

「ホモロジー理論と力学系」の補足として、

Shub の例

都立大 理 岡部恒治

Shub は、彼の論文[1]の中で、

$\text{topological entropy of } f \geq \max \log |\lambda|$

(但し λ は $f_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$
の固有値)

なる式が成立する為の条件を、論じている。その中の2, 3の補足的(蛇足的?)事柄を紹介する。

I 上の式が成立する為には, *compact manifold* 上の *homeo* であることが本質的である。

何故なら、次の Shub の反例が存在するからである。

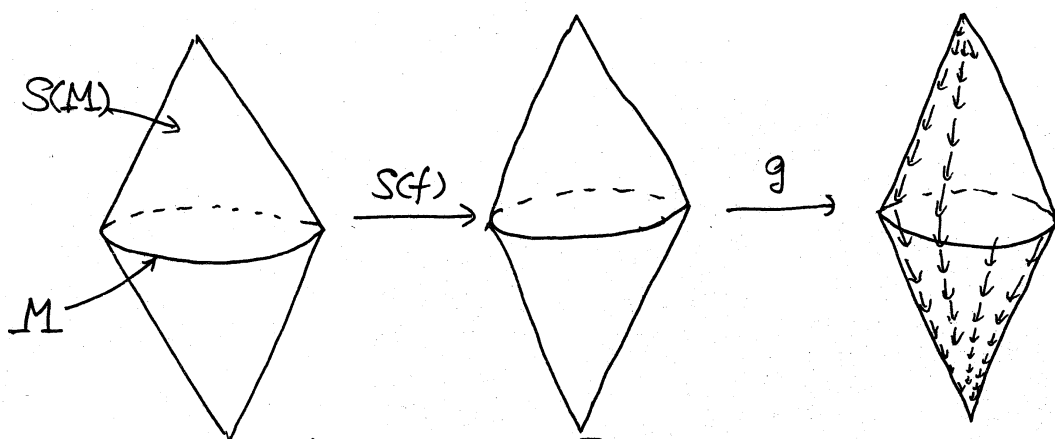
今、 $f: M \rightarrow M$ を 適当な *compact mfd* から、
それ自身への、*homeo* であって、最大固有値 $|\lambda| > 1$ を
取っておく。 M の suspension $S(M)$ を考え、

$S(f): S(M) \rightarrow S(M)$ を suspension map とする。

さらに、 $g: S(M) \rightarrow S(M)$ を 北極から南極へ向う
vector field によって引き起される infinitesimal trans-

formation ではないものを適当に1つ取っておく。(そうすると, g の fix point は, 南極と北極の2点). $g \circ S(f)$ を考えると, $g \circ S(f)$ の fix point も2点のみであり, (periodic pt も)

$$\text{entropy}(g \circ S(f)) = 0$$



一方 $(g \circ S(f))_*$ の最大固有値は $|\lambda| > 1$ である。

Ⅱ 次に isotopy class の中に, “=” を満すような (entropy が最小となる) diffeo が存在するか? という問題は 一般的に ^{ほと} No である 一般

上の問題は, 「ホモロジーとカテゴリーの講演」の中でみたように, Morse Smale diffeo f については,

$$\text{entropy}(f) = 0 = \log|\lambda|$$
 であるから, 成り立っている。凡人の直感では, Algebraic intersection number と geometric intersection number を一致させる と, 良いだろう。だから, $\pi_1(M) = 0$, $\dim M \geq 6$

でどうだろうか? と思ったが, algebraic intersection number の負の成分は消しようがないのである。Shub は, それについての反例を,

$$(S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3)$$

なる 6 次元 mfd. (もちろん $\pi_1(\quad) = 0$) で与えている。

- [1] Shub: "Dynamical systems, filtrations and entropy"
Bulletin of AMS Vol. 80 number 1 1974