

複合分岐点近傍においてみられる進行パルスの散乱現象

京都大学 数理解析研究所 上田 肇一 (Kei-Ichi UEDA)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

千歳科学技術大学 物質光科学科 寺本 敬 (Takashi TERAMOTO)

Department of Photonics Material Science, Chitose Institute of Science and Technology

北海道大学 電子科学研究所 西浦 廉政 (Yasumasa NISHIURA)

Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University

1 はじめに

反応拡散系における典型的なパルスの相互作用として融合型の対衝突と非融合型の対衝突がある. この2つのタイプの対衝突の場合に関して, 対衝突後のパターンが変化する仕組みについて考察する. 融合タイプの対衝突にみられる反射, 融合, 対消滅の散乱ダイナミクスは図4のような現象である. パルスは対衝突した後一つのパルスに合体し, その後伝播や対消滅といった現象がみられる. 非融合タイプの対衝突後にみられる反射, 対消滅の散乱パターンは図10のようなものである. パルス間の距離が離れたところで対消滅と反射が起きる. このような融合型と非融合型の散乱パターンの変化に関する数理的メカニズムにおいて不安定定常解 (分水嶺解 [4][5]) が重要な役割をしていることを示す.

ここでは次の3変数反応拡散方程式を用いて数値実験を行なう.

$$\begin{aligned} u_t &= D_u u_{xx} + k_2 u - u^3 - k_3 v - k_4 w + k_1, \\ \tau v_t &= D_v v_{xx} + u - \gamma v, \\ \theta w_t &= D_w w_{xx} + u - w. \end{aligned} \quad (1)$$

この方程式はガス放電系において導出された方程式である [6]. パラメータは $D_u = 5.0 \times 10^{-5}$, $k_1 = -3.0$, $k_2 = 2.0$, $k_3 = 2.0$ とする. 数値シミュレーションは空間刻み $dx = 5.0 \times 10^{-3}$, 時間刻み $dt = 1.0 \times 10^{-3}$ とした. 他のパラメータは融合型と非融合型の2つの場合において異なるパラメータを用いる.

2 融合型

パラメータを $D_w = 0.01$, $k_4 = 2.4$, $\gamma = 2.5$, $\tau = 900$, $\theta = 1.0$ とし, D_v をコントロールパラメータとしてパルスの衝突実験を行った. 初期値として2つのパルスを十分離れた位置にとった. $D_v = 1.282$ 付近で衝突後のパターンが変化する (図1). $D_v = 1.28028 \times 10^{-3}$ の場合は反射が起き, $D_v = 1.28029 \times 10^{-3}$ の場合は融合が起きて, しばらく1山の状態でいるが, やがて左か右のどちらかに伝播する. 融合した後どちらの方向に伝播するかは初期値に依存する. このパラメータ付近で解軌道の様子を調べると, パルスが対衝突した後, ある (分水嶺解の役割をする) 双角解に近づくことがわかる. 双角解は不安定次元2の定常解で図2(a)に示す. 二つパルスが合体したときの解の形はほぼ左右対称な形になっているため衝突後の双角解において

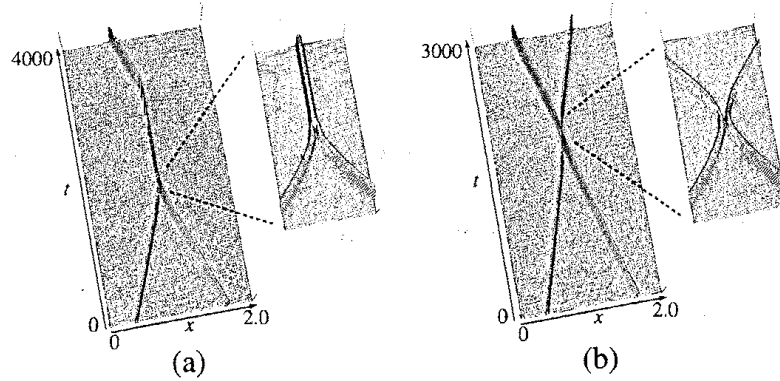


図 1: (a) 融合 $D_v = 1.28208 \times 10^{-3}$, (b) 反射 $D_v = 1.28209 \times 10^{-3}$ のみ表示.

ϕ_2 の不安定成分は無視できる. したがって不安定方向は ϕ_1 方向の不安定成分によってほぼ決まる. 実際, 双角不安定解に正 (負) の摂動に関しては融合 (反射) する様子が再現される (図 2 (e)(f)). 融合解と双角解に関する分岐図は図 3 のようになる.

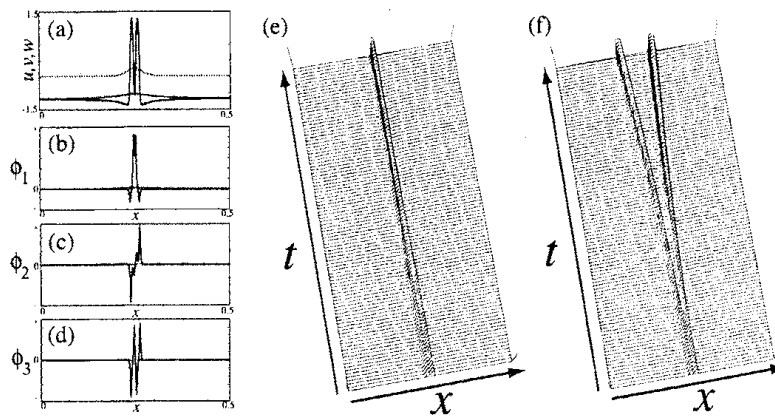


図 2: (a) 双角型分水嶺解 $D_v = 1.28208 \times 10^{-3}$. (b) 第一固有値 ($\lambda_1 = 3.442044 \times 10^{-1}$) に対する固有関数, (c) 第二固有値 ($\lambda_2 = 4.338311 \times 10^{-2}$) に対する固有関数, (d) Goldstone モード. 実線: u 成分. 点線: v 成分. 破線: w 成分. (e)((f)) 摂動実験. (a) に ϕ_1 の正 (負) の摂動を加えたときの反応.

さらに D_v を小さくすると, $D_v = 2.94 \times 10^{-4}$ 付近において再び対衝突後のパターンが変化する. パルスは融合した後の変化を調べると図 4 のように変化することがわかる. つまり, $D_v = 2.9480 \times 10^{-4}$ では融合するが, $D_v = 2.9465 \times 10^{-4}$ では融合した後に (分水嶺解の役割をする) 単角解 (図 3 の単角解の下の方の枝に対応する解) に近づき, 一度パルスの幅が膨らんだ後消滅する. $D_v = 2.9450 \times 10^{-4}$ では単角解に近づき, 膨らむことなく消滅する. このような変化を定常パルス解の分岐構造から理解する. 図 5 は τ を変化させたときの 1 山パルス解のサドル・ノード分岐点, ピッチフォーク分岐点, Hopf 分岐点の変化を示している. Hopf 分岐点はサドル・ノード分岐点から出現し, 分岐点からサブクリティカルに不安定な振動パルス解が現れる. つまり, Bogdanov-Takens 点が存在する. $\tau = 900$ においても不安定周期解がサブクリティカルに分岐し, 分岐点近くにおけるフローを模式的に表すと図 3(b) のようになる. 融合と対消滅を分けるパラメータは Hopf 分岐点の右側 (図 3(b)C) であり, シミュレーションで確認され

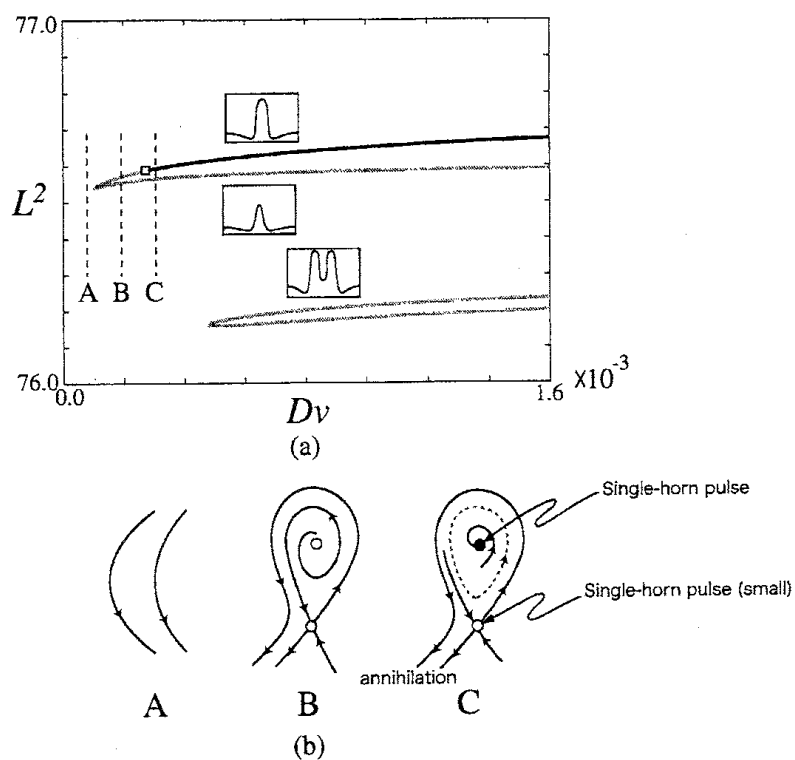


図 3: (a) 上 (下) の枝は単角定常解 (双角定常解) に関する枝. 黒色の線は並進モードの不安定モードを持つ不安定次元 1 の解. 灰色の線は不安定次元 2 以上の解. (b) 単角解のサドル・ノード分岐点近くのフロー.

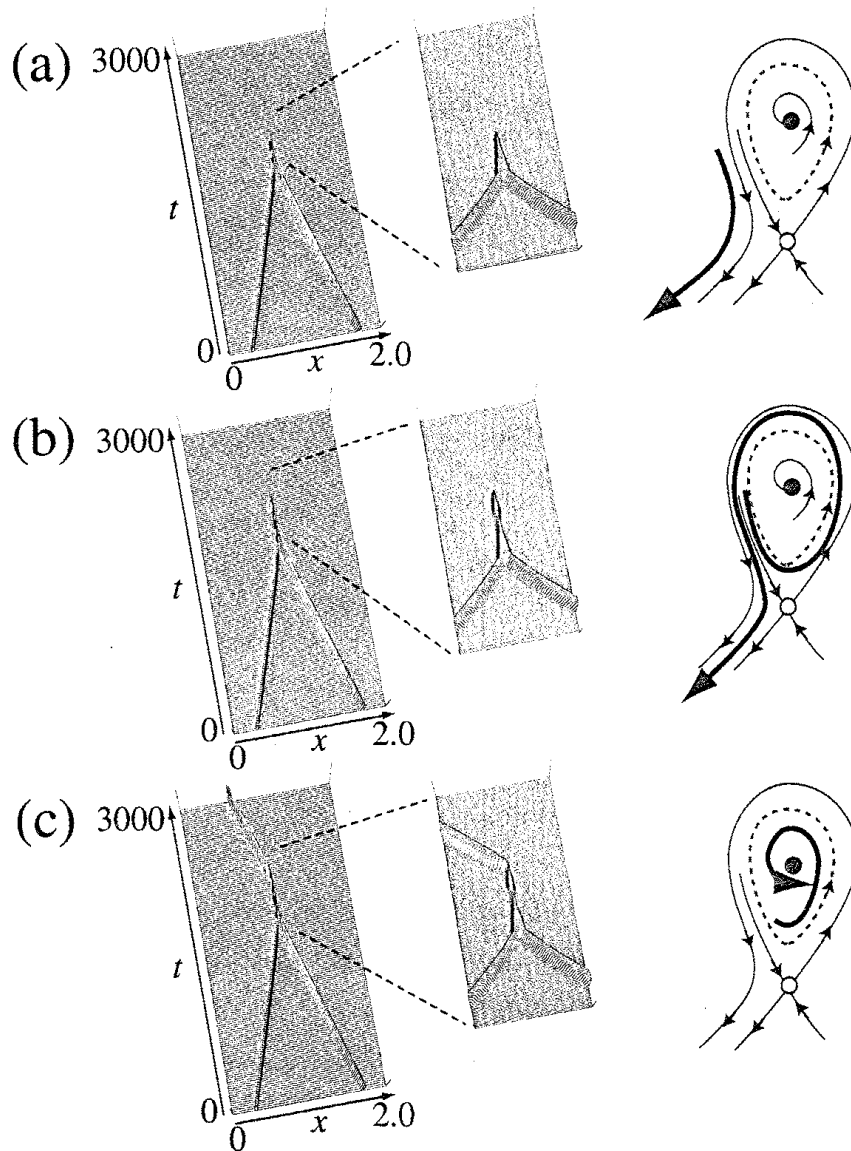


図 4: (a) 対消滅 ($D_v = 2.9450 \times 10^{-4}$). (b) 振動した後消滅 ($D_v = 2.9465 \times 10^{-4}$). (c) 融合 ($D_v = 2.9480 \times 10^{-4}$). 右図はそれぞれの場合に対応した融合後の模式的な解の流れ. (図 3(b)C 参照)

る現象は Hopf 分岐点近くのフローに対応することがわかる (図 4). 実際, 単角解に対して摂動実験を行なっても同様に消滅と膨らんだ後消滅する現象が再現される. (図 6)

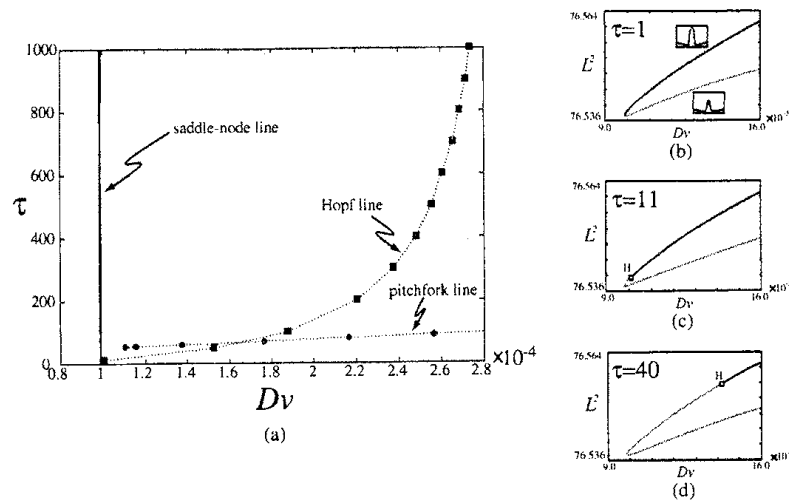


図 5: (a) 単角解のサドル・ノード分岐点, ピッチフォーク分岐点, Hopf 分岐点の変化. 右図は Hopf 分岐点の変化の様子. 黒色の線は安定解, 灰色の線は不安定な解, H は Hopf 分岐点を表す. (b) $\tau = 1.0$, (c) $\tau = 11.0$, (d) $\tau = 40.0$.

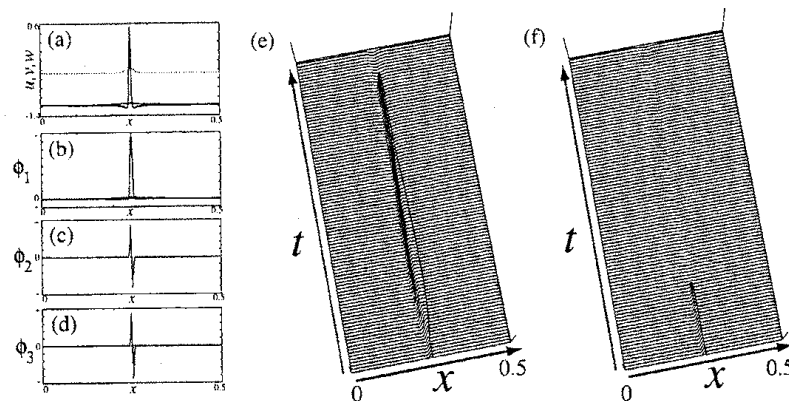


図 6: (a) 単角型の分水嶺解 ($D_v = 2.945 \times 10^{-4}$). (b) 第一固有値 ($\lambda_1 = 1.119969$) に対する固有関数. (c) 第二固有値 ($\lambda_2 = 3.337082 \times 10^{-2}$) に対する固有関数. (d) Goldstone モード. (e)((f)) 摂動実験. ϕ_1 の正 (負) 方向の摂動を加えたときの反応.

3 非融合型

パラメータを $D_v = 6.5 \times 10^{-3}$, $D_w = 7.5 \times 10^{-3}$, $\gamma = 8.0$, $\theta = 10.0$ とする. k_4 をコントロールパラメータとする. 図 7 は定数定常解と定常パルス解に関する分岐図である. サドル・ノード分岐点が存在し, その近くに Hopf 分岐点とピッチフォーク分岐点が存在する. ピッチフォーク分岐はスーパークリティカルに分岐して安定なトラベリングパルスが出現する. τ を変化さ

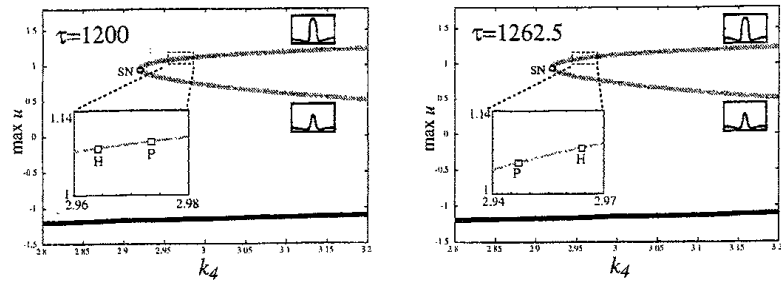


図 7: $\tau = 1200$ 及び $\tau = 1262.5$ の時の 1 山パルス解と定数定常解に関する分岐図. 黒色の線は安定な定数定常解, 灰色の線は不安定パルス解, P はピッチフォーク分岐点, H は Hopf 分岐点を表す. サドル・ノード点の値は $k_4 = 2.9195$.

せることによってピッチフォーク分岐点と Hopf 分岐点の位置が入れ替わる. つまりある τ においてピッチフォーク分岐点と Hopf 分岐点は一致する (この点を PH 点と呼ぶ).

図 8 は (k_4, τ) をパラメータにとったときの相図である. 領域 I では安定なパルス解が存在せず, 解は定数定常解に収束する. 領域 II では安定トラベリングパルス解が存在せず, 安定定常パルス解が存在する. 領域 III ではピッチフォーク分岐により安定トラベリングパルス解が存在し, 2 つのパルスが対衝突した後反射現象がみられる. 領域 IV はパルスが対衝突した後消滅してしまう領域である. 図 9 は分岐図を模式的に表したものである. 注目すべきことは領域 IV が領域 III よりもピッチフォーク分岐点の近くに存在することである. このことはパルスの速度が遅い方が対消滅が起きることを意味する (図 10). これはピッチフォーク分岐のみが関わる [2] の場合と異なり Hopf 分岐点が存在するためである.

この現象を荒っぽく説明すると, 安定トラベリングパルスに関する basin が小さくなるためである. 図 9 から PH 点の近くで不安定な振動トラベリングパルスがサブクリティカルに分岐している. つまり, 安定なトラベリングパルスはピッチフォーク分岐点の近くで安定性を失っており, その分岐点近くのパラメータではトラベリングパルス解の basin が小さい. この結果, 衝突などの摂動が加わることにより安定性を失いやすくなり, パルスの対消滅現象が起こりやすくなっていると考えることができる.

4 1 山パルスの分岐構造

非融合現象の対消滅と反射がみられるパラメータ領域はピッチフォーク分岐と Hopf 分岐同時に起きる点近くでみられることがわかった. パルスの衝突後の振る舞いはトラベリングパルスが不安定化したパラメータ付近で起きることがわかったが, 縮約理論を用いるとあるいくつかの条件を満たす場合, そのような不安定化はピッチフォーク分岐と Hopf 分岐が同時に起きるパラメータ近傍において必ず存在することがわかる.

ここでは Hopf 分岐点とピッチフォーク分岐点の複合分岐点近くにおける 1 山パルスのダイナミクスを記述する有限次元の常微分方程式を導出する. このような分岐点近くにおける解析は [1][2] における手法と同様に行なう. (ここでは厳密な証明ではなく, 形式的な計算を行なう.) 次のような N 変数反応拡散方程式について考察する.

$$u_t = Du_{xx} + F(u, \eta) \quad (2)$$

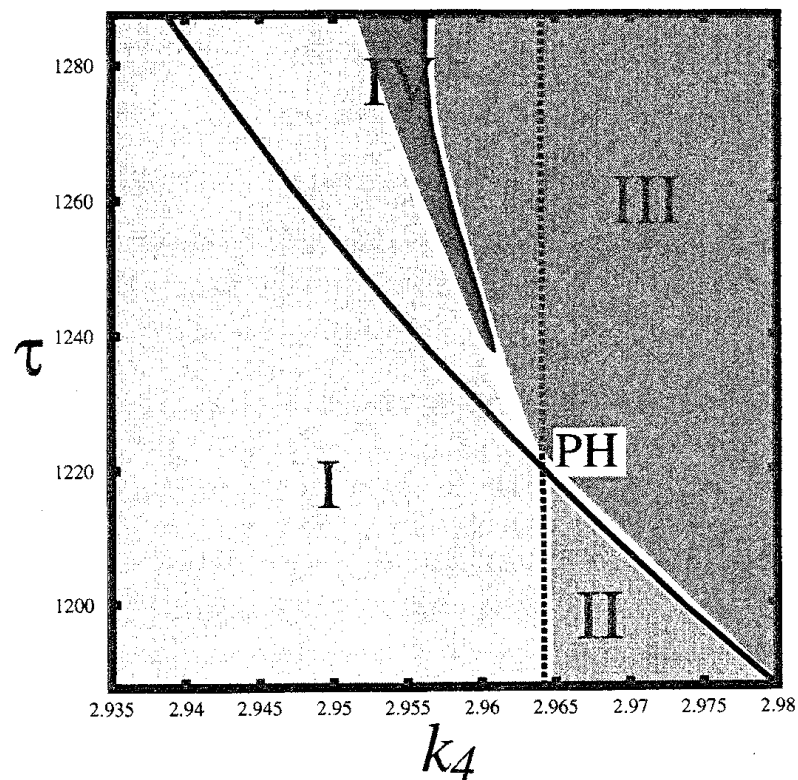


図 8: k_4 - τ をパラメータにとったときの相図. 実線 (点線) はピッチフォーク分岐点 (Hopf 分岐点). I: 解は定数定常解に収束する. II: 安定定常パルス解が存在しトラベリングパルスは存在しない. III: 2つのパルスが対衝突した後に反射する. IV: 2つのパルスが対衝突した後に対消滅する.

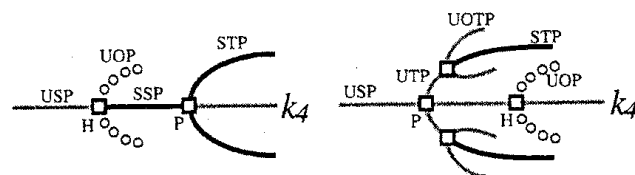


図 9: (a)((b)) τ を PH 点の下 (上) の値で固定したときの模式的な分岐図. SSP: 安定定常パルス. USP: 不安定定常パルス. STP: 安定トラベリングパルス. UTP: 不安定トラベリングパルス. UOTP: 不安定振動トラベリングパルス. UOP: 不安定振動定常パルス.

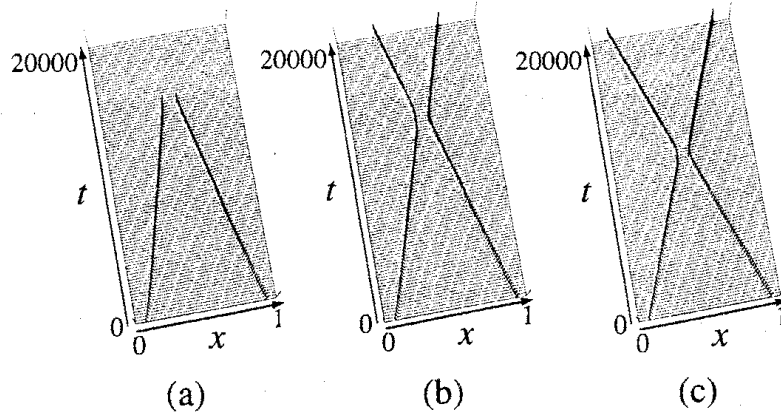


図 10: $\tau = 1262.5$ のときの散乱パターン. (a) 対消滅 ($k_4 = 2.956$). (b) 反射 ($k_4 = 2.96$). (c) 反射 ($k_4 = 2.97$).

ここで $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbf{R}^N$, $F: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ は滑らかな関数, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$ をコントロールパラメータ, D は非負の対角成分を持つ対角行列とする.

S1) $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \in \mathbf{R}^2$ を Hopf 分岐とピッチフォーク分岐が同時に起きるパラメータとする. また (2) において定常 1 山パルス解 $S(x)$ が存在し, $S(x) = S(-x)$ を満たす.

$\mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{k}) := D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\eta} = (\tilde{k}_1 + \eta_1, \tilde{k}_2 + \eta_2)$ とすると (2) は

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\eta} \cdot g(\mathbf{u}). \quad (3)$$

ただし, $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}; \tilde{\mathbf{k}})$, $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \cdot g(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}; \tilde{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\eta}) - \mathcal{L}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$, $g(\mathbf{u}) = (g_1(\mathbf{u}), g_2(\mathbf{u}))$, となる. $L = \mathcal{L}'(S(x); \tilde{\mathbf{k}})$ とする. ピッチフォーク分岐と Hopf 分岐に関する固有値に対応する固有関数をそれぞれ ψ , ξ とし, それらは $L\psi = -S_x$ と $L\xi = i\omega_0\xi$ ($\omega_0 \in \mathbf{R}^+$) をみたす. L^* を L の共役作用素とすると $L^*\phi^* = 0$, $L^*\psi^* = -\phi^*$, $L^*\xi^* = -i\omega_0\xi^*$ となるような ϕ^*, ψ^*, ξ^* が存在する. $\psi, \xi, \phi^*, \psi^*, \xi^*$ は

$$\langle \psi, S_x \rangle_{L^2} = 0, \langle S_x, \psi^* \rangle_{L^2} = 1, \langle \psi, \psi^* \rangle_{L^2} = 0, \langle \xi, \xi^* \rangle_{L^2} = 1$$

を満たすようにとる. またこのとき

$$\langle \psi, \phi^* \rangle_{L^2} = 1, \langle S_x, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$$

が成り立つ. 固有関数に関して次のような空間対称性を仮定する.

S2) Hopf 分岐に関する不安定モードは偶関数, ピッチフォーク分岐に対応する不安定モードは奇関数する. つまり,

$$\langle \psi, \xi^* \rangle = 0, \langle S_x, \xi^* \rangle = 0$$

が成り立つ.

$E_1 = \text{span}\{P_x, \psi\}$, $E_2 = \text{span}\{\xi, \bar{\xi}\}$, $E = E_1 \oplus E_2$ とする. $q \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{C}$ を新たな変数, η_1, η_2 は十分小さなパラメータとし

$$\mathbf{u}(x, t) = S(x - p) + q\psi(x - p) + (r\xi(x - p) + \text{c.c.}) + \zeta(x - p) + \mathbf{w} \quad (4)$$

(c.c. は複素共役) と表す. ただし,

$$\zeta = q^2 \zeta_{2000} + (r^2 \zeta_{0200} + qr \zeta_{1100} + c.c.) + |r|^2 \zeta_{0110} + \eta_1 \zeta_{0001} + \eta_2 \zeta_{0002}$$

とし, ζ_{ijkl} を関数で次の方程式を満たすようなものとする.

$$\begin{aligned} L\zeta_{2000} + \Pi_{2000} &= \alpha_{2000}\xi + \bar{\alpha}_{2000}\bar{\xi}, \\ (L - 2i\omega_0 I)\zeta_{0200} + \Pi_{0200} &= \alpha_{0200}\xi + \bar{\alpha}_{0200}\bar{\xi}, \\ (L - i\omega_0 I)\zeta_{1100} + \Pi_{1100} &= \alpha_{1100}\psi + \alpha'_{1100}\phi, \\ L\zeta_{0110} + \Pi_{0110} &= \alpha_{0110}\xi + \bar{\alpha}_{0110}\bar{\xi}, \\ L\zeta_{0001} + \Pi_{0001} &= \alpha_{0001}\xi + \bar{\alpha}_{0001}\bar{\xi}, \\ L\zeta_{0002} + \Pi_{0002} &= \alpha_{0002}\xi + \bar{\alpha}_{0002}\bar{\xi}. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Pi_{2000} &= \frac{1}{2}F''(S)\psi^2 + \psi_x, \quad \Pi_{0200} = \frac{1}{2}F''(S)\xi^2, \quad \Pi_{1100} = F''(S)\psi \cdot \xi + \xi_x, \\ \Pi_{0110} &= F''(S)\xi \cdot \bar{\xi}, \quad \Pi_{0001} = g_1(S), \quad \Pi_{0002} = g_2(S). \end{aligned}$$

α_{jklm} は次の方程式を満たす.

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{2000} - \alpha_{2000}\xi, \xi^* \rangle_{L^2} &= 0, \quad \langle \Pi_{0200} - \alpha_{0200}\xi, \xi^* \rangle_{L^2} = 0, \quad \langle \Pi_{1100} - \alpha_{1100}\psi, \phi^* \rangle_{L^2} = 0, \\ \langle \Pi_{1100} - \alpha'_{1100}\phi, \psi^* \rangle_{L^2} &= 0, \quad \langle \Pi_{0110} - \alpha_{0110}\xi, \xi^* \rangle_{L^2} = 0, \quad \langle \Pi_{0001} - \alpha_{0001}\xi, \xi^* \rangle_{L^2} = 0, \\ \langle \Pi_{0002} - \alpha_{0002}\xi, \xi^* \rangle_{L^2} &= 0, \quad \alpha_{0020} = \bar{\alpha}_{0200}, \quad \alpha_{1010} = \bar{\alpha}_{1010}, \quad \alpha_{1010} = \bar{\alpha}_{1100}. \end{aligned}$$

w に関して次を仮定する.

S3) $w \in E^\perp$ であり, $\|w\|_{L^2}, \|w_x\|_{L^2} \leq O(q^3 + |r|^3 + \eta^{3/2})$ をみたす.

(4) を (3) に代入した後, 両辺を ψ^*, ϕ^*, ξ^* で内積をとると

$$\begin{aligned} \dot{p} &= q + (\alpha'_{1100}qr + c.c.) + (m_{1200}qr^2 + c.c.) \\ &\quad + m_{3000}q^3 + m_{0110}q|r|^2 + m_{1001}q\eta_1 + m_{1002}q\eta_2 + h.o.t., \\ \dot{q} &= g_{1001}q\eta_1 + g_{1002}q\eta_2 + (\alpha_{1100}qr + c.c.) \\ &\quad + g_{3000}q^3 + (g_{1200}qr^2 + c.c.) + g_{1110}q|r|^2 + h.o.t., \\ \dot{r} &= i\omega r + \alpha_{0001}\eta_1 + \alpha_{0002}\eta_2 + (g_{0101}r\eta_1 + c.c.) + (g_{0102}r\eta_2 + c.c.) \\ &\quad + \alpha_{2000}q^2 + (\alpha_{0200}r^2 + c.c.) + \alpha_{0110}|r|^2 + (h_{2100}q^2r + c.c.) \\ &\quad + (h_{0300}r^3 + c.c.) + (h_{0210}r|r|^2 + c.c.) + h.o.t., \end{aligned}$$

が得られる. ここで $m_{ijkl}, g_{ijkl}, h_{ijkl}$ は定数であり, 具体的な形はスペースの関係で省略する.
次の変数変換を行なう

$$\begin{aligned} v &= q + V_{1100}qr + V_{1010}q\bar{r} + V_{1200}qr^2 + V_{1020}q\bar{r}^2, \\ w &= r + W_{0001}\eta_1 + W_{0002}\eta_2 + W_{2000}q^2 + W_{0200}r^2 + W_{0020}\bar{r}^2 + W_{0110}|r|^2 \\ &\quad + W_{0011}\eta_0\bar{r} + W'_{0011}\eta_1\bar{r} + W_{2010}q^2\bar{r} + W_{0120}\bar{r}|r|^2 + W_{0300}r^3 + W_{0030}\bar{r}^3. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
V_{1100} &= -\frac{g_{1100}}{i\omega}, V_{1010} = \frac{g_{1010}}{i\omega}, \\
V_{1200} &= -\frac{g_{1200} + g_{1100}V_{1100} + h_{0200}V_{1100} + h_{0200}V_{1010}}{2i\omega}, \\
V_{1020} &= \frac{g_{1020} + g_{1010}V_{1010} + h_{0020}V_{1100} + h_{0020}V_{1010}}{2i\omega}, \\
W_{0001} &= \frac{h_{0001}}{i\omega}, W_{0002} = \frac{h_{0002}}{i\omega}, \\
W_{0011} &= \frac{h_{0011} + 2W_{0020}\bar{h}_{0001} + W_{0110}h_{0001}}{2i\omega}, \\
W_{0012} &= \frac{h_{0012} + 2W_{0020}\bar{h}_{0002} + W_{0110}h_{0002}}{2i\omega}, \\
W_{2000} &= \frac{h_{2000}}{i\omega}, W_{0200} = -\frac{h_{0200}}{i\omega}, W_{0020} = \frac{h_{0020}}{3i\omega}, W_{0110} = \frac{h_{0110}}{i\omega}, \\
W_{2010} &= \frac{h_{2010} + 2W_{2000}g_{1010} + 2W_{0020}h_{2000} + W_{0110}h_{2000}}{2i\omega}, \\
W_{0120} &= \frac{h_{0120} + 2W_{0200}h_{0020} + 2W_{0020}\bar{h}_{0110} + W_{0110}h_{0110} + W_{0110}h_{0020}}{2i\omega}, \\
W_{0300} &= -\frac{h_{0300} + 2W_{0200}h_{0200} + W_{0110}h_{0200}}{2i\omega}, \\
W_{0030} &= \frac{h_{0030} + 2W_{0020}h_{0020} + W_{0110}h_{0020}}{4i\omega},
\end{aligned}$$

とする。このようにして次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= G_{1001}\eta_1 v + G_{1002}\eta_2 v + G_{3000}v^3 + G_{1110}v|w|^2, \\
\dot{w} &= i\omega w + H_{0101}\eta_1 w + H_{0102}\eta_2 w + H_{2100}v^2 w + H_{0210}w|w|^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
G_{1001} &= g_{1001} + V_{1100}h_{0001} + V_{1010}\bar{h}_{0001}, \\
G_{1002} &= g_{1002} + V_{1100}h_{0002} + V_{1010}\bar{h}_{0002}, \\
G_{3000} &= g_{3000} + V_{1100}h_{2000} + V_{1010}\bar{h}_{2000}, \\
G_{1110} &= g_{1110} + V_{1100}g_{1010} + V_{1100}h_{0110} + V_{1010}g_{1100} + V_{1010}\bar{h}_{0110}, \\
H_{0101} &= h_{0101} + 2W_{0200}h_{0001} + W_{0110}\bar{h}_{0001}, \\
H_{0102} &= h_{0102} + 2W_{0200}h_{0002} + W_{0110}\bar{h}_{0002}, \\
H_{2100} &= h_{2100} + 2W_{2000}g_{1100} + 2W_{0200}h_{2000} + W_{0110}\bar{h}_{2000}, \\
H_{0210} &= h_{0210} + 2W_{0200}h_{0110} + 2W_{0020}h_{0200} + W_{0110}h_{0200} + W_{0110}\bar{h}_{0110}.
\end{aligned}$$

ここで $w = Ae^{i\varphi}(A, \varphi \in \mathbf{R})$ とし (5) に代入すると

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega_0 + \mu'_2 + h.o.t., \\
\dot{v} &= (-\mu_1 + p_{11}v^2 + p_{12}A^2)v + h.o.t., \\
\dot{A} &= (-\mu_2 + p_{21}v^2 + p_{22}A^2)A + h.o.t.,
\end{aligned} \tag{6}$$

が得られる。ここで $p_{11} = \text{Re}G_{3000}$, $p_{12} = \text{Re}G_{1110}$, $p_{21} = \text{Re}H_{2100}$, $p_{22} = \text{Re}H_{0210}$. $\mu_1 = -\text{Re}G_{1001}\eta_1 - \text{Re}G_{1002}\eta_2$, $\mu_2 = -\text{Re}H_{0101}\eta_1 - \text{Re}H_{0102}\eta_2$, $\mu'_2 = -\text{Im}H_{0101}\eta_1 - \text{Im}H_{0102}\eta_2$ であ

る。(6)の主要部のダイナミクスを調べる。第2, 第3式は φ と独立なのでここからは

$$\begin{aligned}\dot{v} &= (-\mu_1 + p_{11}v^2 + p_{12}A^2)v, \\ \dot{A} &= (-\mu_2 + p_{21}v^2 + p_{22}A^2)A,\end{aligned}\tag{7}$$

について考察する。図8のPH点($\mu_1 = \mu_2 = 0$)におけるパルス解から固有関数を数値的に求め係数を計算すると $p_{ij}(i, j = 1, 2)$ は次の条件をみたす。

$$p_{12}/p_{22} > 0, p_{21}/p_{11} > 0, p_{12}p_{21}/p_{11}p_{22} < 1, p_{11} < 0.\tag{8}$$

この条件を満たすとき(7)に関して図11のphase portraitが得られる[3]。 $\mu_1 = 0$ において $v \neq 0$ の定常解が分岐し、 $\mu_2 = 0$ において $A \neq 0$ の定常解が分岐する。 $\mu_2 \geq 0$ においては

$$EP_1^\pm : (v, A) = (0, \pm\sqrt{\frac{\mu_2}{p_{22}}})$$

の解が存在し、 $\mu_1 \leq 0$ においては

$$EP_2^\pm : (v, A) = (\pm\sqrt{\frac{\mu_1}{p_{11}}}, 0)$$

が存在する。これらの定常解から $v \neq 0, A \neq 0$ の解が

$$T_1 = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = \frac{p_{12}}{p_{22}}\mu_2, \mu_2 > 0\}$$

と

$$T_2 = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = \frac{p_{21}}{p_{11}}\mu_1, \mu_1 < 0\}$$

で分岐する。つまり、図11の3,4,5の領域では

$$EP_3^{\pm, \pm} : (v, A) = \left(\pm\sqrt{\frac{-p_{12}\mu_2 + p_{22}\mu_1}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}}, \pm\sqrt{\frac{-p_{21}\mu_1 + p_{11}\mu_2}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}} \right)$$

の解が存在する。図11と(1)の数値シミュレーションによって得られた分岐図を比較する。変数変換の仕方から $v \neq 0$ の定常解はトラベリングパルス、 $A \neq 0$ の定常解は振動パルスに対応する。つまり $v \neq 0, A \neq 0$ の解は振動トラベリングパルスに対応する。図9左の分岐図は (μ_1, μ_2) を図11において $6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 、図9右の分岐は $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ と変化させることによって得られる。また、パラメータが T_2 に近づくにつれて安定トラベリングパルスに関するbasinが狭くなることが確認できる。

参考文献

- [1] S. -I. EI, *The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems*, J.Dyn.Diff.Eqs., 14(1) (2002), pp. 85-137.
- [2] S. -I. EI, M. MIMURA AND M. NAGAYAMA, *Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems*, Physica D, 165 (2002), pp. 176-198.

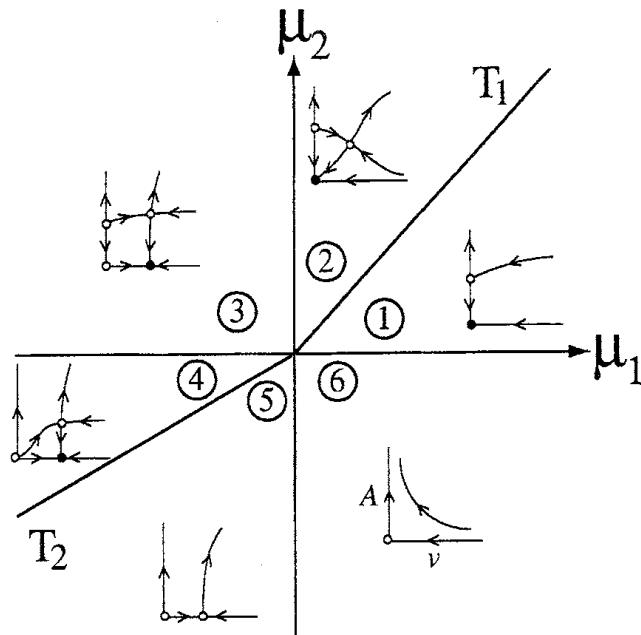


図 11: 条件 (8) を満たしたときの (7) の phase portrait *fig : hb + hb_{flow}*.

- [3] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, (1998).
- [4] Y. NISHIURA, T. TERAMOTO AND K. -I. UEDA, *Scattering and separators in dissipative systems*, Phys. Rev. E 67 (2003), pp. 056210-1–056210-7.
- [5] Y. NISHIURA, T. TERAMOTO AND K. -I. UEDA, *Dynamic transitions through scatters in dissipative systems*, Chaos 13(3) (2003), pp. 962–972.
- [6] H. -G. PURWINS, YU. A. ASTROV AND I. BRAUER, *Proceedings of the Fifth Experimental Chaos Conference*, edited by M. Ding, W. L. Ditto, L. M. Pecora and M. L. Spano (World-Scientific, Singapore, 2001), pp. 3–13.