

測度代数の L -イデアルについて

北大 応電 清水 誓 宏
東教大理 泉池 敬 司

§1. 序

測度代数の L -イデアルの研究は今までに J. L. Taylor [9], N. T. Varopoulos [11], C. C. Graham [1], T. Shimizu [8] 等がある。しかしながら maximal ideal space の構造があまりわかっていないこともあって、まだ L -イデアルについて十分にわかっているとはいえない。ここでは Taylor [9] の maximal ideal space が semigroup になるという結果を利用して、 L -イデアルの Gelfand 変換の共通ゼロ点集合の性質とその応用について今までわかっていいる結果を述べてみたいと思う。

§2 では L -イデアルのゼロ点集合が maximal ideal space の中でイデアルになることを示し、それに関連する話題について述べたい。§3 においては §2 での結果を応用して、特殊な L -イデアル、つまり non-symmetric homo からなる集合上で vanish しているものからなる L -イデアル、について

の結果を述べる。

§ 2. L -ideal の共通ゼロ点集合.

G を nondiscrete L.C.A. group とし, Γ をその dual group とする。 $M(G)$, $L^1(G)$ をそれぞれ G 上の bounded regular Borel measure からなる集合, G 上の Haar measure に関して絶対連続な bounded regular Borel measure からなる集合とする。両者とも total variation norm と convolution product で semisimple commutative Banach algebra と考えることができる。

$M(G)$ の closed subspace N が L -subspace であるとは N の元 μ に対して絶対連続な $M(G)$ の測度がすべて N に含まれる時にいう。特に closed ideal (closed subalgebra) での L -subspace になっているものを L -ideal (L -subalgebra) といい、 L -ideal I に対して

$I^\perp = \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } I \text{ のすべての元と互いに singular}\}$ が subalgebra をなす時に I を prime L -ideal と呼ぶことにする。まず初めに J. L. Taylor [9] による所の $M(G)$ の maximal ideal space の構造定理を紹介する。

定理 (Taylor). $M(G)$ に対して次の性質をもつ compact topological semigroup S と写像 θ が存在する。

- ① $\theta: M(G) \rightarrow M(S)$ は isometric into isomorphism.
 ② θ の像は $M(S)$ で weak* dense な L -subalgebra.
 ③ $M(G)$ の maximal ideal space は S 上の continuous semicharacter ($f(xy) = f(x)f(y)$) の集合 $\hat{S}$ と $|\hat{f}|$ の対応があって, その対応は次の形をしている。

$$\mu \longrightarrow \hat{\mu}(f) = \int_S f d\theta\mu, \quad \forall \mu \in M(G).$$

以後, $M(G)$ の maximal ideal space は $\hat{S}$ で考えることにする。 $\hat{S}$ は pointwise product で semigroup をなすことは容易にわかる, weak* topology で separately continuous topological semigroup になっている。 G の dual group Γ は $\hat{S}$ の中にうめ込めて $\{f \in \hat{S} : |f| = 1\}$ と isomorphic になっている。詳しいことは Taylor [9] を参照。又 ② より $\mu \in M(G)$, $f \in \hat{S}$ に $\hat{f}$ して $d\theta\mu_f = f d\theta\mu$ をみたす $\mu_f \in M(G)$ が存在することがわかる。

命題 2.1. $M(G)$ の closed subspace N が次の (*) の条件をみたせば, N は L -subspace である。

$$(*) \quad \forall \mu \in N, \forall f \in \Gamma \text{ に } \hat{f} \text{ して } \mu_f \in N.$$

証明. $\bar{G}$ を G の Bohr compactification (Γ_d の dual group) とする。 $\mu \in M(G)$ と $\bar{G}$ の任意の Borel set E に $\hat{f}$ して $\mu(E) \equiv \mu(E \cap G)$ とおくことによつて $M(G)$ から $M(\bar{G})$ の中

への isometric isomorphism を得る。又 Γ を $\bar{G}$ 上の関数と考えれば, Γ より生成される subalgebra は Stone-Weierstrass の定理より $C(\bar{G})$ で dense になっている。 $f \in \Gamma$ に対して, $d\Phi(\mu_f) = f d\Phi\mu$ であることから $\Phi(N)$ が $M(\bar{G})$ で L -subspace になっていることがわかり, N は $M(G)$ でも L -subspace になっていることがわかる。

系 2.2. $M(G)$ の closed ideal I に対して次は同値である。

- ① I : L -ideal。
- ② 命題 2.1 の (*) の条件をみたす。
- ③ $\forall \mu \in I, \forall f \in \hat{S}$ に対して $\mu_f \in I$ 。

二つの L -ideal I_1, I_2 に対して $\{\mu * \nu : \mu \in I_1, \nu \in I_2\}$ より生成される closed subalgebra を $[I_1 * I_2]$ で表わすことにする。

系 2.3. 二つの L -ideal I_1, I_2 に対して $[I_1 * I_2]$ は L -ideal である。

証明. $[I_1 * I_2]$ は (*) の条件をみたす closed ideal になっている。

$\mu \in M(G)$ に対して $L(\mu) = \{\nu \in M(G) : \nu \text{ は } \mu \text{ に対して絶対連続}\}$ とおく。

系 2.4 closed ideal I に対して, もし $\mu \in I (\mu \neq 0)$

$L(\mu) \subset I$ なるものが存在するならば $\tilde{I} = \{\nu \in I : L(\nu) \subset I\}$ は L -ideal である。

次に L -ideal の Gelfand 変換について調べるためにいくつかの定義をする。

定義. $\Sigma \subset \hat{S}$ が Γ -invariant であるとは

$\forall f \in \Sigma, \forall g \in \Gamma$ に對して $f \cdot g \in \Sigma$ であることによる。

定義. $M(G)$ の subset N に對して

$Z(N) \equiv \{f \in \hat{S} : \hat{\mu}(f) = 0, \forall \mu \in N\}$ とおく。 $\hat{S}$ の subset Σ に對して $I(\Sigma) \equiv \{\nu \in M(G) : \hat{\nu}(g) = 0, \forall g \in \Sigma\}$ とおく。

定理 2.5. L -ideal I に對して $Z(I)$ は Γ -invariant である。それ以上に closed ideal でもある。又 $\hat{S}$ の Γ -invariant subset Σ に對して $I(\Sigma)$ は L -ideal である。

証明. $\forall f \in \Gamma, \forall \mu \in I$ に對して $\mu_f \in I$ である。 $g \in Z(I)$ に對して $\hat{\mu}_f(g) = \hat{\mu}(f \cdot g) = 0$ であることから $f \cdot g \in Z(I)$ を得る。よって $Z(I)$ は Γ -invariant である。 $Z(I)$ が ideal になることも同様にやればよい。

逆に Γ -invariant subset Σ に對して、系 2.2 により $I(\Sigma)$ が L -ideal になることは明らかである。

次に L -ideal が Γ -invariant subset に對して定理 2.5 より決定される L -ideal であるための同値条件をあげる。証明は定理 2.5 を含味すればよい。

定理 2.6, $M(G)$ の L -ideal I に対して次は同値である。

- ① $I = I(\Sigma)$ とする Γ -invariant subset Σ が存在する。
- ② I は maximal ideal のいくつかの intersection で表わされうる。
- ③ I は prime L -ideal のいくつかの intersection で表わされうる。
- ④ $I = I(\Sigma(I))$ 。

注意、定理 2.6 の条件をみたさない L -ideal も存在する。

たとえば $L(G)$ がそうである。

定理 2.5 の前者の逆について次の事がわかっている。

定理 2.7, $M(G)$ の L -ideal I に対して $[M_c * I] \neq I$ ならば L -ideal ではない closed ideal I_0 が $Z(I_0) = Z(I)$ とするものが存在する。ただし M_c は continuous measure よりなる L -ideal とする。

実際に N. T. Varopoulos [11] によって $[M_c * M_c] \neq M_c$ であることがわかっているから、 L -ideal ではない closed ideal がそのゼロ点集合が Γ -invariant になるものが存在することがわかる。つまり Γ -invariant であることが closed ideal が L -ideal であるための十分条件にはなり得ないことがわかる。

最後にいくつかの問題を述べることにする。

(1) (group algebra における Helson の定理 と関係して)

I_1, I_2 を L -ideal と $I_1 \subsetneq I_2, Z(I_1) = Z(I_2)$ とする。その時に

$I_1 \subsetneq I_0 \subsetneq I_2, Z(I_0) = Z(I_1)$ をみたす L -ideal (又は closed

ideal) I_0 は存在するか? 特に I_2 として $L(G)$ の

radical の場合には存在するか?

(2) 次の条件をもつ L -ideal I は存在するか?

(#) I と異なる L -ideal I_1 に $\exists$ して $I \cap I_1 = \{0\}$ かつ $Z(I) \neq Z(I_1)$

又は

(#') I となる closed ideal $I_2 (I_2 \neq I)$ に $\exists$ して $Z(I) \neq Z(I_2)$

(3) closed ideal I に $\exists$ して, $Z(I)$ が proper closed ideal

ならば 系 2.4 の仮定がみたされ $\tilde{I}$ は L -ideal である。

その時に $Z(I) = Z(\tilde{I})$ か?

§3. $M(\Delta)$ について.

$M(G)$ に involution が次の様に定義できる。

$$\mu^*(E) \equiv \overline{\mu(-E)}, \quad E \text{ は任意の } G \text{ の Borel set.}$$

その involution を $M(G)$ を Banach * algebra と考える時,

Δ を symmetric homo 全体の集合とする。つまり

$$\Delta \equiv \{f \in \hat{S} : \hat{\mu}^*(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}, \forall \mu \in M(G)\}.$$

$$M(\Delta) \equiv \{\mu \in M(G) : \hat{\mu}(f) = 0, \forall f \in \hat{S} \setminus \Delta\} \text{ とおく。この } M(\Delta) \text{ は}$$

最初 J.H. Williamson [12] によって導入され, T. Shimizu [8] に

よ、 Σ proper L -ideal になる、ことが示された。 $\S 2$ の結果を使、この事を示す。

命題 3.1. $\hat{\Sigma} \setminus \Delta$ は P -invariant である。

証明. $f \in P, \mu \in M(G)$ に対して次がなりたつ。 $\forall g \in P, \mu \in M(G)$,

$$\hat{\mu}_f^*(g) = \int_G g d\mu_f = \int_G g \cdot f d\mu = \int_G g f d\mu^* = \int_G g d(\mu^*)_f.$$

よ、 Σ Rudin [17] Th. 1.3.6 によ、 $\Sigma (\mu_f)^* = (\mu^*)_f, \forall f \in P$ である。

次に $f \in P, g \in \Delta, \mu \in M(G)$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^*(f \cdot g) &= \int_S f \cdot g d\theta(\mu^*) = \int_S g d(\mu^*)_f = \int_S g d(\mu_f)^* \\ &= \int_S g d\mu_f = \int_S g \cdot f d\mu = \hat{\mu}(f \cdot g). \end{aligned}$$

よ、 $\Sigma f \cdot g \in \Delta$ である。これは Δ が P -invariant であることを示している。これより $\hat{\Sigma} \setminus \Delta$ が P -invariant であることは明らかである。

注意. Δ が closed subsemigroup になることも、命題 3.1 の証明と同様にしてわかる。 $\hat{\Sigma} \setminus \Delta$ は ideal にはなり得ない。

命題 3.1 と定理 2.5 より $M(\Delta)$ が L -ideal であることを知ることは容易である。又これは Williamson の問題 ([12]) に対する肯定的な解答でもある。

定理 3.2. $M(\Delta)$ は proper な L -ideal である。特に

$$M(\Delta) \subset M_c.$$

これから定理 3.2 の拡張を考えてみることにする。 G_d が G に discrete topology が備わった L.C.A. group を表わすことにする。すると $M_c = (M_d)^\perp = M(G_d)^\perp$ である。 G_c が G の topology より真に強い G を L.C.A. group にする topology τ を備えたものとすると、自然に $M(G_c) \subset M(G)$ と考えることができるのであるが (J. Imoue [3]), $M(\Delta) \subset M(G_c)^\perp$ が成立するであろうという予想がたつ。もう少し一般化するために Raikov system を考えることにする。

定義. F_α -set の collection $\mathcal{F}$ が Raikov system であるとは次の条件をみたすときにいう。

- ① $A \in \mathcal{F}$ に対して A の subset τ F_α -set はすべて $\mathcal{F}$ に属している。
- ② $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A+x \in \mathcal{F} \ (\forall x \in G)$.
- ③ $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A+A \in \mathcal{F}$.
- ④ $A_n \in \mathcal{F} \ (n=1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

特に次の⑤の条件をみたす時は symmetric Raikov system という。

- ⑤ $A \in \mathcal{F} \Rightarrow -A \in \mathcal{F}$.

1つの F_α -set を含む最小の Raikov system であるものを one generated Raikov system という。

Raikov system $\mathcal{F}$ に対して $M(\mathcal{F})$ を次の様に定義する。
 $M(\mathcal{F}) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ はある } \mathcal{F} \text{ の元上に concentrate して} \|\mu\| = 1\}$
 すると $M(\mathcal{F})^\perp$ は prime L -ideal になる。そして $M(G_\mathcal{F})$ に対して one generated Raikov system $\mathcal{F}$ で $M(G_\mathcal{F}) = M(\mathcal{F})$ となるものが存在する。このことから定理 3.2 は一般の Raikov system $\mathcal{F}$ に対して $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F})^\perp$ が成立するのではないのかという予想もできる。

定義. G の subset $E(\neq \emptyset)$ に対して, $F \subset G$ が $(E, 1)$ -indep であるとは, 相異なる $x_1, \dots, x_N \in F$ と正整数 $n_1, \dots, n_N$ に対して $\sum_{i=1}^N n_i x_i \in E$ が成立するのは $n_i = 0, 1 \leq i \leq N$ の時だけのときという。

補題 3.3. $\mathcal{F}$ が one generated proper symmetric Raikov system ($G \neq \mathcal{F}$ のとき proper と呼ぶ) とする。 $\mathcal{F}$ の生成元を H とする時 (group と考えてよい), もし perfect compact $(H, 1)$ -indep set P が存在するならば $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F})^\perp$ である。

証明. μ_0 を positive continuous measure で P 上に concentrate して $\|\mu_0\| = 1$ とする。 $\mu \equiv \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_0^*)$ とおくと $\mu = \mu^*$ であり μ は $Q = P \cup (-P)$ 上に concentrate して $\|\mu\| = 1$ 。
 - 万 $w_0 \in M(\mathcal{F})$ positive measure で $\|w_0\| = 1$ なるものに
 対して $w \equiv \frac{1}{2}(w_0 + w_0^*)$ とおく。Williamson [B] Prop 2 より

$\mu^{n_1} \omega^{m_1}$ と $\mu^{n_2} \omega^{m_2}$ は $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ であるときには互いに singular であることから $\|(\omega^2 - \mu^2)^n\| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ かつ $|(\omega^2 - \mu^2)^\wedge(f)| = 2$ となる $f \in \hat{S}$ が存在する。又このことは $f \notin \Delta$ であり $\hat{\omega}(f) \neq 0$ であることを示している。よって $M(\Delta)$ を ω である。 $M(\Delta)$ が L -ideal であることより $\omega \perp M(\Delta)$ であることがわかり、よって $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F})^\perp$ を得る。

この補題によって後者の予想に関して G が metrizable の時には成立することを証明することができる。

定理 3.4. G が metrizable のときには proper Raikov system $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ として $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F}_0)^\perp$ である。

証明。 $\mu \in M(\mathcal{F}_0)$ に対して、 $A \in \mathcal{F}_0$ が存在して μ は A に concentrate している。 A より生成される Raikov system を $\mathcal{F}_0$ とする。すると $\mu \in M(\mathcal{F}_0)$ である。もし $\mathcal{F}_0$ が symmetric でなければ $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F}_0)^\perp$ は容易にわかる。もし $\mathcal{F}_0$ が symmetric ならば Williamson [13] prop 1 の証明より perfect compact $(H, 1)$ -inden set が存在することがわかる。よって補題 3.3 より $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F}_0)^\perp$ である。つまり $\mu \perp M(\Delta)$ であることであるから $M(\Delta) \subset M(\mathcal{F})^\perp$ を得る。

注意。 G が metrizable でない時は一般に成立することはまだ証明されていない。

次に前者の予想が一般に成立することを示す。 G の

closed subgroup H に対して自然な写像 $\varphi: G \rightarrow G/H$ が考えられる。 φ より誘導される $M(G)$ から $M(G/H)$ への写像 π を次の様に定義する。

$\pi\mu(E) \equiv \mu(\varphi^{-1}(E))$, E は任意の G/H の Borel set.

補題 3.5. H を G での closed subgroup とし G_c は α -compact subset とする。

$$\Rightarrow \textcircled{1} \pi(M(G_c)) = M(G_c/H)$$

$$\textcircled{2} \pi(M(G_c)^\perp) = M(G_c/H)^\perp.$$

補題 3.6. K を G_c の α -compact open subgroup とする。

$\Rightarrow G_c$ の compact subgroup H が存在して G/H が perfect compact $(\varphi(K), 1)$ -invariant set を含むようにできる。

以上の補題のもとに次の定理を得ることが出来る。

定理 3.7. $M(\Delta)$ は $M(G_c)^\perp$ に含まれる。

証明. K を G_c の α -compact open subgroup とする。

補題 3.6 が成立する様な H と φ をとる。 φ_1 を $\varphi(K)$ より生成される Raikov system とすると $M(\varphi_1) = M(G_c/H)$ である。

任意の $\mu \in M(G_c)$ に対して補題 3.3 と 3.5 より $M(G/H)$ 上の non-symmetric homo f が存在して $f \circ \pi(\mu) \equiv f(\pi\mu) \neq 0$ となるものがある。又 $f \circ \pi$ が $M(G)$ 上の non-symmetric homo になることが容易に確かめられて $\mu \notin M(G)$ を得る。

$M(\Delta)$ と $M(G_2)$ が L -ideal であることより $M(\Delta) \subset M(G_2)^+$.

$\mu \in M(\Delta)$ に対し $\hat{\mu}^*(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}$, $\forall f \in \hat{S}$ が成立する。
つまり $M_1 \equiv \{\mu \in M(G) : \hat{\mu}^*(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}, \forall f \in \hat{S}\}$ とおくと,
 $M(\Delta) \subset M_1$ である。 M_1 に関し J. L. Taylor [9] は次の事
を示した。

$\square$ S の maximal group $K_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ のすべての合併集合
を $K \equiv \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ とするとき $K \subseteq S$ であり

$m(K) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } K \text{ に concentrate している}\}$ とすると
 $M_1 \subset m(K)$ である $\square$

このことから $M(\Delta) \subset m(K)$ であることがわかる。又

$M_2 \equiv \sum_{\alpha \in \Lambda} m(K_\alpha)$ とおくと, $m(K_\alpha) \neq \{0\}$ ならば $m(K_\alpha)$

に対し S での topology より 真に強い G を L.C.A. group に
する topology が存在して $m(K_\alpha)$ と $\text{Rad } L(G_\alpha)$ と同型にな

っている (Taylor [10])。 $M_1 = M_2$ であるかどうかまだ

わかっていないのであるが (Taylor [10] の問題), もし $M_1 = M_2$

である事が証明できれば, $M(\Delta) \subset M_1$ であることと, 定理 3.7.

によつて $M(\Delta) = \text{Rad } L(G)$ であることがわかる。これは又

Williamson [12] の問題に他ならない。

最後に $\hat{S}$ の中での Δ がどの様にあるか 注意しておきた

い。まず $H \equiv \{f \in \hat{S} : |f|^2 = |f|_1\}$ とおく。Taylor [9] によ

つて $H \subseteq \hat{S}$ であることがわかってゐる。又 Johnson [6] によ

って $\Delta \setminus H \neq \emptyset$ であることも得られており, $H \setminus \Delta \neq \emptyset$ であることは容易にわかる。 $\Delta \setminus H$ と Δ の関係について次の事が得られている。

命題 3.8. $\Delta \setminus H \subset \overline{\hat{S} \setminus \Delta}$, ここで $\overline{}$ は $\hat{S}$ の weak*-closure を表わす。

この命題は $\mu \in M(\Delta)$ の Gelfand 変換は $\hat{S} \setminus H$ で vanish していることを示している。

$M(\Delta)$ についての問題は次のものが考えられる。

① (C.C. Graham [1] の M_0 が prime L-ideal ではないということに關係して)

$M(\Delta)$ は prime L-ideal ではない。

② $M(\Delta) = \text{Rad } L(G)$ (Williamson [2] の問題)。

文 献

[1] C.C. Graham: $M_0(G)$ is not a prime L-ideal,

Proc. A.M.S., 27 (1971), 557-562.

[2] E. Hewitt and K.A. Ross: Abstract harmonic analysis I, Springer-Verlag, 1963.

[3] J. Inoue: Some closed subalgebras of measure algebras and a generalization of P.J. Cohen's theorem, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 278-294.

- [4] K. Izuchi: On a zero set of Gelfand transforms of L -ideals of measure algebras, to appear.
- [5] K. Izuchi and T. Shimizu: Topologies on groups and a certain L -ideal of measure algebras, to appear.
- [6] B.E. Johnson: Symmetric maximal ideal in $M(G)$, Proc. A.M.S., 18(1967), 1040-1045.
- [7] W. Rudin: Fourier analysis on groups, New York, 1962.
- [8] T. Shimizu: L -ideals of measure algebras, Proc. Japan Acad., 48(1972), 172-176.
- [9] J.L. Taylor: The structure of convolution measure algebras, Trans. A.M.S., 119(1965), 150-166.
- [10] ———: L -subalgebra of $M(G)$, Trans. A.M.S., 135(1969), 105-113.
- [11] N.T. Varopoulos: A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact abelian group, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 16(1966), 121-143.
- [12] J.H. Williamson: Banach algebra elements with idempotent powers and theorem of Wiener-Pitt Type, Function algebra, Chicago (1966), 186-198.
- [13] ———: Raikov systems and the pathology

of $M(G)$, *Studia Math.*, 31 (1968), 399-409.

- [14] ——— : Raikov systems, *Symposia on theoretical physics and mathematics*, 8 (1968), 173-183.