

パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式の数値解

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

§1. はじめに

パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式

$$i(r_t + \alpha r) + B r_{xx} + (\beta + A|r|^2)r + A_0 r^* = 0 \quad (1)$$

(α, B, β, A, A_0 は実定数, r^* は r の複素共役) は可積分なソリトン方程式に外力 (A_0 の項) と散逸 (α の項: 線形減衰) の加わった系であり, 低自由度カオスや, 空間コヒーレンスの欠如した時空カオスが生じると期待される。(1) は Miles (1984) が, 鉛直加振をうける細長い長方形容器内の水面波の (0,1) モード (短い辺方向にのみ一節のあるモード) の長辺方向への modulation を記述する方程式として, 平均ラグランジュ法により導いたものである。対応する実験が Wu, et al (1984) により行われ, *sech* 型の孤立波や, 2つの孤立波の衝突, すりぬけの繰り返しの現象が発見されている。

本研究では(1)の周期境界条件下での解の分岐を, 解析的及び数値的に調べ, *pseudospectral* 法により数値計算を行な,

た。特に2つのパラメータ (β, A_0) に対する依存性を詳細に調べ、定常解の安定性を吟味する。鉛直加振をうける水面波の場合、各パラメータの物理量との対応は次の通りである。

$$\alpha = a_{\min}/a_1 \epsilon^2, \quad \beta = (\omega^2 - \omega_1^2)/2\epsilon^2 \omega^2, \quad A_0 = a_0/a_1 \epsilon^2,$$

$a_0(\min)$: (最小励起) 加振振幅。

$$a_1 = (\kappa_1 \tanh \kappa_1 d)^{-1}, \quad \kappa_1 = \pi/l_y, \quad l_y : \text{容器の幅} (l_y \ll l_x)$$

d : 液体の深さ. $\omega_1 = \{(1 + \lambda^2 \kappa_1^2)g/a_1\}^{1/2}$: モード(0,1)の固有振動数

g : 重力加速度. λ : 表面張力. 2ω : 加振の角振動数

ϵ : 展開パラメータ ($\ll 1$). A, B は定数。

A, B は $\kappa d \rightarrow +\infty$ のときに1に近づく事が知られており、 $A = B = 1$ とする。

§ 2. 定常解の分類

(1) の定常解 ($r_z = 0$) は、零解 ($r = 0$)、一様解 ($r = \text{const}$)、非一様解に分類され、非一様解には位相 $\text{Arg}(r)$ が一定な、クノイダル波と dn 波が存在する。解析的な表現を以下に示す。

$$\text{一様解: } r = r_{c\pm} = |r_{c\pm}| e^{i\psi_{\pm}}$$

$$|r_{c\pm}| = \{(-\beta \pm \alpha)/A\}^{1/2}, \quad \alpha = (A_0^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

$$\psi_+ = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\alpha}{A_0}, \quad \psi_- = \frac{1}{2} (\pi - \sin^{-1} \frac{\alpha}{A_0}) \quad (2)$$

($\pm$ は 振幅の大小を区別するために用いた。)

7 / 1 ダル波解 $r = R^n(x) e^{i\psi_n}$

$$R^n(x) = n \frac{\kappa K}{\kappa_0 K_0} \operatorname{cn}(4nKx/L; \kappa), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

$$\psi_n = \frac{1}{2} \cos^{-1} \{(\beta_n^c - \beta)/A_0\}$$

但し. $A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - \beta_n^c)^2\}^{1/2}$, $\beta_n^c = -An^2 \frac{\kappa^2 K^2}{K_0^2 K_0^2} (1 - \kappa^2/2)$,
 $K \equiv K(\kappa)$, $K_0 \equiv K(\kappa_0)$ は第一種完全楕円積分. $L = 4K_0 K_0 \sqrt{\frac{2B}{A}}$
 は空間 x の周期境界のサイズである。

d n 波解 $r = R^n(x) e^{i\psi_n}$

$$R^n(x) = n \frac{\kappa K}{2\kappa_0 K_0} \operatorname{dn}(2nKx/L; \kappa), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\psi_n = \frac{1}{2} \cos^{-1} \{(\beta_n^d - \beta)/A_0\}$$

$$\text{但し. } A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - \beta_n^d)^2\}^{1/2}, \quad \beta_n^d = -An^2 \frac{K^2}{4\kappa_0^2 K_0^2} (1 - \kappa^2/2).$$

図 1, 2 に零解と一様解の線形安定性ダイアグラムを示す。
 $\kappa \rightarrow 0$ の極限で、7 / 1 ダル波解の A_0 の表式は、 $A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - Bk_n^2)^2\}^{1/2}$, $k_n = 2\pi n/L$ に近づき、図 1 の安定性の変化する境界曲線と一致する。ゆえに 7 / 1 ダル波解は零解からの分岐解であり、さらに、 $\beta > (<) Bk_n^2$ ではこの分岐が supercritical (subcritical) であることがわかる。同様に $\kappa \rightarrow 0$ で d n 波解の A_0 は $A_0 = \{\alpha^2 + (\beta + Bk_n^2/2)^2\}^{1/2}$ となり、図 2 の境界線と一致する。よって d n 波解は一様解からの分岐である。

図 2 において、別のタイプの安定性の境界線が存在し、

$A_0 = \{\alpha^2 + (Bk_n^2/2)^2\}^{1/2}$ と表される。この境界線の近傍で Lindstedt の方法を用いることにより、位相の一定でない摂動解が得られる。(Umeki, 1990) また、定常解の方程式は、 x を時間変数と見直すと、中心力場の平面内の粒子の Hamilton 方程式に、非中心力的な摂動と、ハミルトンでない摂動の加わった系であることが示され、一般には、非周期的な解が存在すると予想される。

§ 3. クノイダル波の安定性.

クノイダル波解と dn 波解は、Fourier 級数表示が知られているため、比較的簡単に安定性が調べられる。ここでは、クノイダル波解について手法を説明する。

$r = \bar{r} + \hat{r}$; ($\bar{r}$: クノイダル波, $\hat{r}$: 摂動) とおいて (1) に代入し、 $\hat{r}$ について 1 次の項のみ残す。

$$\hat{r}_\tau + \alpha \hat{r} - i(B\hat{r}_{xx} + \beta \hat{r} + 2A|\bar{r}|^2 \hat{r} + 2\bar{r}^2 \hat{r}^* + A_0 \hat{r}^*) = 0 \quad (5)$$

$\bar{r}$ と $\hat{r}$ を打ち切ったフーリエ級数で表すと

$$(\bar{r}, \hat{r}) = \sum_{m=-N}^N (\bar{r}_m, \hat{r}_m) e^{ik_m x}, \quad (6)$$

となる。(5) において非線形項 ($|\bar{r}|^2 \hat{r}$) のフーリエ係数 u_m は、

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{L} \int_0^L |\bar{r}|^2 \hat{r} e^{-ik_m x} dx \\ &= \sum_{m_1, m_2} \bar{r}_{m_1} \bar{r}_{m_2}^* \hat{r}_{m_3} \quad \equiv \sum_{m_3} I_{m, m_3} \hat{r}_{m_3} \quad (7) \end{aligned}$$

である。但し、

$$I_{m,m_3} \equiv I(m-m_3) = \sum_{m_1} \bar{r}_{m_1} r_{m_1+m_3-m}^* \quad (8)$$

もう一つの非線形項 ($\bar{r}^2 \hat{r}^*$) のフーリエ係数 v_m も同様に

$$v_m = \sum_{m_1, m_3} \bar{r}_{m_1} \bar{r}_{m_3+m-m_1} \bar{r}_{m_3}^* \equiv \sum_{m_3} J_{m,m_3} \hat{r}_{m_3}^* \quad (9)$$

となる。楕円関数 cn のフーリエ級数表示

$$cn(x) = \frac{\pi}{\kappa K} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{sech} \{(l+\frac{1}{2})\pi K'/K\} \cos \{(l+\frac{1}{2})\pi x/K\} \quad (10)$$

($K' = K(\sqrt{1-\kappa^2})$)

を用いて、クノイダル波解 $r = \exp(i\psi) \cdot R^n$ のフーリエ係数は

$$r_m = e^{i\psi} R_m^n, \quad R_m^n = \begin{cases} \frac{n\pi}{2K_0 K_0} \operatorname{sech} \frac{|m|\pi K'}{2K} & , \quad m = \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \\ 0 & , \quad m \neq \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \end{cases} \quad (11)$$

で与えられる。相関係数 I_{m,m_3} は実数であり、 J_{m,m_3} は

$$J_{m,m_3} = I(m+m_3) e^{2i\psi} \quad \text{で与えられる。}$$

以上より、摂動のフーリエ係数の時間発展は、 $r_m = p_m + i q_m$ とし

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = \tilde{A}_m \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} + \sum_{m_3} \tilde{B}_{m,m_3} \begin{pmatrix} p_{m_3} \\ q_{m_3} \end{pmatrix} + \tilde{C}_m \begin{pmatrix} p_{-m} \\ q_{-m} \end{pmatrix}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 2N \quad (12)$$

となる。ここで、 $\tilde{A}_m, \tilde{B}_{m,m_3}, \tilde{C}_m$ は 2×2 の行列であり

$$A_m = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta + B k_m^2 \\ \beta - B k_m^2 & -\alpha \end{pmatrix} \quad B_{m,m_3} = A \begin{pmatrix} -J_{m,m_3}^2 & -2I_{m,m_3} + J'_{m,m_3} \\ 2I_{m,m_3} + J'_{m,m_3} & J_{m,m_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$C_m = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{である。} \quad (J', J^2 \text{ は } J \text{ の実部と虚部})$$

(12) の右辺の行列を数値的に解いた結果、クノイダル波があるパラメータで不安定となり、複素数の固有値を生ずることがわかった。(図3) 即ち、ホップ分岐が生じている。

図4に (β, A_0) 平面で詳細に安定性を調べた結果を示す。

§4. 数値計算

(1)の非定常解を調べるために、pseudospectral法を用いた数値計算を行なった。Aliasingの誤差をとり除くために、モード数 N の2倍の配列を用意し、高波数側半分は0を入れておく。時間ステップは4次のRunge-Kuttaを用いた。

$$(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.5), \quad (K_0, L) = (0.97, 15.73\dots)$$

で初期条件をクノイダル波+数%の擾動で計算したところ、初期の5万ステップ($T=250$)までは周期的であつた解が不安定となり、一時的な不規則状態をすぎ、2重周期状態が現れた。 α と β はそのままに $A_0=1.0$ とすると最初からカオス的な状態が続く。 $A_0=0.37$ の場合は周期状態が計算時間の範囲で続いた。図5に数値計算例を示す。

$(\alpha, \beta) = (0.2, -0.3)$ で A_0 を0.208~1.0まで100通りの計算を上の初期条件で行なったところ、次の事がわかった。

1. ホップ分岐 (510-ジ)は、 A_0 が小さい方ではsupercritical, A_0 の大きい方でsubcriticalである。
2. カオス的な状態と dn 波の $n=2, 3$ や一様解の状態が安定に共存する範囲がある。

また、 $A_0=0.37, 0.5$ で現れた周期解は実空間での波形を

見ると、2つの山^{衝突} → 1つの山^{すり抜け} → 2つの山 → ... と解釈でき、
Wu, et. al の実験を説明するものである。

§ 5 まとめ

鉛直加振を受けた水面波のダイナミクスを、弱非線形理論で導出した、パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式によって解析し、孤立波や、2つの山の衝突、すり抜け現象を再現した。

§ 6. 参考文献

Miles, J. W. (1984) *J. Fluid Mech.* 148 pp 451-460

Wu, J., Keolian, R & Rudnick, I (1984) *Phys. Rev. Lett.* 52

pp. 1421-1424

Umeki (1990) preprint.

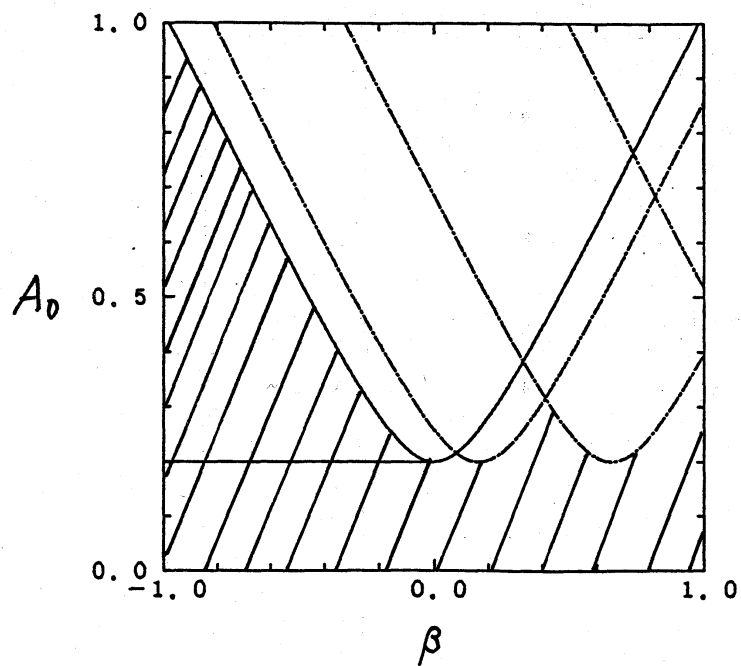


図1 零解の安定性ダイアグラム
斜線部が安定領域

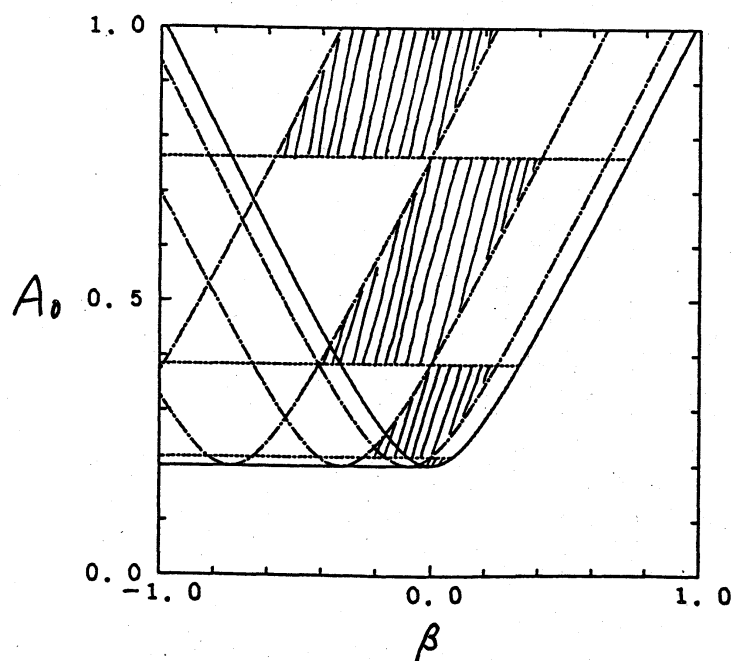


図2 一様解 (γ_{ct}) の安定性ダイアグラム
斜線部が安定領域

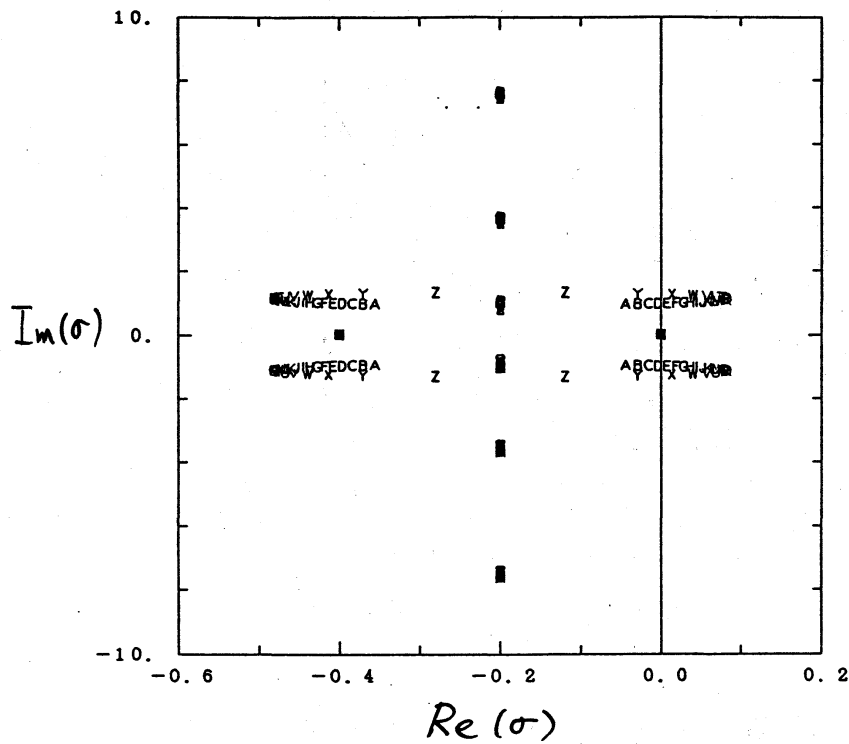


図3 安定性解析による固有値 σ の変化
 $A \rightarrow Z$ に従い、 A_0 を大きく変化させた。
 2度 Hopf 分岐が起きている。

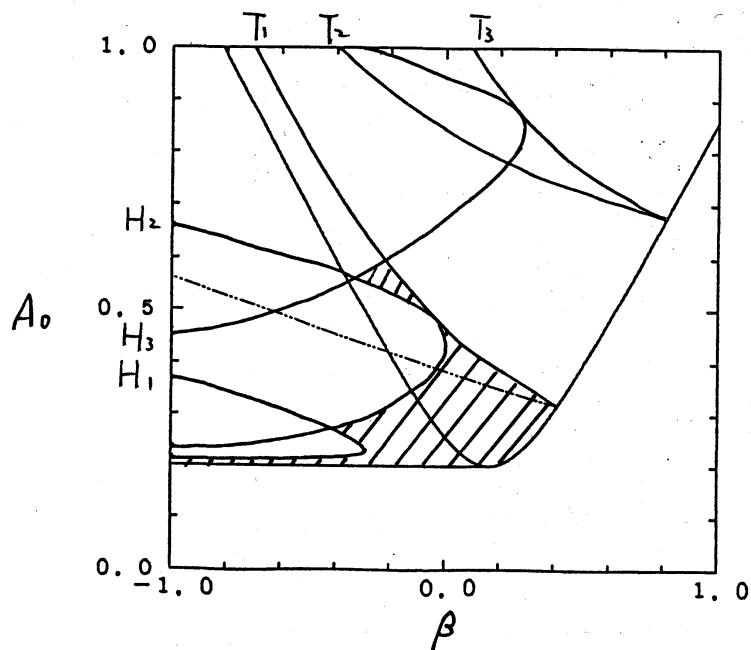


図4 クノイダル波 ($n=1$) の安定性ダイアグラム
 斜線部が安定領域。

H_1, H_2, H_3 は $\text{Re}(\sigma)=0, \text{Im}(\sigma) \neq 0$ の曲線。
 T_1, T_2, T_3 は $\text{Re}(\sigma)=\text{Im}(\sigma)=0$ の曲線。

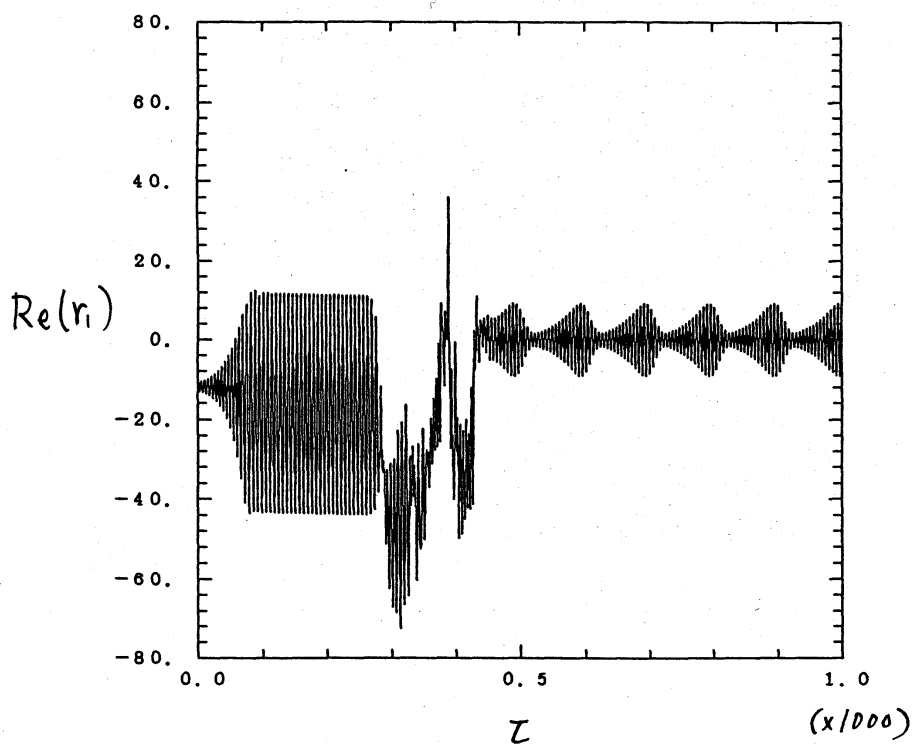


図 5.1 . $(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.5)$
 τ の フーリエ係数 $r_1(\tau)$ の実部の
 時間発展

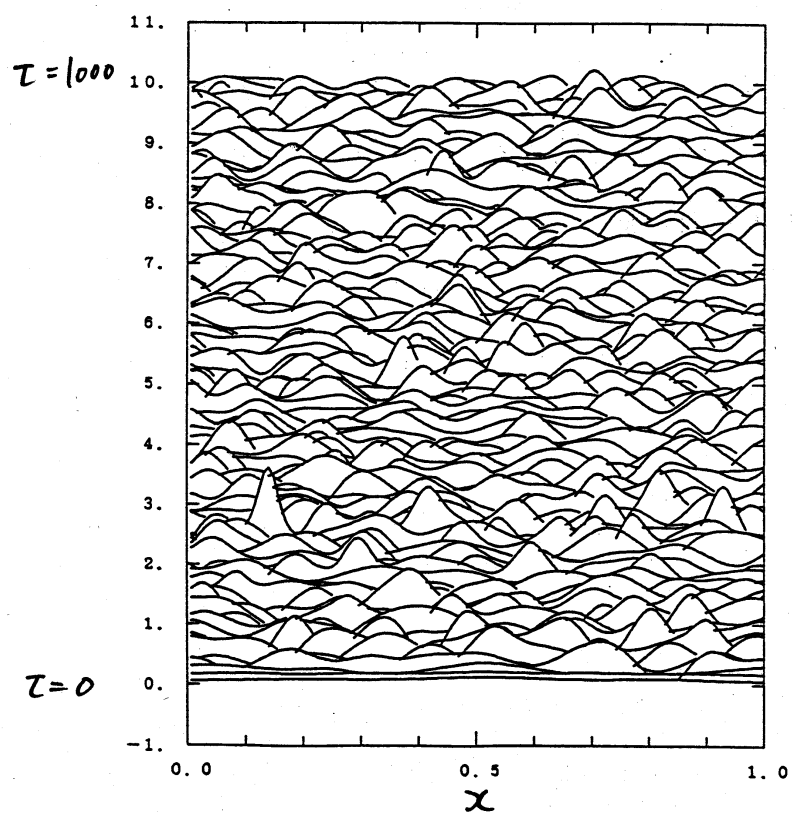
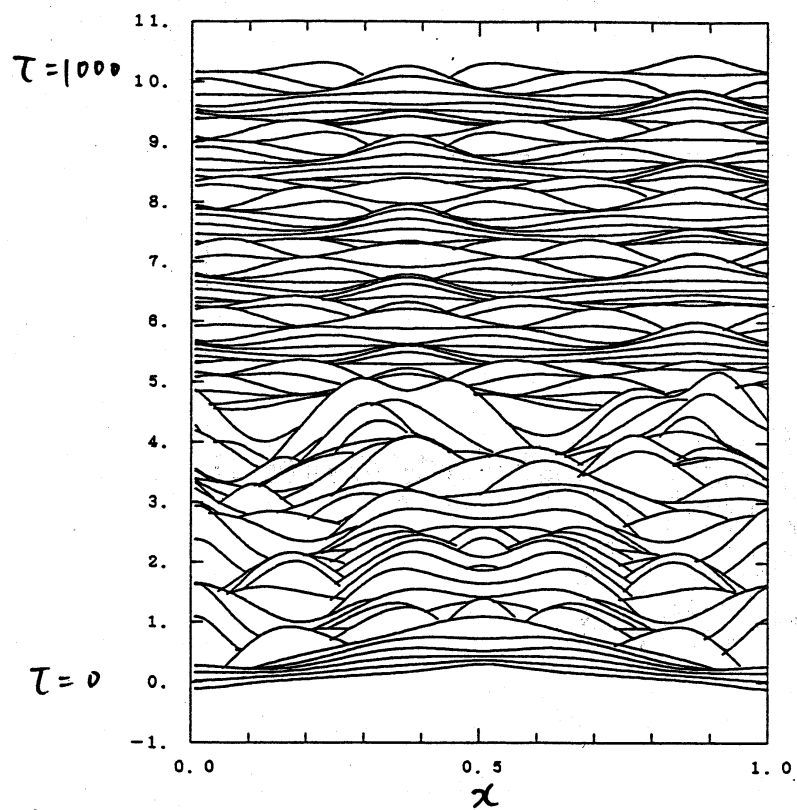


図 5.2, 5.3, $\text{Re}(r)$ の時間発展. $\alpha=0.2$, $\beta=-0.3$
 (上) (下)
 上: $A_0=0.5$, 下: $A_0=1.0$

//

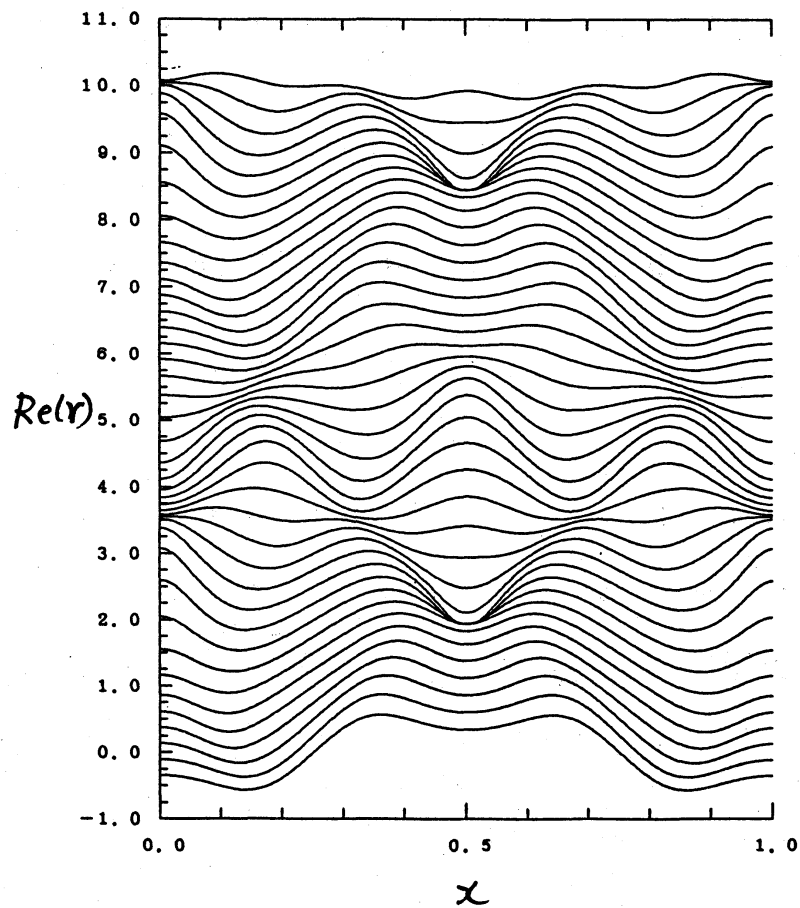


図 5.4 孤立波の衝突すり抜け現象。(x=0.25~0.75を実際の容器のサイズとみなす。) $A_0=0.5$, $\alpha=0.2$, $\beta=-0.3$