x^0)^2 + \Gamma^0 &= 0 \\ \Gamma_t^0 + (\Gamma^0 \phi_x^0)_x &= 0 \end{aligned}$$

12. Vu les propriétés des espaces  $\{X_p\}$ , on voit que  $\varphi(t, \xi, \delta\eta; \delta^2)$  peut être prolongée pour  $1 < \eta < 1+a_p$ ,  $a_p$  n'étant pas dépendante de  $\xi, \delta$  comme la partie réelle d'une fonction holomorphe de  $\xi + i\delta\eta$ , qui l'est déjà pour  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \eta < 1$ . De même,  $x(t, \xi, \delta\eta; \delta^2)$  est prolongeable comme la partie réelle de  $x + i\delta y$  une fonction holomorphe de  $\xi + i\delta\eta$ . D'où,  $\phi(t, x; \delta^2)$  définie par (11.5) est la valeur sur  $\Gamma(t, x; \delta^2)$  d'une fonction harmonique  $\phi(t, x, \delta y; \delta^2)$  dans un domaine  $(de(x, \delta y))$  qui contient un voisinage de  $(x, \Gamma(t, x; \delta^2))$ ,  $\delta$  petit.

Quel que soit  $\delta$ ,  $\delta < \delta_0$ , on peut développer  $\Phi(t, x, \delta\Gamma(t, x; \delta); \delta^2)$  en série:

$$(12.1) \quad \Phi(t, x, \delta\Gamma; \delta^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\delta\Gamma)^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \Phi_0(t, x; \delta^2),$$

où  $\Phi_0(t, x; \delta^2)$  est la valeur du potentiel au fond de l'eau défini par:

$$(12.2) \quad \Phi_0(t, x(t, \xi, 0; \delta^2), 0; \delta^2) = \varphi(t, \xi, 0; \delta^2).$$

Théorème 12.1 (Développement de Friedrichs)

Potentiel  $\Phi$  et la frontière libre  $\Gamma$  ont des développements asymptotiques par rapport à  $\delta^2$  pour  $\delta$  petit:

$$\Gamma \sim \gamma_0(t, x) + \delta^2 \gamma_1(t, x) + \delta^4 \gamma_2(t, x) + \dots$$

$$\Phi \sim \phi_0(t, x) + \delta^2 \phi_1(t, x) + \delta^4 \phi_2(t, x) + \dots$$

dont les coefficients  $\gamma_n$  et  $\phi_n$  sont des solutions d'un système linéaire hyperbolique non-homogène pour  $n \geq 1$ :

$$\begin{cases} \phi_{nt} + \phi_{ox} \phi_{nx} + \gamma_n = f_{n-1} \\ \gamma_{nt} + (\gamma_0 \phi_{nx} + \phi_{ox} \gamma_n)_x = g_{n-1} \end{cases}$$

et pour  $n = 0$  les solutions des équations des ondes en eau peu profonde,  $f_{n-1}$  et  $g_{n-1}$  étant fonctions

de  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$  ainsi que leur dérivées par rapport à  $x$ .

#### IV. Equation de Boussinesq

13. Nous avons considéré jusqu'ici des ondes longues de surface, <sup>(dont les ampleurs)</sup> ne sont pas nécessairement petites comparées à la profondeur de l'eau. Nous avons seulement interdit le bas-fond sec. Nous allons maintenant considérer des ondes d'ampleur petite mais finie. Soit  $a$  l'ampleur des ondes. On considère une non-dimensionalisation de (1.1) quelque peu différente de (1.3):

$$(13.1) \quad y - h = ay^1, \text{ i.e. } y' = 1 + \frac{a}{h} y^1 \equiv 1 + \varepsilon y^1$$

En accord avec (13.1), on définit les autres quantités non-dimensionnelles par:

$$(13.2) \quad y = \eta + \varepsilon y^1, \quad x = \xi + \varepsilon x^1, \quad \varphi = -t + \varepsilon \varphi^1$$

pour  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq \eta \leq 1$ , et

$$(13.3) \quad \Gamma = 1 + \varepsilon \gamma, \quad \Phi = -t + \varepsilon \phi$$

Le même raisonnement que dans le numéro 8 nous donne les équations auxquelles satisfont  $x^1$  et  $\varphi^1$ :

$$\begin{aligned}
 (13.4) \quad x_t^1 &= \frac{\varepsilon A_\delta x_\xi^1 A_\delta \varphi_\xi^1}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} + (1+\varepsilon x_\xi^1) A_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi^1}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} \right) - \\
 &\quad - (1+\varepsilon x_\xi^1) C_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi^1}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} \right) \\
 \varphi_t^1 &= -\frac{1}{\delta} A_\delta x^1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(A_\delta \varphi_\xi^1)^2 - (\varphi_\xi^1)^2}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} - \varepsilon \varphi_\xi^1 A_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi^1}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} \right) - \\
 &\quad - \varepsilon \varphi_\xi^1 C_\delta \left( \frac{A_\delta \varphi_\xi^1}{(1+\varepsilon x_\xi^1)^2 + \varepsilon^2 (A_\delta x_\xi^1)^2} \right)
 \end{aligned}$$

en posant  $\delta^2 = \varepsilon$  : une condition qui détermine des circonstances physiques. Avec  $y^1 = \frac{1}{\delta} A_\delta x^1$ ,  $\psi^1 = A_\delta \varphi^1$ .

14. On définit  $\gamma(t, x; \varepsilon)$  et  $\phi(t, x; \varepsilon)$  par

$$\begin{aligned}
 (14.1) \quad \gamma(t, \xi + \varepsilon x^1(t, \xi; \varepsilon); \varepsilon) &= y^1(t, \xi; \varepsilon) \\
 \phi(t, \xi + \varepsilon x^1(t, \xi; \varepsilon); \varepsilon) &= \varphi^1(t, \xi; \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Alors elles satisfont à

$$\begin{aligned}
 (14.2) \quad \phi_t + \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \phi_x^2 &= O(\varepsilon^2) \\
 \gamma_t + \phi_{xx} + \varepsilon(\gamma \phi_x)_x + \frac{\varepsilon}{3} \phi_{xxxx} &= O(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(14.3) \quad \phi_{tt} = \phi_{xx} - \frac{\varepsilon}{2} (\phi_x^2)_t - \varepsilon (\phi_t \phi_x)_x + \frac{\varepsilon}{3} \phi_{xxxx} + O(\varepsilon^2).$$

Si on suppose ici:  $\partial_t = \partial_x + O(\varepsilon)$ , ou une propagation dans une seule direction, on réduit de (14.3):

$$(14.4) \quad \phi_{tt} = \phi_{xx} + \frac{3}{2} \varepsilon (\phi_x^2)_x + \frac{\varepsilon}{3} \phi_{xxxx} ;$$

ou encore

$$(14.5) \quad \gamma_{tt} = \gamma_{xx} + \frac{3}{2} \varepsilon (\gamma^2)_{xx} + \frac{\varepsilon}{3} \gamma_{xxxx}$$

en supposant que  $\phi_x = \gamma + O(\varepsilon)$  comme l'a fait Boussinesq :

J. Boussinesq: J. Math. Pures Appl., t. 17 (1872)

Mais la relation linéaire de dispersion pour (14.4) n'est pas bonne et il serait difficile de montrer oui ou non si les solutions de (14.4) donnent une approximation pour les solutions de (14.3).

15. On va essayer maintenant d'obtenir une équation "correcte" de Boussinesq, c'est-à-dire une équation non-linéaire de seconde ordre par rapport à  $t$  qui fournit une bonne approximation de solution de (14.3).

1°. Notons en premier lieu que l'équation de  $(\gamma, \phi)$  d'ordre  $\varepsilon^2$  rejetant les termes d'ordres  $O(\varepsilon^3)$  a une bonne relation linéaire de dispersion. Il est à noter ici que ce développement n'est pas le développement de Friedrichs, mais il s'agit au fait du développement des opérateurs  $A_\delta$  et  $C_\delta$ .

2°. Suivant à l'esprit de Boussinesq, récrivons (14.2) explicitant la valeur du potentiel au fond de l'eau:  $\phi_0(t, x; \varepsilon)$ . D'après (12.1) et (14.2) on a

$$\begin{aligned} \phi_{0,t} + \gamma + \frac{\varepsilon}{2} (\phi_{0,x})^2 &= \frac{\varepsilon}{2} \phi_{0,txx} + O(\varepsilon^2) \\ \gamma_t + \phi_{0,xx} + \varepsilon (\gamma \phi_{0,x})_x &= \frac{\varepsilon}{6} \phi_{0,xxxx} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (15.1)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \phi_{0,tt} &= \phi_{0,xx} - \frac{\varepsilon}{2} (\phi_{0,x}^2)_t - \varepsilon (\phi_{0,t} \phi_{0,x})_x + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \phi_{0,ttxx} - \frac{\varepsilon}{6} \phi_{0,xxxx} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Or le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski montre le

Théorème 15.1 Si  $f(0,x)$  et  $f_t(0,x) \in X_{\rho_0}$ ,  $\rho_0 > 0$ , le problème de Cauchy pour

$$(15.3) \quad f_{tt} = f_{xx} - \frac{\varepsilon}{2} (f_x^2)_t - \varepsilon (f_t f_x)_x + \frac{\varepsilon}{2} f_{ttxx} - \frac{\varepsilon}{6} f_{xxxx}$$

admet la solution unique dans  $X_\rho$ , quel que soit  $\rho < \rho_0$ , pour  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ ,  $\exists a > 0$ .

Le même théorème montre que la solution  $u \in X_\rho$  de l'équation

$$u(t) = u_0(t) + \int_0^t F(t,s;u(s)) ds$$

dépende continûment des données initiales et de second membre au sens de norme:

$$M_1[u] = \sup_{\substack{0 \leq \rho < \rho_1 \\ 0 \leq t < a(\rho_1 - \rho)}} \|u(t)\|_\rho \left(1 - \frac{t}{a(\rho_1 - \rho)}\right), \quad \forall \rho_1 < \rho_0.$$

D'où on a le

Théorème 15.2 Soient  $\phi_0(0,x) = f(0,x)$  et  $\phi_{0,t}(0,x) = f_t(0,x) \in X_{\rho_0}$ ,  $\rho_0 > 0$ , alors, quel que soit  $\rho < \rho_0$ , on a

$$(15.4) \quad \|\phi_0 - f\|_{\rho} = O(\varepsilon^2).$$

Remarque Vu les propriétés des espaces  $\{X_{\rho}\}$ , on voit que (15.4) montre que, quel que soit  $m$  un entier positif,  $(\partial^m/\partial x^m)\phi_0$  ne diffère de  $(\partial^m/\partial x^m)f$  que de terme d'ordre  $O(\varepsilon^2)$  dans  $\{X_{\rho}\}$ . En effet

$$\|\phi_{0,x} - f_x\|_{\rho'} < \frac{1}{\rho - \rho'} \|\phi_0 - f\|_{\rho}$$

$$\forall \rho' < \rho.$$

Compte tenu des théorèmes 15.1 - 2, il nous semble raisonnable d'appeller (15.3) l'équation de Boussinesq.

Remarque Notons qu'on peut montrer que (15.3) admet une solution globale par rapport au temps dans un espace de Sobolev, vu les estimations a priori telles que

$$\sup_t \|f_t\|_1, \sup_t \|f_x\|_1 < M,$$

etc.

# V. Equation de Korteweg - de Vries

16. Considérons des ondes de surface de l'eau qui s'écoule d'une vitesse constante  $\alpha$ .

Une considération telle que celle dans les n<sup>os</sup> 13-14 pour

$$(16.1) \quad x = \xi + \varepsilon x^1, \quad y = 1 + \varepsilon y^1, \quad \varphi = -t + \alpha \xi + \varepsilon \varphi^1$$

et

$$(16.2) \quad \Phi = -t + \alpha x + \varepsilon \phi, \quad \Gamma = 1 + \varepsilon \gamma,$$

nous emmène à

$$(16.3) \quad \begin{aligned} u_t + \alpha u_x + \gamma_x + \varepsilon u u_x &= O(\varepsilon^2) \\ \gamma_t + \alpha \gamma_x + u_x + \frac{\varepsilon}{3} u_{xxx} + \varepsilon (\gamma u)_x &= O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où  $u = \phi_x$ .

Une diagonalisation de (16.3) par

$$(16.4) \quad \gamma - u = \gamma - \phi_x = 2g, \quad \gamma + u = \gamma + \phi_x = 2f,$$

nous donne:

$$(16.5) \quad g_t + (\alpha - 1)g_x - \frac{\varepsilon}{6} g_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon g g_x = O(\varepsilon^2)$$

et

$$(16.6) \quad f_t + (\alpha + 1)f_x + \frac{\varepsilon}{6} f_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon f f_x = O(\varepsilon),$$

si on résout (13.4) correspondante à (16.1) avec

$$\gamma(0, x) - \phi_x(0, x) = 2g(0, x) = O(1),$$

$$\gamma(0, x) + \phi_x(0, x) = 2f(0, x) = O(\varepsilon).$$

17. Soit  $G$  une solution de l'équation de Korteweg-de Vries:

$$(17.1) \quad G_t + (\alpha - 1)G_x - \frac{\varepsilon}{6} G_{xxx} - \frac{3}{2}\varepsilon G G_x = 0.$$

On sait que (17.1) admet une soliton solution si  $\alpha - 1 > 0$ :

Korteweg-deVries: Phil. Magaz. Ser. 5, Vol. 39, n° 240  
(1895), p. 429.

D'autre part, d'après le théorème abstrait non-

linéaire de Cauchy-Kowalevski, on montre que (17.1) admet la solution unique dans  $B_\varrho$ ,  $\varrho < \varrho_0$ , pour  $|t| < a(\varrho_0 - \varrho)$ :

$$(17.2) \quad B_\varrho \equiv \left\{ \begin{array}{l} u: \text{holomorphes dans} \\ \Omega_\varrho = \{z=x+iy, x \in \mathbb{R}, |y| < \varrho\}, \\ \text{avec } \|\hat{u} e^{\varrho|k|}\|_{L^2} < +\infty \end{array} \right\},$$

où  $\hat{u} e^{\varrho k}$  est la transformée de Fourier de  $u(z)$ , si  $u(0,x) \in B_{\varrho_0}$ . D'où

Théorème 17.1 Pour  $\varepsilon$  petit

$$(17.3) \quad \|G - g\|_{L^2} = O(\varepsilon^2).$$

18. D'après le même raisonnement pour (16.6) et pour

$$(18.1) \quad F_t + (\alpha + 1)F_x + \frac{\varepsilon}{6} F_{xxx} + \frac{3}{2}\varepsilon FF_x = 0$$

on voit que

$$(18.2) \quad \|F - f\|_{L^2} = O(\varepsilon).$$

D'où, on a le

Théorème 18.1

$$(18.3) \quad \|\gamma - (F+G)\|_{L^2} = O(\varepsilon), \quad \|\phi_x - (G-F)\|_{L^2} = O(\varepsilon).$$

19. Par le même raisonnement que pour dériver (15.1)-(15.2), on déduit de (16.3): (celui)

$$(19.1) \quad \begin{aligned} \gamma_t + \alpha \gamma_x + v_x - \frac{\varepsilon}{6} v_{xxx} + \varepsilon (\gamma v)_x &= O(\varepsilon^2) \\ v_t + \gamma_x + \alpha v_x - \frac{\alpha}{2} \varepsilon v_{xxx} - \frac{\varepsilon}{2} v_{xxt} + \varepsilon v v_x &= O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où  $v = \phi_{0,x}$ .

D'où, en accord avec (16.5) - (16.6):

$$(19.2) \quad m_t + (\alpha - 1)m_x - \frac{3\alpha - 1}{12} \varepsilon m_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} m_{xxt} - \frac{3}{2} \varepsilon m m_x = O(\varepsilon^2)$$

$$(19.3) \quad n_t + (\alpha + 1)n_x - \frac{3\alpha + 1}{12} \varepsilon n_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} n_{xxt} + \frac{3}{2} \varepsilon n n_x = O(\varepsilon).$$

On voit que le problème de Cauchy pour

$$(19.4) \quad M_t + (\alpha - 1)M_x - \frac{3\alpha - 1}{12} \varepsilon M_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} M_{xxt} - \frac{3}{2} \varepsilon M M_x = 0$$

admet une solution dans  $X_p$  si les données initiales

sont dans  $X_{\rho_0}$ ,  $\forall \rho < \rho_0$ . De même pour

$$(19.5) \quad N_t + (\alpha+1)N_x - \frac{3\alpha+1}{12} \varepsilon N_{xxx} - \frac{\varepsilon}{4} N_{xxt} + \frac{3}{2} \varepsilon NN_x = 0.$$

Théorème 19.1 Pour  $\varepsilon$  petit, on voit

$$(19.6) \quad \|M - m\|_{\varepsilon} = O(\varepsilon^2), \quad \|N - n\|_{\varepsilon} = O(\varepsilon).$$

20. Nous nous proposons d'appeller (19.4) l'équation de BP, en hommage à Broer et Peregrine qui, nous semble-t-il, ont mentionné pour la première fois une telle équation:

Peregrine: loc cit; Broer: loc cit.

Notons que (19.1) a une bonne relation linéaire de dispersion:

$$\lambda = -i\alpha\sigma \pm i\sigma \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{6}\sigma^2}{1 + \frac{\varepsilon}{2}\sigma^2}}$$

Nous pensons qu'il ne serait pas inutile de rappeler ici une "critique" de Kruskal envers Benjamin

à propos de préférence de  $u_{xxt}$  à  $u_{xxx}$ :

Kruskal: Lec.Note in Phys, t. 38(1974), Springer

Benjamin: Non-linear evolution equations, éd. Newell  
1974.

Bien que l'équation considérée par Benjamin- Bona- Mahony ( Phil. Trans.R.S.London, 1972) conserve des intérêts considérables propres à elle, du point de vue d' études des ondes de surface de l'eau, il ne nous semble pas très erroné de donner raison à Kruskal plutôt qu'à BBM, vu nos considérations de n<sup>os</sup> 17 - 19 qui nous a emmené à (19.4) - (19.5) qui sont aussi valables pour "les fréquences hautes" que pour "les fréquences basses".

21. Une remarque finale Une partie de ce travail a été publiée dans les deux Notes dans C.R.Acad.Sci. Paris, t.287, Ser. A, 1978, et sera publiée dans J. Math. Univ. Kyoto en 1979. Le rest sera publié dans les Notes en préparation.