

Deformations of $\mathbb{P}^n$

都立大理 辻 元

0. 序

複素多様体論において与えられたコンパクト複素多様体の変型を研究することは基本的である。しかし、与えられた複素多様体の大域的な変型を知ることは非常に難しく、確かな研究手段は現在、全く存在しない。

このことは、主として変型の極限の状態を把握する手段が殆ど存在しないことに起因している。本稿では $\mathbb{P}^n$ の大域的な変型をベクトル束の複素解析族の切断の極限操作を行なうことにより解析する。

$\mathbb{P}^n$ の変型については、次の諸結果が知られている。

- (1) $\mathbb{P}^1$ の変型は $\mathbb{P}^1$ (Riemann)
- (2) $\mathbb{P}^2$ の変型は $\mathbb{P}^2$ (Kodaira - Spencer)
- (3) $\mathbb{P}^n$ の Kähler 的変型は $\mathbb{P}^n$ (Hirzebruch - Kodaira)

さらに最近、微分幾何に於て Calabi の予想が肯定的に解かれたので ()、(3) の研究の結果と合わせて、次の驚異的結果が得られた。

(4) $\mathbb{P}^n$ と微分同相な Kähler 多様体は、 $\mathbb{P}^n$ と複素解析的に同相である。

しかし、Kähler 多様体の変型は Kähler 多様体とは限らないので $\mathbb{P}^n$ の変型は $\mathbb{P}^n$ に限るとはすぐには言えない。次の定理が我々の目標である。

Theorem $\mathbb{P}^n$ の変型は $\mathbb{P}^n$ に限る。

1. 直線束、Morihezon 性

Theorem の証明には、次の Theorem' が証明される必要十分である。

Theorem' $\Delta \subset \mathbb{C}$ を単位円板、 $\pi: M \longrightarrow \Delta$ をコンパクト複素多様体の複素解析族で、次の条件を満足すると仮定する。

条件 — $\exists \{t_j\}, t_j \longrightarrow 0$ で $M_{t_j} = \pi^{-1}(t_j)$ が

$\mathbb{P}^n$ と双正則同値なものが存在する。

この時 $M_0 = \pi^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^n$ と双正則同値である。

以下、Theorem' を証明する。

$M_t = \pi^{-1}(t)$ ($t \in \Delta$) とおく。 $\mathcal{K}_t$ を M_t の標準束とする。 まず M_0 が Moishezon manifold であることを証明しておこう。 これを示す為 に $\lambda_t(\omega) = \dim H^0(M_t, \mathcal{O}(\mathcal{K}_t^{-\omega}))$ とおく。 仮定から明らかに

$$\lambda_t(\omega) = \binom{n+(n+1)\omega}{n}$$

が、全ての ω について成り立っている。

上半連続性定理により

$$\lambda_0(\omega) \geq \binom{n+(n+1)\omega}{n}$$

が成り立つので、特に $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda_0(\omega)/\omega^n > 0$

が出て、 M_0 が Moishezon 多様体であることがわかる。

M_0 が Moishezon manifold であることから

$$\dim H^1(M_0, \mathcal{O}_{M_0}) = 0 \quad \dim H^2(M_0, \mathcal{O}_{M_0}) = 0$$

が直ちに従う。我々は、必要なら考察を

$0 \in \Delta$ の十分小さな近傍の上の family に限定

することで、上半連続性定理により、

$$\dim H^1(M_t, \mathcal{O}_{M_t}) = 0, \quad \dim H^2(M_t, \mathcal{O}_{M_t}) = 0$$

が全ての $t \in \Delta$ について成立しているとして一般性を失わない。このことから容易に

$$\dim H^1(M, \mathcal{O}_M) = 0, \quad \dim H^2(M, \mathcal{O}_M) = 0$$

となるので、exponential sequence

$$\rightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathcal{O}_M)$$

から、 $H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$ が同型、即ち、 M 上の直線束は、その Coker 類と 1:1 に対応していることがわかる。明らかに $H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M_t, \mathbb{Z})$ なる自然な準同型は同型である (t に依らず)。

従って、我々は $\exists \mathfrak{L} \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ で $\mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}|_{M_t}$ が $\text{Pic } M_t \cong \mathbb{Z}$ の正の生成元にな、ていものをとる事ができる。 $\mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}|_{M_t}$ とおくと、 $\{\mathfrak{L}_t\}$ は、直線束の複素解析族にな、てい。

さて、後の準備の為に、次の事を見ておくことにする。

Lemma 1.1 $\pi: M \rightarrow \Delta$ は Moishezon morphism で、 M_0 以外、全ての M_t が $\mathbb{P}^n$ と双正則同値にな、ていとして良い。

$P^0\pi_*\mathcal{L}$ を考える. この直接層は Δ 上のバクトル束で Δ が Stein だから大域的切断で生成されている. $s_0, \dots, s_N \in H^0(\Delta, P^0\pi_*\mathcal{L})$ を生成系として有理写像

$$\mathcal{M} \ni x \longmapsto (\pi(x), [s_0(x) : \dots : s_N(x)]) \in \Delta \times \mathbb{P}^N$$

を考える. $\overset{\text{into}}{\text{bimeromorphic}}$ で M_0 以外の M_t に制限すると $\text{into-biholomorphic}$ と仮定できる. 従って, $\mathbb{P}^n$ の Kähler 的変型は $\mathbb{P}^n$ という結果から M_0 以外の π の fibre は全て $\mathbb{P}^n$ と双正則同値であるとして良い. このことから M_0 が Moishezon manifold であることから $\pi: \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ は Moishezon morphism となる*. $\square$

注: この場合 parameter space を少し縮める必要がある. 詳しくは Fujiki [] を参照.

2. Harmonic theory.

この節では, コンパクト複素多様体の複素解析族とその上のバクトル束の複素解析族が与えられた時, 良く知られている上半連続性

定理を少し精密化して、 M_0 を解析する。議論は $\pi: M \longrightarrow \Delta$ 上の直線束の族 $\mathcal{L}^\infty = \{\mathcal{L}_t^\infty\}$ ($t \in N$) に限るが、一般の場合にも直ちに拡張できる。

$h = \{h_t\}_{t \in \Delta}$ を h が M の Hermite 計量 (勿論 C^∞ 級とする) で、 $h_t = h|_{M_t}$ となるものとする。 $a = \{a_t\}_{t \in \Delta}$ を、各 a_t が $\mathcal{L}_t^\infty$ の Hermite fibre 計量で、 t に関して可微分に依存しているものとする。
Dolbeault 分解:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{L}_t^\infty) \rightarrow \mathcal{E}^{0,0}(\mathcal{L}_t^\infty) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}(\mathcal{L}_t^\infty) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,2}(\mathcal{L}_t^\infty) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

を考えよう。ここに $\mathcal{E}^{p,q}(\mathcal{L}_t^\infty)$ は $\mathcal{L}_t^\infty$ 値の可微分 (p,q) form の芽の層である。 $B_t^{p,q} = \Gamma(M_t, \mathcal{E}^{p,q}(\mathcal{L}_t^\infty))$ と置く。 $B_t^{p,q}$ には、 h_t と a_t から自然に Hermite 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t^{p,q}$ とノルム $\|\cdot\|_t^{p,q}$ が自然に定義される (詳しくは、[] 参照)。 $\square_t$ を Hermite 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t^{p,q}$ に付随した複素ラプラシアンとする。

以後 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t^{p,q} \parallel \|\cdot\|_t^{p,q}$ も簡単の爲 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t, \|\cdot\|_t$ と書く。次の命題は良く知られている。

Proposition 2.1 (A priori Estimate []) Δ の任意の相対コンパクトな部分集合 S を固定する時、

$\exists C_k - C_k(S) > 0$; k と S のみによる定数が存在して
 $\forall f \in B_t^{p,q}, t \in S$ に対して: 不等式

$$\|f\|_{k+2} \leq C_k (\|\square_t f\|_k + \|f\|_k)$$

が成立する。ここに $\|\cdot\|_k$ は $B_t^{p,q}$ の k 次の Sobolev norm である。□

我々は上の Proposition で $S = \Delta$ としてしまてよいことは明らかである (family を制限すればいい)。そこで以後 C_k は k のみに依存すると仮定する。

まず L_0 の holomorphic global section e_0 で $\|e_0\|_0 = 1$ となるものを構成しよう。各 j に対し $\Gamma(M_j \cap (L_j))$ の元 e_{0j} で $\|e_{0j}\| = 1$ となるものをとり、 $\{e_{0j}\}$ の部分列の“極限”として e_0 を構成しようというのが基本構想である。

まず M_0 を M 内の座標近傍系 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ で覆い、各 U_λ とその上の座標 $\alpha_\lambda: U_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ は次の条件を満足するとする;

(1) α_λ は $\mathbb{C}^n$ 内の unit open polydisk $\Delta^{n+1} \wedge$ の onto biholomorphic mapping である。

(2) $t = \pi^* \tau$ (同一視) とおくと $U_\lambda \cap M_0 = \{p \in U_\lambda; t=0\}$ となる。

(3). $\alpha_\lambda = (\alpha'_\lambda, t)$ ($\alpha'_\lambda: U'_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^n$) の形にな、て
 いる。

さて、 $M = \bigcup U_\lambda$ とな、てい、ると仮定してよ
 のので、そう仮定して話を進める。射影
 $p_\lambda: U_\lambda \longrightarrow U_{\lambda_0} = U_\lambda \cap M_0$ を $p_\lambda(\alpha_\lambda) = (\alpha'_\lambda, 0)$ で
 定義する。 $\mathcal{U}$ に関する $\mathcal{A}$ の変換関数系を
 $\{p_{\lambda\mu}\}$ とする時、 $\mathcal{A}_{t_j}$ の切断 e_{0j} は、正則関数系
 $\{e_{0j}^\lambda\}$, $e_{0j}^\lambda: U_{\lambda t_j} = U_\lambda \cap M_{t_j} \longrightarrow \mathbb{C}$ で、 $U_{\lambda t_j} \cap U_{\mu t_j}$ で
 $e_{0j}^\lambda = p_{\lambda\mu} e_{0j}^\mu$ を満足するものと自然に同一視さ
 れる。さて $\mathcal{A}_0$ の broken section $e_{0j}^* = \{e_{0j}^{\lambda*}\}$ を
 関係式 $p_\lambda^* e_{0j}^{\lambda*} = e_{0j}^\lambda$ on $U_{\lambda t_j}$ で定義する。

Proposition 2.1. により、簡単な評価によりよと λ
 に依らない正定数 C が存在して (Sobolev の lemma を
 使う); $|e_{0j}^{\lambda*}| \leq C$ が全ての j, λ に対して
 成立するとしてよい。これと Montel の定理か
 ら次の Lemma を得る。

Lemma 2.1 e_{0j}^* は、各 U_{λ_0} 上で広義一様にお
 の切断 e_0 に収束し $\|e_0\| = 1$ が成立するとして
 一般性を失わない。

e_{0j} (resp e_0) の定義する M_{t_j} (resp M_0) の因子

を D_{0j} (resp. D_0) と書く。 $P_0 \in M_0$ を $P_0 \notin D_0$ となるように任意に一つ選ぶ。 D_{0j} は D_0 にフィルタ一収束するので、 P_0 を通る $\pi: M \longrightarrow \Delta$ の切断 $s: \Delta \longrightarrow M$ を $s(t_j) \notin D_{0j}$ が全ての j に対して成立する様にとれる。 $s(t_j) = P_{0j}$ と書く。

$\mathbb{P}^n$ の homogeneous coordinate を $[z_0: z_1: \dots: z_n]$ とし $\mathbb{P}^{n-1}$ をその部分多様体 $\{[z_0: \dots: z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_0 = 0\}$ と同一視する。 $F_j: \mathbb{P}^n \longrightarrow M_{t_j}$ を $F_j([1: 0: \dots: 0]) = P_{0j}$, $F_j(\mathbb{P}^{n-1}) = D_{0j}$ を満たす双正則写像とする。 F_j の存在は明らかである。 $\mathbb{P}^n$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\nu)$ ($\nu \geq 0$) の大域切断全体は degree ν の $z_0, \dots, z_n$ に関する homogeneous polynomials と同一視できる。

今 $H^0(M_{t_j}, \mathcal{O}(\mathcal{E}_{t_j}^{\otimes \nu}))$ の部分ベクトル空間 $E_{\nu, j}$ を $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(\nu))$ の部分ベクトル空間 $\{\text{homogeneous polynomials of degree } \nu \text{ in } z_1, \dots, z_n\}$ に F_j により自然に対応するものとして定義する。 $E_{\nu, j}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nu, j}$ に関する正規直交基底 $\{e_{\nu, j}^1, \dots, e_{\nu, j}^{N_\nu}\}$ ($N_\nu = \binom{n+\nu-1}{n}$) をとる。 この時、次の補題は Lemma 2.1 と同様に証明される。

Lemma 2.2. $\{e_{\nu, j}^1, \dots, e_{\nu, j}^{N_\nu}\}$ から作られる。

broken sections $\{e_{1j}^{**}, \dots, e_{Nj}^{**}\}$ は、各 U_{q_0} 上で広義一様に収束し、或る $H^0(M_0, \mathcal{O}(\mathcal{A}_0^{(m)}))$ のベクトル部分空間 E'' の正規直交系 $\{e_1'', \dots, e_{N''}''\}$ に収束するとしてよい。□

上の補題により十分大きな n に対し、有理写像 $\Phi_n: P \in M_0 \mapsto [e_1''(P) : \dots : e_{N''}''(P)] \in \mathbb{P}^{N''-1}$ の像の次元は、少なくとも $n-1$ 次元になることがわかる。

3. Euler vector fields

$\mathbb{P}^n$ 上の正則ベクトル場 Z_0 を homogeneous coordinates を使って $\hat{Z}_0 = \sum_{j=1}^n (\frac{x_j}{x_0}) \partial / \partial (\frac{x_j}{x_0})$ と定義する。この正則ベクトル場を Euler vector field と呼ぶ。
 $\hat{Z}_0$ を使って M_t 上の正則ベクトル場 Z_{q_j} を $Z_{q_j} = F_{q_j}^* \hat{Z}_0$ で定義する。 M_t の正則接束 T_{M_t} の可微分切断の空間の自然な Hermitian inner product $\langle, \rangle_t^\#$ が $\hat{Z}_0$ により定義される。 $\| \cdot \|_t^\#$ を $\langle, \rangle_t^\#$ に随伴するノルムとする。次の補題は前節の議論と同様の議論から従う。

Lemma 3.1. M_t 上の正則ベクトル場 $Z_{q_j}^*$ を

$Z_{oj}^* = Z_{oj} / \|Z_{oj}\|_{t_j}^{\#}$ で定義する。このとき、一般性を失うことなく Z_{oj}^* から作られる $\mathcal{O}_{M_0}$ の broken sections は各 U_α 上で広義一様に収束してその極限は、 M_0 上の正則ベクトル場 Z_0 を定義する。^{とてよい} さらに $\|Z_0\|_0 = 1$ が成立する。□

ところで前節で作った $\Phi_v: M_0 \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ のファイバーは、 Z_0 のひき起こす M_0 の正則変換の 1 パラメーター族の作用に関して明らかに stable である。従って、 $\dim \text{im } \Phi_v \leq n-1$ が成立する。結局、我々は、次の補題が成り立つ。

Lemma 3.2. $\exists v_0 \in \mathbb{N}$, st. $\dim \Phi_{v_0} = n-1$. □

さて、 Z_{oj} の orbit は、 M_{t_j} を $\mathbb{P}^n$ と同一視したとき、degree 1 の $\mathbb{P}^1$ 、即ち直線になっているが、 Z_0 の orbit はどうなっているのか解析してみよう。

$Y = \mathbb{P}^1 \times \mathcal{M}$, $\pi: Y \longrightarrow \Delta$ natural projection とおく。
 $\beta_{Y/\Delta}: D_{Y/\Delta} \longrightarrow \Delta$ を morphism $\pi: Y \longrightarrow \Delta$ に付随した relative Douady space とする。
 $\pi: \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ は、Moishezon morphism なので (c.f.

Lemma 1.1) 一般性を失うことなく $D_{Y/\Delta}$ の任意の既約成分 D_α は $\beta_{Y/\Delta}|_{D_\alpha}: D_\alpha \longrightarrow \Delta$ が proper, Moishezon morphism になっているとしてよい。 $H = \text{Hol}(\mathbb{P}^1, \mathcal{M})$ とおくと, H は, Y の Douady space D_Y の中で Zariski open である。 $\text{Hol}(\mathbb{P}^1, \mathcal{M}_{t_i})$ の既約成分で, $\mathbb{P}^1$ から $\mathcal{M}_{t_i}$ の中の直線 Λ の同型を含むものを Δ 一つとり, その $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{M}_{t_i}$ の Douady space の中での閉包を D_{0,t_i} とする。さらに, D_{0,t_i} を含む $D_{Y/\Delta}$ の既約成分を一つとり, それを D_0 とする。
 $\beta_0: D_0 \longrightarrow \Delta$ を $\beta_{Y/\Delta}$ の $D_0 \cap$ の制限, $\rho_0: \mathcal{K}_0 \longrightarrow D_0$ を universal family とする。 $\pi_0: \mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ を projection $D_{Y/\Delta} \times_Y Y \longrightarrow Y \longrightarrow \mathcal{M}$ から誘導されるものとする。 $\gamma_0 = \pi_0 \circ \rho_0$ とおく。
 次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{K}_0 & & \\
 & \swarrow \pi_0 & \downarrow \gamma_0 & \searrow \rho_0 & \\
 \mathcal{M} & & \Delta & & D_0 \\
 & \searrow \pi & \swarrow \beta_0 & & \\
 & & \Delta & &
 \end{array}$$

さて, 次の補題を引用する。

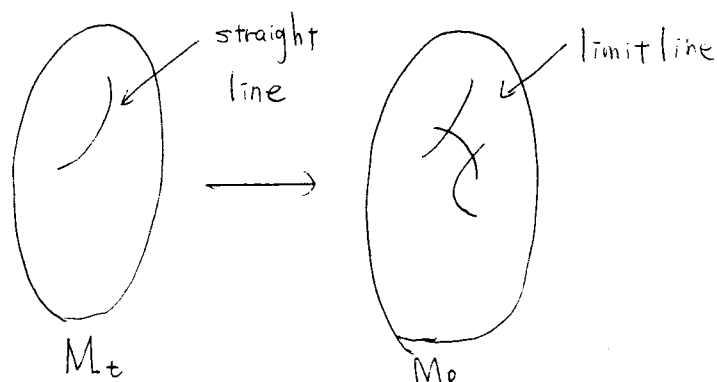
Lemma 3.3. 既約複素解析空間の間の morphism の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{X} & \\
 \pi \swarrow & \downarrow f & \searrow p \\
 M & S & D \\
 \uparrow \varphi & & \nwarrow \beta
 \end{array}$$

が与えられ β, p, φ は proper であると仮定する。
 $M_{\Delta_0} = \varphi^{-1}(\Delta_0)$ ($\Delta_0 \in S$) の近傍で β が proper, φ (at
surjective) であると仮定する。さらに φ は smooth
で連結な fibre を持つものとする。 $d_0 \in D$ を $\beta(d_0)$
 $= 0$ なる点とする。次の 3 条件を仮定する。
(1) β は d_0 で smooth. (2) $\mathcal{X}_{d_0} = p^{-1}(d_0)$ は irreducible,
smooth, $\dim. 1$. (3) $\pi(\mathcal{X}_{d_0}) = M_{\Delta_0}$. なる $\mathcal{X}_{d_0}$ を含む既
約成分 $\mathcal{X}_{d_0}$ がある。 $\Rightarrow$ この時、任意の $\Delta \in S$ < 任
意の $M_{\Delta, \Delta_0} = \varphi^{-1}(\Delta)$ の既約成分 M_{Δ, Δ_0} に対して あ
る $\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0}$ の既約成分 $\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0}$ が存在して $\pi(\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0}) = M_{\Delta, \Delta_0}$
で $\dim \pi((\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0})_d) = 1$ が成り立つ。ここで
 $(\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0})_d = \mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0} \cap \mathcal{X}_d$ ($\mathcal{X}_d = p^{-1}(d)$), $D_{\Delta, \Delta_0} =$
 $p(\mathcal{X}_{\Delta, \Delta_0})$. □

上の Lemma を用いて Z_0 の orbit が rational
curve (の一部) になることを見よう。 C を
 $\mathbb{P}^n$ の中の直線とする時 $H^1(C, \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_C(-1)) = 0$ なので

B_0 は $D_{0,t}$ の各点で smooth である。従って、上の Lemma から容易に $\pi_0: \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$, $\delta_0: \mathcal{X}_0 \longrightarrow \Delta$ は全射であり、 Z_0 の orbit は rational curves の Zariski open になっていることがわかる。別の言い方をすれば、 M_t ($t \neq 0$) の含む deg 1 の有理曲線は M_0 中の有理曲線の和に収束させることができる訳である。



さらに、有理写像 $\pi_0: M_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_0-1}$ の fibres は、limit line の 1 つの component に一般になっている (special な所では解らない)。

π_0 の fibre (の閉包) が P_0 を通ることを見よう。その為には、或る $1 \leq j \leq m$ に対し e_i/e_j が、少なくとも 1 つの fibre 上 mon const なる。実際 $H^0(M_t, \mathcal{O}(\mathcal{E}_t^{\otimes j}))$ の $\langle, \rangle_t$ は

関する正規直交基底を $H^0(M_0, \mathcal{O}(E_0))$ のベクトル部分空間の正規直交基底に収束させて (broken sections の technic を用いて). それを使って有理写像 $\psi_{\mu}: M_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_{\mu}-1}$ を作る. 再び増大度より, 十分大なる M_0 に対し ψ_{μ} は into bimeromorphic になることがわかる. ここで Φ_0 の fibre の ψ_{μ} による image の次数を考えると μ_0 になり, この事から limit rational curve は fibre (Φ_0 の) になる部分以外は全て P_0 に含まれてしまうことがわかる. ところが limit line は, 連続性により P_0 を通るので, これから Φ_0 の fibre (の閉包) は全て P_0 を通ることになる. $\mathcal{O}_j$ に対して e_i/e_j が, 一般の fibre (Φ_0 の) 上 monomax になることは, P_0 と M_0 の任意の点を結ぶ limit line が存在することに注意すると (それは, 簡単にわかる), 簡単に出来るが 長くなるので省略する.

さて, 以上の準備の下に: いよいよ, 核心的な次の lemma を証明しよう.

Lemma 3.4. $\limsup_{j \rightarrow \infty} \|Z_{0,j}\|_{t_j}^\# < \infty$

(C) 次のような μ のうち最小の μ_0 をとる.

(*) $\exists \hat{f}_j \in H^0(M_{t_j}, \mathcal{O}(\mathcal{E}_{t_j}^{\otimes \mu}))$ の列 $\{f_j\}$ が存在して、この部々列の limit $\hat{f}_0$ を作る. また $\exists f_0 = \hat{f}_0$ ($\mathcal{E}_0$ は general な $\mathcal{E}_0$ の fibre と nonconstant).

$\Rightarrow f_j = \hat{f}_j (\mathcal{E}_0)^{\mu_0} = f_j^0 + \dots + f_j^{\mu_0}$ として degree により分解する. つまり $Z_{0,j} f_j^k = \mathcal{E} f_j^k$.

$\Rightarrow \limsup_{j \rightarrow \infty} \|Z_{0,j}\|^\# = \infty$ とする. このとき

$$\begin{aligned} Z_0^2 f_0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} Z_{0,j}^2 (f_j^0 + \dots + f_j^{\mu_0}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} Z_{0,j} (f_j^0 + 2f_j^1 + \dots + \mu_0 f_j^{\mu_0}) / \|Z_{0,j}\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ Z_{0,j} ((1-\mu_0)f_j^0 + (2-\mu_0)f_j^1 + \dots + f_j^{\mu_0-1}) \right. \\ &\quad \left. + \mu_0 Z_{0,j} (f_j^1 + \dots + f_j^{\mu_0}) \right\} / \|Z_{0,j}\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (Z_{0,j} ((1-\mu_0)f_j^0 + (2-\mu_0)f_j^1 + \dots + f_j^{\mu_0-1}) / \|\mathcal{E}_{0,j}\| \\ &= 0 \quad (\mu_0 \text{ の最小性から}) \end{aligned}$$

従って Z_0 は $\mathcal{E}_0$ の一般の fibre 上では一点で 2 位の零をもち他では 0 にならない vector field である. 従って、結局 Z_0 は $\equiv 0$ になぜなら

Z_0 は $\mathcal{P}_0$ で 0 となり、その上にそれを通る general fibre 上 $\mathcal{P}_0$ との交わりで 2 位の 0 をもつかうのである.

これは $\|Z_0\| = 1$ に矛盾する $\quad \text{q.e.d.}$

4. Contractions.

α を $0 < |\alpha| < 1$ なる複素数とし M_0 の 自己同型 $g = \exp(\log \alpha \cdot Z_0)$ を考える。ここで、 Z_0 は $\{Z_{0j}\}$ の limit である (Lemma 3.4. による)。(必要なら部分列をとる)。 $\exp$ は 指数写像、 $\exp: H^0(M_0, \mathcal{O}_{M_0}) \rightarrow \text{Aut}_0 M_0$ である。

Z_0 は P_0 で isolated 0 をもつ 実際、 $(y_1, \dots, y_n)$ を P_0 の近傍の M_0 の local coordinate とすると

$$Z_0 = \sum_{i=1}^n y_i \partial / \partial y_i + (\text{higher order terms})$$

なる。なぜなら 先頭項を $\sum a_{ij} y_i \partial / \partial y_j$ として matrix (a_{ij}) を書くと $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になる、これは、

Both residue が不変という ことと同じだからである (各 Z_j に対し同じ様に P_{0j} の周りの coordinate を展開すると 上の matrix は 全て $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と存する。)

各 Z_{0j} の fibre は 結局 Z_0 の orbit の union になる。このことから g は $[M_0 - \{Z_0 \text{ の orbit} \}] \cup [P_0]$ の contraction になることは容易に出てくる。

$$[M_0 - \{Z_0 \text{ の } 0\text{-locus}\}] \cup [P_0] \cong \mathbb{C}^n$$

であり $g^*(e_i/e_0) = \alpha (e_i/e_0)$ となる。

これは $f_i = (e_i/e_0)$ とおくと、 $(f_1, \dots, f_n)$

は $M_0 - D_0$ の global coordinate になる.

$D_i = \{0\text{-locus of } e_i\}$ とおくと同様にして
 $M_0 - D_i \cong \mathbb{C}^n$ がでてくる. $M_0 - D_i$ の global
 coordinate として $(e_0/e_i, \dots, \widehat{e_i/e_i}, \dots, e_n/e_i)$ がと
 れることはいふまでもない. これから $M_0 \cong \mathbb{P}^n$
 となる. Q.E.D.

References

- [1] Fujiki, A. Deformations of Uniruled manifolds
 , Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17 (1981) 687-702
- [2] Fujiki, A. Relative algebraic reductions and relative
 Albanese map for a fibre space in $\mathcal{C}$, to appear.
- [3] Hirzebruch, Kodaira K. On the complex projective
 spaces, J. Math. Pures Appl. 36 (1957), 201-216
- [4] Kato, Ma. Complex structures on $S^1 \times S^5$, Jour.
 of Math. Soc. of Japan, Vol. 28 (1976) 550-576
- [5] Kodaira, K. Spencer, D.C. Undeformation of
 complex analytic structure, I, II, Ann of Math, 67
 (1958), 328 ~ 466
- [6] Yau, S.T., On the Ricci curvature of

compact complex Kähler manifold and the complex
Monge-Ampère Equation I, Comm Pure and Appl.
Math. XXXI (1978), 339-411.