

商特異点を持つホモロジー平面について

阪大理 宮西 正宜

京大理 杉元 徹

§ 1. 序

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異代数曲面とする。 X のホモロジー群 $H_i(X, \mathbb{Z})$ が $i \geq 1$ に対して自明である時、 X をホモロジー平面という。我々は、昨年の城崎シンポジウムで、ホモロジー平面についてこれまで知られていた結果を紹介し、同時に小平次元 $K=2$ のホモロジー平面の、新しい無限個の例を構成した。またホモロジー平面の研究は、 $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への代数的な作用の *linearization* の問題と関連し、特に次の Petrie の予想を解決することが我々の目標であった。

Homology plane conjecture 自明でない、有限位数の自己同型を持つホモロジー平面は、 $\mathbb{C}^2$ に同型である。

さて、我々は、ホモロジー平面の概念を少し拡張し、 $H_i(X; \mathbb{Q}) = 0$ ($\forall i \geq 1$) のとき、 X を $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面という。

また、 X が高々商特異点のみを持つ正規曲面で、 $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ のとき、 $\log$ -ホモロジー平面、 $H_1(X; \mathbb{Q}) = 0$ の時、 $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面という。 $K=0$ の $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は、藤田氏によって分類されており、その中には自明でない自己同型を持つものが存在する。また、 X がホモロジー平面で有限位数の自己同型を持てば、 X/σ は $\log$ -ホモロジー平面になる。以上の様な理由から、我々は考える対象を広げて $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面の分類 ($K \leq 1$ のケース) や例の構成 ($K=2$ のケース) を行なう。但し、 X が正規曲面の時、 $K(X) := K(X - \text{Sing } X)$ で定義する。一般に、 $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は有理曲面になるかどうか、わかっていない。

§2 では、 $K \leq 1$ の時を考察し、まず $K=-\infty$ の $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面の構造を決定する。 $K=0$ の $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は藤田氏によって分類されているが、特異点を持つ場合はよくわからない。次に $K=1$ の時、 $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ $\log$ -ホモロジー平面を決定する。

§3 では、 $K=2$ の時を扱がい、我々は例として、 $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面を考える。その構成方法を具体的に書くことができるか、その中に自明でない自己同型を持つものが存在し、しかもその曲面は可縮である。従って、前掲の Petrie の予想は、(ホモロジー平面を可縮代数曲

面とおきかえても), 成立しないことがわかり, $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への作用の *linearization* の問題に対する Kraft らのプログラムは, 有効でなくなった。

また, 昨年の城崎シンポジウムで, *Potrie* によって, $K=1$ のホモロジー平面に対しては, 彼の予想は証明されているということを報告したが, 実は誤解があったようで, 彼の証明は, 可縮曲面に対してしか通用しない。実際, 任意の標数 p に対して $K(X)=1$ のホモロジー平面で, $\mathbb{Z}/2p+1$ が作用するものが存在する。

linearization の問題は一般の *reductive* 群の $\mathbb{C}^n$ への作用についても考えることができるが, $SL_2(\mathbb{C})$ などについては *linearizable* でない作用の例が最近 *Schwartz* によって与えられた。しかし, $\mathbb{C}^*$ や有限アーベル群については未解決である。

§. 2. $K \leq 1$ の *log*-ホモロジー平面.

いつものように, X を正規射影平面 V の中に埋め込み, $D = V - X$ とした時, V は D にそって非特異かつ D は高々単純正規交叉の因子とする。 $f: W \rightarrow V$ を V の特異点の極小特異点解消, $Y := f^{-1}(X)$, $\varphi := f|_Y$, $Z = \text{Sing } X$, $\Delta = f^{-1}(Z)$ とおく。この時, 次の補題が成り立つ。

補題 1. (1) X を $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面とする。

$\Rightarrow q(W) = p_g(W) = 0$. D は単連結で X はアフィン曲面。

(2) X を非特異有理曲面, $X = V - D$ とおき次の条件を仮定する。

(a) D は連結かつ単連結

(b) $H^2(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(D; \mathbb{Q})$ は同型。

この時、 X は $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面になり、次の同型が成り立つ。

$$\text{Pic}(X) = H_1(X; \mathbb{Z}) = \text{Coker}(H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Z}))$$

さらに $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ が成り立つならば、 X はホモロジー平面である。

(3) X を有理 $\log$ 曲面 (高々商特異点しかもたない正規曲面) で次の条件をみたすと仮定する。

(a) D は連結かつ単連結

(b) $H^2(W; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(D \cup \Delta, \mathbb{Q})$ は同型。

この時、 X は $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面になり、次が成り立つ。

$$0 \rightarrow H_1(\partial T; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X^\circ; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \text{ は exact,}$$

$$H_1(X^\circ; \mathbb{Z}) = \text{Pic}(W - D - \Delta) = \text{Coker}(H_2(D \cup \Delta; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(W; \mathbb{Z}))$$

但し、ここで $X^\circ = X - \Sigma$,

$\partial T =$ 特異点の閉近傍の境界の union

である。

さらに $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ が成り立てば、 X は $\log$ -ホモロジー平面。

証) (2)の略証を与える。まず次の $\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー完全係列を考える。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(V; D) \rightarrow H^0(V) \rightarrow H^0(D) \rightarrow H^1(V; D) \rightarrow H^1(V) \rightarrow H^1(D) \\ \rightarrow H^2(V, D) \rightarrow H^2(V) \rightarrow H^2(D) \rightarrow H^3(V, D) \rightarrow H^3(V) \rightarrow 0 \\ \rightarrow H^4(V, D) \rightarrow H^4(V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

仮定より $H^1(V) = H^1(D) = H^3(V) = 0$ 。これと双対定理から、

$$H_4(X; \mathbb{Z}) = H^0(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

$$H_3(X; \mathbb{Z}) = H^1(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

$$H_2(X; \mathbb{Z}) = H^2(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

(10) と $H^2(V; \mathbb{Z})$ が free であることによる。)

$$H_1(X; \mathbb{Z}) = H^3(V, D; \mathbb{Z}) = \text{Coker}(H^2(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D; \mathbb{Z}))$$

特に $H_1(X, \mathbb{Z})$ は有限群である。また、

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &= H^2(X, \mathbb{Z}) \\ &= \text{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}^1(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &\cong H_1(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

§1で述べたように、log 曲面の小平次元を $\kappa(X) := \kappa(X - \text{Sing}(X))$ で定義する。

Case $\kappa = -\infty$ $\kappa(X) = -\infty$ の log ホモロジー平面について次の事柄が成り立つ。

定理 1. X を $K(X) = -\infty$ の $\log$ -ホモロジー平面とすると、 X は次のどれかに同型である。

(1) $\mathbb{C}^2$

(2) $\mathbb{C}^2/G$: G は $GL(2, \mathbb{C})$ の small 有限部分群.

(3) X は $\mathbb{C}$ -ファイバー空間 $p: X \rightarrow \mathbb{C}$ の構造を持ち、 p のファイバーはすべて既約、 $H_1, \dots, H_n$ を p の multiple fibers の全体で、その重複度を $d_1, \dots, d_n$ とすると、各ファイバー H_i 上に位数 d_i の巡回特異点が丁度一個ずつ存在する。

(1), (2), (3) に属する曲面は、いずれも可縮曲面である。

証) 宮西-角田の non-contractible boundary を持つ、開曲面に対する構造定理によると、 X に対して次の二つのケースのいずれかが成り立つことがわかる。

(I). X は A^1 -ファイバー空間の構造を持つ。

または、

(II). X° の Zariski 開集合 U と、 U から T' への固有双有理写像 $\phi: U \rightarrow T'$ が存在して次が成り立つ。

(1) $U = X^\circ$ か、 $X^\circ - U$ は純一次元。

(2) T' は $T := \mathbb{C}^2/G - \{0\}$ の開集合で $\dim(T - T') \leq 0$ 。

以下 (II) のケースを考える。 X は アフィン曲面であるから、

特に、 ϕ は同型になる。従って、

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X^*) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^* = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^* = \mathbb{C}^*$$

いま、 $X^\circ - U$ が純一次元であるとし、 $X^\circ - U = G_1 \cup \dots \cup G_s$ を既約成分への分解とすると、

$$m(\bar{G}_1 + \dots + \bar{G}_s) \sim_{\text{linear equiv}} F \quad \text{Supp } F \subseteq V - X$$

となる、正数 m 、正因子 F が存在し、このことは V 上の、定数でない関数 f で、 U 上で可逆になるものが存在することを意味する。これは矛盾。よって、 $X^\circ = U$ 、従って、

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'}) \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \simeq \Gamma(\mathbb{C}^2/G, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/G})$$

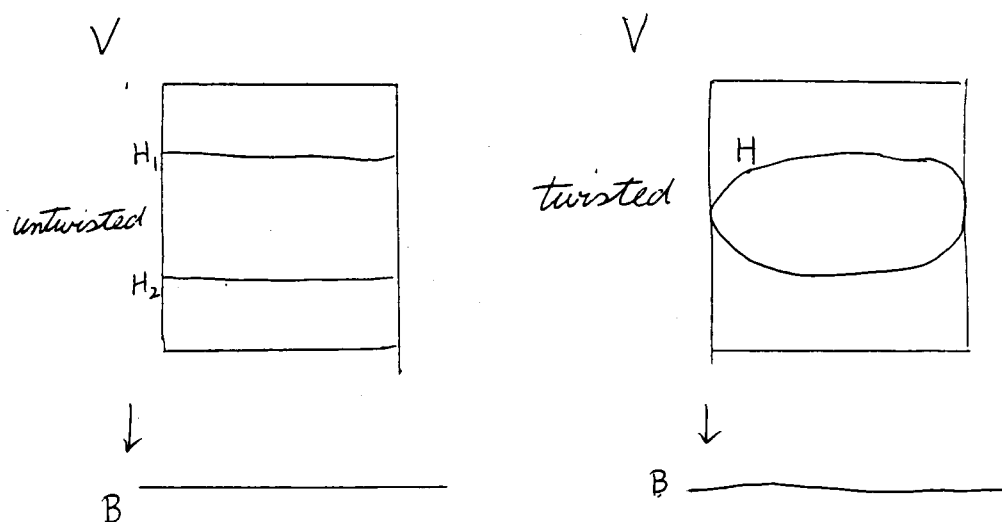
$$\therefore X \simeq \mathbb{C}^2/G.$$

(1) の時は、補題 1 を使って、(3) の主張を得る。 $\log$ ホモロジー平面についても、同様の結果を得る。

Case $K=0$ $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は藤田氏によって分類されている。特にホモロジー平面は存在しない。また藤田氏の記号で $H[k, -k]$, $\gamma\{3, 3, 3\}$ は自明でない自己同型を持つ。特異点を持つ場合はよくわからない。 $K=0$ の $\log$ ホモロジー平面が存在するかどうか、わかっていない。

Case $K=1$ 特異点のある場合、 $K=1$ でも $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空

間の構造を持つかどうかわかっていない。ここでは、 X が
 $\mathbb{C}^*$ -fibration $\pi: X \rightarrow C$ を持つと仮定する。また、コンパクト化 $X \hookrightarrow V$ は、 π の V への拡張 $p: V \rightarrow B$ が存在する様に
 選んでおく。 D の既約成分で、 p の一般のファイバー $p^{-1}(b)$
 $(b \in B)$ と交わるものの数は、2本以下であるが、丁度2本
 であるとき、*untwisted* 一本の時、*twisted* という。



次の3つのケースに分けて考える。

- (A) *untwisted* $C \simeq \mathbb{P}^1$
- (B) *twisted* $C \simeq A^1$
- (C) *untwisted* $C = A^1$

(以上で 全ての可能性が尽されている)

X を $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ $\log Q$ -ホモロジー平
 面とすると、次が成り立つ。ここでは、(A)、(B)のケースの結

果のみ述べる。(C)については論文参照。

Case (A) $F_0, \dots, F_n$ を π の特異ファイバーで、それぞれの重複度を $m_0, m_1, \dots, m_n$ とすると、 $(F_0)_{\text{red}} \simeq \mathbb{C}$, $(F_i)_{\text{red}} = \mathbb{C}^* (1 \leq i \leq n)$.

H_1 と H_2 を p の section で、 $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $(H_1^2) = -a$ ($a \geq 0$), $H_1, H_2 \subset D$ となるように選んでおく。 V の特異点解消 W から、

Hirzebruch 曲面 Σ_a への morphism $\sigma: W \rightarrow \Sigma_a$ で $\bar{H}_1 = \sigma(H_1)$ が minimal section になるものが存在する。 $\sigma^*(\bar{H}_2) = \sum \delta_i (\bar{F}_i)_{\text{red}} + \dots$ とする。但し $(\bar{F}_i)_{\text{red}}$ は $(F_i)_{\text{red}}$ の W 上の proper transform の閉包である。この時、次の事柄が成り立つ。

(1) $\kappa(X) = 1, 0, -\infty$

$$\Leftrightarrow (n-1) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} > 0, =, < 0.$$

(2) 特異点は存在すれば、 d 次の巡回商特異点が F_0 上に一個だけ存在する。 $H_i(X; \mathbb{Z})$ は有限群で、位数は

$$\frac{1}{a} |m_0 m_1 \dots m_n a - \sum_{i=0}^n m_0 \dots \hat{m}_i \dots m_n \delta_i|$$

但し、 $d|m_0$, $d|\delta_0$. さらに $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ ($i \geq 2$).

(3) X が可縮 $\Leftrightarrow a=1$, $m_0=d$, $n=2$, $m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$.

Case (B) H を D に含まれる p の 2-section とする。

(1) $p|_H: H \rightarrow B$ の分岐点を P_0, P_∞ , $Q_0 = p|_H(P_0)$, $Q_\infty = p|_H(P_\infty)$ とする。 $\bar{p}^*(Q_\infty) \subset D$ としよ。 $F_0 := \pi^*(Q_0) = m_0 C_0$, $C_0 \simeq \mathbb{A}^1$

と書けるが、 X が特異点を持つ時 C_0 は、

- (i) 一個の巡回商特異点か
- (ii) Dynkin タイプが D_r の商特異点か
- (iii) 2個の A_1 タイプの有理2重点

のいずれかを持つ。

(2) $F_i = m_i C_i$ ($1 \leq i \leq r$) を他の特異ファイバーとする時 $C_i \simeq \mathbb{C}^*$

(3) $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ ($i \geq 2$)

(ii), (iii) の時は $H_1(X, \mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$

(i) 又は X が非特異の時 $H_1(X, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}/m_0 \mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による extension.

(4) $\kappa(X) = 1, 0, -\infty$

$$\Leftrightarrow (r-1) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} > 0, = 0, \text{ or } < 0.$$

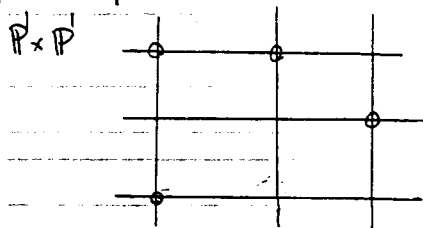
(5) 特に $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow \kappa(X) = -\infty$.

§.3. $\kappa=2$ の $\log$ ホモロジ-平面の例

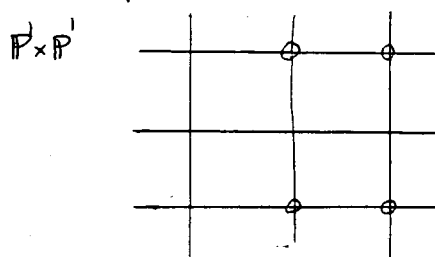
この節では $\mathbb{C}^{**} (= \mathbb{C} - \{2 \text{ 点}\})$ -ファイバー空間の構造を持つ $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面を考える。 $\kappa(\mathbb{C}^{**}) = 1$ であるので、このタイプの $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面は $\kappa=2$ になる可能性がある。明らかに、 $\mathbb{C}$ -ないし $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ場合を除くと、 $\mathbb{C}^{**}$ -ファイバー空間の構造を持つ $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面は、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ または F_1 上の曲線の次の様な配置から

得られることがわかる。

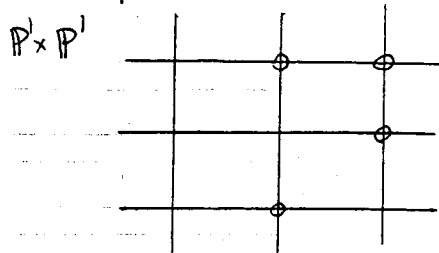
Type(UP_{3-1})



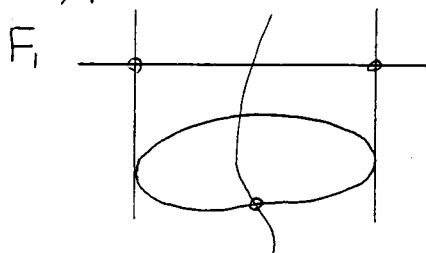
Type(UC_{2-1})



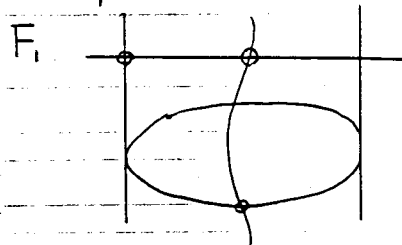
Type(UC_{2-1}')



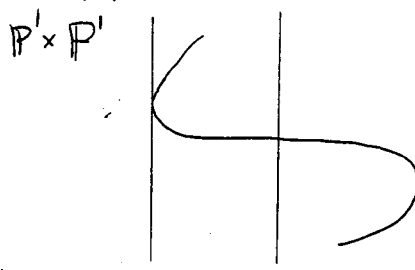
Type(TP_2)



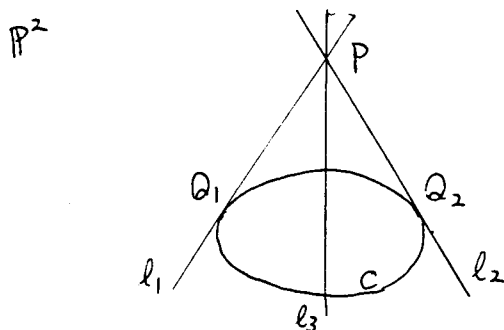
Type(TC_{2-1})



Type($T3C_2$)



ここでは Type(TP_2) を説明する。まず、 P^2 上の次の様な
曲線の配置から出発する。



(X_0, X_1, X_2) を $\mathbb{P}^2$ の斉次座標とするとき、 l_1, l_2, l_3, C は次式で定義される直線及び曲線である。

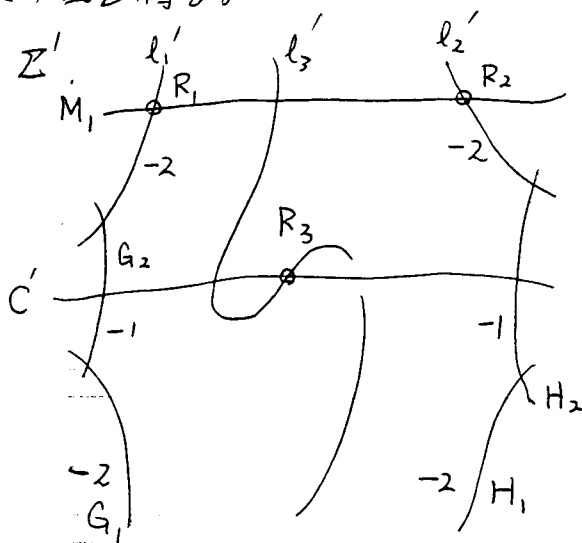
$$l_1: X_1 + X_0 = 0$$

$$l_2: X_1 - X_0 = 0$$

$$l_3: X_1 = 0$$

$$C: X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$$

$\mathbb{P}^2$ の P を中心とする *blowing-up* によって最初の図を得るが、さらに $C \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ の *total transform* が単純正規交叉になる様に、 Q_1, Q_2 をそれぞれ 2 回ずつ *blowing-up* して次の図を得る。



M_1 は P の *blowing-up* によって得られる (-1) curve.

続いて単連結な boundary divisor を得るために、 R_1, R_2, R_3 及びその infinitely near points を中心として blowing-up を繰り返して、その合成を $\sigma: V \rightarrow \Sigma'$ とする。但し blowing-up は $\sigma^{-1}(R_i)$ がそれぞれ (-1) curve を一個ずつ含み、その (-1) curve を E_i ($1 \leq i \leq 3$) とした時、 $D = \sigma^{-1}(M_1 + C' + l_1' + l_2' + l_3' + G_1 + G_2 + H_1 + H_2)_{\text{red}} - (E_1 + E_2 + E_3)$ が単連結になる様に選ぶ。 $X := V - D$ とおくと補題 1 により X は $\mathbb{Q}$ -ホモロジイ - 平面になる。また、

$$\sigma^*(l_i') \sim u_i E_i + (\text{other components})$$

$$\sigma^*(M_1) \sim v_1 E_1 + v_2 E_2 + (\text{other components})$$

$$\sigma^*(C') \sim w_3 E_3 + \dots$$

とおくと、 $l_1' + G_1 + 2G_2 \sim l_2' + H_1 + 2H_2 \sim l_3'$ かつ $2M_1 + 2l_3' \sim C' + \dots$ より、 $H_1(X, \mathbb{Z})$ は次の関係式をみたす $\xi_i := E_i$ で生成される。

$$u_1 \xi_1 - u_2 \xi_2 = 0$$

$$u_2 \xi_2 - u_3 \xi_3 = 0$$

$$2v_1 \xi_1 + 2v_2 \xi_2 + (2u_3 - w_3) \xi_3 = 0$$

従って、 $H_1(X, \mathbb{Z})$ の位数は、 $|d|$ に等しい。但し

$$d = u_1 u_2 (2u_3 - w_3) + 2u_2 u_3 v_1 + 2u_1 u_3 v_2$$

特に $d = \pm 1$ は、例えば次の様な整数解を持つ。

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = m, \quad v_1 = v_2 = n, \quad w_3 = 2m + 4mn \pm 1 \quad (m, n \geq 1)$$

また、上の整数値に対して $K(X)=2$ を示すこともできる。これで、 $K=2$ の $\mathbb{C}^{*+}$ -ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面の系列を得た。しかも、このホモロジー平面は可縮である。

$\mathbb{P}^2$ の involution $\hat{\tau}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を $(X_0: X_1: X_2) \mapsto (X_0: -X_1: X_2)$ で定義すると $\hat{\tau}$ は V の involution $\hat{\tau}: V \rightarrow V$ を与え、 $\hat{\tau}(D) \neq D$ をみたす。よって $\hat{\tau}|_X$ は X の自明でない involution になり Homology plane conjecture の反例を与える。

残りのケースのうち、 (UP_{3-1}) , (UC_{2-1}) のタイプには、 $K=2$ のホモロジー平面が存在するが、残りのタイプには $\emptyset$ -ホモロジー平面しか存在しない。

§ 4. Some remarks

(I). $K=1$ のホモロジー平面で 自明でない自己同型を持つものが存在する。次の定理が成り立つ。

定理. 任意の素数 $p \neq 2$ に対して、 $K=1$ のホモロジー平面 $X_m^{(p)}$ で $\mathbb{Z}/m$ が作用するものが存在する、但しここで

$$m = \begin{cases} 2, 2r+1, \text{ or } 4r+1 & \text{if } p=4r+1 \text{ である,} \\ 2, 2r+1 \text{ or } 4r+3 & \text{if } p=4r+3 \end{cases}$$

(II) 代数群の $\mathbb{C}^N$ への作用の *linearization problem* は一般の *reductive* な代数群に対しても考えることができるが、Schwartz は $O_2 = \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{Z}/2$ の $\mathbb{C}^4$ への作用及び SL_2 の $\mathbb{C}^3$ への作用で *linearizable* でない例を与えた。梶田氏らによって、この例から有限群の作用で *linearizable* でない例も構成されている。一対アーベル群 $\mathbb{C}^*$ や $\mathbb{Z}/m$ の $\mathbb{C}^N$ への作用については、 $N \geq 3$ の時未解決である。 $\mathbb{C}^*$ や $\mathbb{Z}/2$ の作用が *linearizable* であることがわかれば、次の消去問題への応用がある。

Cancellation Problem X を n 次元アフィン代数多様体で $X \times \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n+m}$ の時 $X = \mathbb{C}^n$ か?

与 $X \times \mathbb{C}^m$ への $\mathbb{Z}/2$ の作用を $\tilde{\tau} = id \times \tau$, $\tau: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ は $\tau(x_1, \dots, x_m) = (-x_1, \dots, -x_m)$ で定義すると、 X は $\tilde{\tau}$ の *fixed point locus* になる。従って、もし $\tilde{\tau}$ の $\mathbb{C}^{n+m}$ への作用が *linearizable* であれば $X = \mathbb{C}^n$ 。

$n=2$ の時 *Cancellation Problem* は 肯定的に解かれている。 $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への作用は *fixed point locus* の次元が一次元以上の時、*linearizable* であることが証明されているが、実はその証明には、 $n=2$ の時 *Cancellation*

*Problem*の解決に本質的であった $\mathbb{C}^2$ の特徴づけを使っている。

References

1. T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces,
J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.
2. M. Miyanishi and T. Sugie, Homology planes with quotient singularities,
preprint.
3. M. Miyanishi and T. Sugie, $\mathbb{Q}$ -homology planes with $\mathbb{C}^{**}$ fibrations,
preprint.
4. G. Shwartz, Exiotic algebraic group actions, preprint.