

$\Lambda_p(f)$ の線形性と $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ について

松江工業高等専門学校 中村 元 (Gen Nakamura)

Matsue National College of Technology

広島女学院大学 橋本 一夫 (Kazuo Hashimoto)

Hiroshima Jogakuin University

1 準備

$f(\neq 0)$ を実数直線 $\mathbb{R}$ で定義された L_p -関数とし, $1 \leq p < \infty$ とする. 任意の実数列 $\mathbf{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ に対して, 次を定義する:

$$\Psi_p(\mathbf{a}; f) = \left(\sum_k \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_k) - f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\Lambda_p(f) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\infty : \Psi_p(\mathbf{a}; f) < +\infty\}.$$

すると, 次の結果は知られている (cf.[3]):

- $\mathbf{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ に対して, $\Psi_p(|\mathbf{a}|; f) = \Psi_p(\mathbf{a}; f)$ が成り立つ. ここで $|\mathbf{a}| = (|a_n|)$;
- $1 \leq p \leq q < +\infty$ に対して, $\Lambda_p(f) \subset \Lambda_q(f)$;
- $\Psi_p(\mathbf{a} - \mathbf{b}; f) \leq \Psi_p(\mathbf{a}; f) + \Psi_p(\mathbf{b}; f)$, つまり, 集合 $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}^\infty$ の加法的部分群をなしている.

以下で, $W^{1,p}(\mathbb{R})$ を Sobolev 空間, つまり, $L_p(\mathbb{R})$ に属する関数 f で, 超関数の意味での導関数 Df が $L_p(\mathbb{R})$ に属するものの全体とする. 特に, $f \in L^1(\mathbb{R})$ で, Df が $\mathbb{R}$ 上で有界変動を持つ測度となるとき, f を 有界変動関数と呼ぶ. このような関数のクラスを $BV(\mathbb{R})$ で表わす. つまり,

$$f \in BV(\mathbb{R}) \iff \begin{array}{l} \mathbb{R} \text{ 上の Radon 測度 } \exists \mu: |\mu|(\mathbb{R}) < +\infty \text{ かつ} \\ \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = - \int \varphi d\mu, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \end{array}$$

ここで, $|Df|(\mathbb{R}) = |\mu|(\mathbb{R})$ は μ の全変動を意味する.

明らかに, $\mathbb{R}$ 上の関数 f が絶対連続でその微分 f' が $L_1(\mathbb{R})$ 可積分ならば, 有界変動関数である. 特に, Sobolev 空間 $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset BV(\mathbb{R})$ ([5, p.222] を参照).

¹2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26D10, 46A45, 46E35; Secondary 60G30

²Key words and phrases. linearity, essential variation, Sobolev space, distribution.

本田・岡崎・佐藤は [3] で、次の結果を与えた:

(i) ([3, Theorem 1, Theorem 2])

$1 \leq p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p(\mathbb{R}) \Rightarrow \Lambda_p(f) \subset \ell_p$. 特に, $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow \ell_p = \Lambda_p(f)$.

(ii) ([3, Corollary 4])

$1 < p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p(\mathbb{R})$ とすれば, $\ell_p = \Lambda_p(f) \iff f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

本報告では $\Lambda_p(f)$ の線形性について論じると共に, (ii) で, $p = 1$ のとき, 条件 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ をもっと弱め, $f \in BV(\mathbb{R})$ で置き換えることで, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ となるための必要条件を与えることができることを示す. つまり $f(\neq 0) \in L_1(\mathbb{R})$ であれば, $\ell_1 = \Lambda_1(f) \iff f \in BV(\mathbb{R})$ が成り立つことを示す (定理 8).

2 $\Lambda_1(f)$ の線形性

定理 1 $1 \leq p < +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) は同値である:

(i) $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間である;

(ii) 任意の $0 \leq k \leq 1$ に対して, 次を満たす定数 $C(k) > 0$ が存在する:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - ka) - f(x)|^p dx \leq C(k) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a) - f(x)|^p dx, \forall a > 0;$$

(iii) ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - ka) - f(x)|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x - a) - f(x)|^p dx, 0 \leq \forall k \leq 1, \forall a > 0$$

が成り立つ.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す. そこで, $\mathbf{a} = (a_n)$, $\mathbf{b} = (b_n) \in \Lambda_p(f)$ とすると, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \Lambda_p(f)$ は次の不等式から容易に得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |f(x - (a_n + b_n)) - f(x)|^p dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \{|f(x - (a_n + b_n)) - f(x - b_n)| + |f(x - b_n) - f(x)|\}^p dx \\ & \leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \{|f(x - (a_n + b_n)) - f(x - b_n)|^p + |f(x - b_n) - f(x)|^p\} dx \\ & = 2^{p-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x - b_n) - f(x)|^p dx \right\}. \end{aligned}$$

次に, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_n) \in \Lambda_p(f) \Rightarrow \alpha \mathbf{a} \in \Lambda_p(f)$ を示す. $|\alpha| < N$ となる自然数 N を任意に取る. $0 < |\alpha|/N < 1$ より, (ii) の条件より

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |f(x - \alpha a_n) - f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x - |\alpha| a_n) - f(x)|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=1}^N \left| f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} (i-1)\right) \right| \right\}^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} N^{p-1} \sum_{i=1}^N \left| f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} (i-1)\right) \right|^p dx \\
&= N^{p-1} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N} (i-1)\right) \right|^p dx \\
&= N^{p-1} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{|\alpha| a_n}{N}\right) - f(x) \right|^p dx \\
&\leq N^p C(|\alpha|/N) \int_{\mathbb{R}} |f(x - |a_n|) - f(x)|^p dx \\
&= N^p C(|\alpha|/N) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx < \infty.
\end{aligned}$$

よって, $\alpha \mathbf{a} \in \Lambda_p(f)$. 以上のことから $\Lambda_p(f)$ が線形空間であることがわかる.

次に, 逆 (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. 対偶で証明するために, (ii) が成り立たないとすると, ある $0 < k_0 \leq 1$ が存在して, 任意の自然数 n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx > 3^n \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \quad (1)$$

となる $a_n > 0$ が取れる. 一方,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}} (|f(x - k_0 a_n)| + |f(x)|)^p dx \\
&\leq 2^{p-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right\} \\
&= 2^p \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned} \quad (2)$$

$f \neq 0$, $f \in L_p$ で,

$$f(x - a_n) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

は成立しないので, 任意の n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \neq 0$$

となることがわかる. よって (1) と (2) より

$$0 < \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx < \frac{2^p}{3^n} \|f\|_{L_p}^p < 2^{p-n} \|f\|_{L_p}^p$$

が得られる. 各 n に対して, 不等式

$$N \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-n} \|f\|_{L_p}^p$$

が成り立つ最大の N を $N(n)$ とおくと,

$$N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-n} \|f\|_{L_p}^p \quad (3)$$

が成り立つ. また, $N(n)$ の最大性より,

$$\begin{aligned} 2^{p-n} \|f\|_{L_p}^p &< (N(n) + 1) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \\ &\leq 2N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

従って, (1) より

$$\begin{aligned} 2^{p-n-1} \|f\|_{L_p}^p / N(n) &< \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \\ &< \frac{1}{3^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

よって,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n 2^{p-1} \|f\|_{L_p}^p < N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx. \quad (4)$$

$$b_1 = a_1, \dots, b_{N(1)} = a_1$$

$$b_{N(1)+1} = a_2, \dots, b_{N(1)+N(2)} = a_2$$

$$b_{N(1)+N(2)+1} = a_3, \dots, b_{N(1)+N(2)+N(3)} = a_3$$

$\vdots$

以下同様にして, 数列 $\mathbf{b} = (b_n)$ を定義する.

このように定義された数列 $\mathbf{b} = (b_n)$ は次の性質を持つ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x - b_n) - f(x)|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty} N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx.$$

(3) より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_n) - f(x)|^p dx \leq \|f\|_{L_p}^p \sum_{n=1}^{\infty} 2^{p-n} < +\infty$$

故に,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x - b_n) - f(x)|^p dx < +\infty.$$

従って, $\mathbf{b} \in \Lambda_p(f)$.

次に, $k_0 b \notin \Lambda_p(f)$ を示す. そのために,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 b_n) - f(x)|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty} N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx$$

に注意して (4) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 a_n) - f(x)|^p dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n 2^{p-1} \|f\|_{L_p}^p = +\infty.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x - k_0 b_n) - f(x)|^p dx = +\infty.$$

つまり, $k_0 b \notin \Lambda_p(f)$. このようにして, (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が示された.

最後に, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) を示す. (iii) $\Rightarrow$ (ii) は明らかなので, (ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す. 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$M(k) = \sup_{a>0} \frac{\|f(\cdot - ka) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_{L_p}}$$

任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} M(k_1 + k_2) &= \sup_{a>0} \frac{\|f(\cdot - (k_1 + k_2)a) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_{L_p}} \\ &\leq \sup_{a>0} \frac{\|f(\cdot - (k_1 + k_2)a) - f(\cdot - k_2 a)\|_{L_p} + \|f(\cdot - k_2 a) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_{L_p}} \\ &= \sup_{a>0} \frac{\|f(\cdot - k_1 a) - f(\cdot)\|_{L_p} + \|f(\cdot - k_2 a) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_{L_p}} \\ &\leq M(k_1) + M(k_2). \end{aligned}$$

$M(1) = 1$, $M(|k|) = M(k)$ ($k \in \mathbb{R}$) から $M(\pm n) \leq n$ ($n = 0, 1, \dots$) が得られる. (ii) の仮定より, $0 \leq M(k) < +\infty$ ($0 \leq \forall k \leq 1$) が成り立つことが容易にわかる. 任意の $\forall k \in \mathbb{R}$ に対してもこれが成り立つことを示す. $\forall k \in \mathbb{R}$ とすると, 上記の $M(\cdot)$ に関する三角不等式により,

$$M(k) \leq M(k - [k]) + M([k]) \leq M(k - [k]) + |[k]| < \infty.$$

ここで $[k]$ は k を超えない最大の整数を表す. 今, (iii) が成り立たないと仮定すれば, $\sup_{0 < k \leq 1} M(k) = \infty$ が成り立つことから, 区間 $(0, 1]$ の中から $M(k_n) \rightarrow \infty$ となる数列 (k_n) が取れる. 必要ならば, 部分列を取ることで, $k_n \rightarrow \exists k_0 \in [0, 1]$ とできる. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $b_n = k_n - k_0 + a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと,

$$M(k_n) \leq M(k_0 - a) + M(k_n - k_0 + a) = M(k_0 - a) + M(b_n).$$

よって, $M(b_n) \rightarrow \infty$. 以上の結果をまとめると, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $M(b_n) \rightarrow \infty$ かつ $b_n \rightarrow a$ となる点列 (b_n) が必ず取れることがわかる. これを用いると, $\xi_1 \in (0, 1)$ を $M(\xi_1) > 1$ となる様にとれる. $M(\cdot)$ の定義から,

$$\frac{\|f(\cdot - \xi_1 a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 1$$

となる $a_1 > 0$ をとることができる. $t \mapsto f(\cdot - ta_1) \in L_p(\mathbb{R})$ は連続写像だから, 次の不等式を満たし, $\xi_1 \in (c_1, d_1) \subset (0, 1)$ となる开区間 (c_1, d_1) をとることができる.

$$\frac{\|f(\cdot - ta_1) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 1 \quad (\forall t \in [c_1, d_1]).$$

更に, $\xi_2 \in (c_1, d_1)$ を $M(\xi_2) > 2$ となるようにとることができる. 同様に, ある $a_2 > 0$ に対して

$$\frac{\|f(\cdot - \xi_2 a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 2,$$

でかつ, $\xi_2 \in (c_2, d_2) \subset (c_1, d_1)$ に対して,

$$\frac{\|f(\cdot - ta_2) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 2 \quad (\forall t \in [c_2, d_2]).$$

となる开区間 (c_2, d_2) が取れる. 以下同様にして, 次の性質を持つように正数列 $\xi_n, a_n, c_n < d_n$ が取れる:

$$\begin{aligned} \xi_n &\in (c_n, d_n) \subset (c_{n-1}, d_{n-1}) \\ \frac{\|f(\cdot - ta_n) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}} &> n \quad (\forall t \in [c_n, d_n]) \end{aligned}$$

$[0, 1] \supset [c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \cdots$ より, 区間縮小法により $\bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n] \neq \emptyset$. そこで, $\xi_0 \in$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n]$ とすれば, 任意の n に対して,

$$M(\xi_0) \geq \frac{\|f(\cdot - \xi_0 a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}} > n$$

が成り立つ. 従って, $M(\xi_0) = +\infty$. これは矛盾. よって, (ii) $\Rightarrow$ (iii) が示された. ■

2.1 $\Lambda_p(f)$ が線形空間となる例

定理 2 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ とする. 実数 $\mathbb{R}$ 上の加算分割 $(a_i)_{-\infty}^{\infty}$:

$$\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots, \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = -\infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \infty$$

が存在して, 次の条件:

- (1) $\inf_{i \in \mathbb{Z}} (a_{i+1} - a_i) > 0$;
- (2) f は各 (a_i, a_{i+1}) で単調;

が成り立てば, $\Lambda_p(f)$ は線形空間となる.

[証明] 以下, $\varepsilon = (\inf_{i \in \mathbb{Z}} |a_{i+1} - a_i|)/3 > 0$ と置く. すると, 任意の $0 < b < a < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$ に対して次の不等式が成立する.

$$|f(x-b) - f(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x-b) - f(x-a-b)|^p + |f(x-a) - f(x)|^p + |f(x-b) - f(x+a-b)|^p + |f(x+a) - f(x)|^p). \quad (5)$$

これを示すために, まず $0 < b < a < \varepsilon$ を a, b を任意に選び固定する. すると, 任意の実数 x に対して,

$$I_1 = [x-a-b, x-b], \quad I_2 = [x, x+a], \quad I_3 = [x-a-b, x+a]$$

と置くと, $I_1, I_2 \subset I_3$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. また区間 I_3 の幅は $2a+b$ で $2a+b < 3\varepsilon \leq \inf_{i \in \mathbb{Z}} |a_{i+1} - a_i|$ だから $\{i : a_i \in I_3\}$ の要素は高々1個となる. 従って, 次の二つのケースが考えられる:

$$(a) \quad \{i : a_i \in I_1\} = \emptyset;$$

$$(b) \quad \{i : a_i \in I_2\} = \emptyset.$$

(a) の場合: 仮定から, $I_1 = [x-a-b, x-b]$ では, f は単調だから, $f(x-a-b) \leq f(x-a) \leq f(x-b)$ or $f(x-a-b) \geq f(x-a) \geq f(x-b)$ より,

$$\begin{aligned} |f(x-b) - f(x)| &\leq |f(x-b) - f(x-a)| + |f(x-a) - f(x)| \\ &\leq |f(x-b) - f(x-a-b)| + |f(x-a) - f(x)|. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$|f(x-b) - f(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x-b) - f(x-a-b)|^p + |f(x-a) - f(x)|^p).$$

(b) の場合: 仮定から, $I_2 = [x, x+a]$ では, f は単調だから, $f(x) \leq f(x+a-b) \leq f(x+a)$ or $f(x) \geq f(x+a-b) \geq f(x+a)$ より,

$$\begin{aligned} |f(x-b) - f(x)| &\leq |f(x-b) - f(x+a-b)| + |f(x+a-b) - f(x)| \\ &\leq |f(x-b) - f(x+a-b)| + |f(x+a) - f(x)|. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$|f(x-b) - f(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x-b) - f(x+a-b)|^p + |f(x+a) - f(x)|^p).$$

これより, (5) が成り立つことが分かる. 次に, 定理の条件 (iii) が成り立つことを示すために, $0 < \forall k < 1, \forall a > 0$ と取ると, 明らかに, $0 < ka < a$.

今, 次の2つの場合を考える: $a < \varepsilon, a \geq \varepsilon$.

まず, $a < \varepsilon$ のとき, (5) で $b = ka$ と置けば, $0 < ka < a < \varepsilon$ より

$$\begin{aligned} |f(x - ka) - f(x)|^p &\leq 2^{p-1} (|f(x - ka) - f(x - a - ka)|^p + |f(x - a) - f(x)|^p \\ &\quad + |f(x - ka) - f(x + a - ka)|^p + |f(x + a) - f(x)|^p). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - ka) - f(\cdot)\|_p^p &\leq 2^{p-1} (\|f(\cdot - ka) - f(\cdot - a - ka)\|_p^p + \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p \\ &\quad + \|f(\cdot - ka) - f(\cdot + a - ka)\|_p^p + \|f(\cdot + a) - f(\cdot)\|_p^p) \\ &= 2^{p-1} 4 \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p \\ &= 2^{p+1} \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p. \end{aligned} \quad (6)$$

$a \geq \varepsilon$ のとき, $c = \inf_{\alpha \geq \varepsilon} \|f(\cdot - \alpha) - f(\cdot)\|_p$ と置けば, $c > 0$ であることが容易に分かる. よって,

$$\frac{\|f(\cdot - ka) - f(\cdot)\|_p}{\|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p} \leq \frac{\|f(\cdot - ka)\|_p + \|f\|_p}{c} = \frac{2\|f\|_p}{c}.$$

故に,

$$\|f(\cdot - ka) - f(\cdot)\|_p^p \leq \left(\frac{2\|f\|_p}{c} \right)^p \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p. \quad (7)$$

従って, $C = \max \left\{ 2^{p+1}, \left(\frac{2\|f\|_p}{c} \right)^p \right\} > 0$ と置けば,

$$\|f(\cdot - ka) - f(\cdot)\|_p^p \leq C \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p \quad \text{for } 0 \leq \forall k \leq 1, \forall a > 0.$$

定理 1 の条件 (iii) が示され, $\Lambda_p(f)$ が $\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間となることが分かる. ■

2.2 $\Lambda_p(f)$ が線形空間にならない例

ここでは, $\Lambda_p(f)$ が線形にならない2例について構成法のみを紹介する. 紙面の都合で詳細は省略する.

例 1 $f_0 \in C_0(\mathbb{R}) (\neq 0)$, $\text{supp } f_0 \subset [0, \pi]$. 各 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_{m,n} \in C(\mathbb{R})$ を次で定義する:

$$f_{m,n}(x) = 1 + \frac{1}{m} \sin(nx).$$

すると, 次の条件 (i), (ii) を満足する部分列 $\{m_i\}, \{n_i\}$ が存在する:

$$(i) \quad f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_0(x) \prod_{i=1}^j f_{m_i, n_i}(x) \quad (\mathbb{R} \text{ 上一様}).$$

$$(ii) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - \frac{\pi}{n_i}) - f(x)|^p dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - \frac{2\pi}{n_i}) - f(x)|^p dx} = \infty.$$

すると, (i) から $f \in C_0(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$ が得られる. (ii) から f が定理 1(ii) の条件を満足しないことが得られる. このようにして, $\Lambda_p(f)$ が $\mathbb{R}^\infty$ の部分空間にならないことが示される.

最後にもっと滑らかな関数 f で $\Lambda_p(f)$ が線形にならない例について挙げる.

例 2 $1 \leq p < \infty$ とする. 次の条件を満たす関数 $f \in L_p(\mathbb{R})$ が存在する:

- (i) $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ で $f(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$);
- (ii) $\mathbb{R}$ の任意の有界区間上で $f'(x) = 0$ を満たす x の値は高々有限個;
- (iii) $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}$ の線形部分空間にならない.

f の構成. まず,

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & (-1 < x < 1) \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

とおくと, $\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \rho = [-1, 1]$ が成り立つ. 更に, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\rho_n(x) = \rho(6(x - n - 1/2))$ とおくと, $\text{supp } \rho_n = [n + 1/3, n + 2/3]$, $0 \leq \rho_n(x) \leq 1/e$ が成り立つ. 更に, 自然数の列 (n_k) に対し,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & (x < 1) \\ e^{-x^2}(1 + \rho_k(x) \sin n_k \pi x) & (k \leq x < k+1) \end{cases}$$

を定義すれば, (n_k) の選び方に依らず, 前述の条件 (i), (ii) は満たされる. 一方, (n_k) を適当に選べば,

$$\|f(\cdot - 1/n_k) - f(\cdot)\|_p > 2^k \|f(\cdot - 2/n_k) - f(\cdot)\|_p, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つようにできる. 従って, $\frac{a}{2} = \frac{1}{n_k}$ とおけば,

$$\|f(\cdot - a/2) - f(\cdot)\|_p^p \leq C \|f(\cdot - a) - f(\cdot)\|_p^p, \quad (a > 0)$$

を満足する定数 C をとることはできないので, 定理 1 より $\Lambda_1(f)$ は $\mathbb{R}$ の線形部分空間にはならないことが確かめられる.

3 $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ となる条件

$f \in L_p(\mathbb{R})$ に対して, $\mathbb{R}$ の部分集合 D_f を次で定義する:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0 \right\}$$

すると, 集合 $\mathbb{R} - D_f$ は測度 0 の集合である.

また, $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して, $\mathbb{R}$ 上の本質的変動 (essential variation) $\text{ess } V(f)$ を次のように定義する:

$$\text{ess } V(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|, x_0 < x_1 < \cdots < x_k, x_i \in D_f \right\}.$$

定理 3 $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx = \text{ess } V(f)$$

これは以下の 2 つの補題 4, 補題 6 から明らかである.

補題 4 $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \geq \text{ess } V(f).$$

証明 D_f の要素の列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ($n \geq 2$) を任意にとる. $h \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \\ & \geq \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x-h) - f(x)| dx \\ & \geq \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x-h) - f(x)) dx \right| \\ & = \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{a_k-h}^{a_{k+1}-h} f(x) dx - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| \\ & = \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \left\{ \int_{a_k-h}^{a_k} f(x) dx + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx + \int_{a_{k+1}}^{a_{k+1}-h} f(x) dx \right\} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| \\ & = \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{a_k-h}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k+1}-h}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{h} \int_{a_k-h}^{a_k} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{a_{k+1}-h}^{a_{k+1}} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

従って,

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} |f(a_k) - f(a_{k+1})|.$$

よって,

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \geq \text{ess } V(f).$$

■

補題 5 $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\text{ess } V(f) < \infty$ とすれば,

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ x+h \in D_f}} f(x+h)$ は収束する.

(2) (1) より, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$g(x) = \lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ x+h \in D_f}} f(x+h)$$

で $\mathbb{R}$ 上の関数を定義すると, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の右連続関数となり, $g(x) = f(x)$ ($x \in D_f$)

(3) g を (2) で定義された $\mathbb{R}$ 上の関数とする. すると $V(g) = \text{ess } V(f)$, ここで, $V(g)$ は g の $\mathbb{R}$ 上の全変動を意味する.

証明 (1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, D_f の $\mathbb{R}$ での稠密性から, $t_1 > t_2 > \cdots \downarrow x$ を満たす $\{t_n\} \in D_f$ を任意にとることができる. すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(t_{n+1}) - f(t_n)| \leq \text{ess } V(f) < +\infty.$$

よって, $\sum_{n=1}^{\infty} (f(t_{n+1}) - f(t_n))$ は収束, ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$ も収束. $\{t_n\}$ の選び方は任意だから, $\lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ x+h \in D_f}} f(x+h)$ は収束する.

(2) (1) の結果から, g は右連続. 次に $x \in D_f$ とする. F_x を次で定義する.

$$F_x(h) = \int_x^{x+h} f(t) dt, h \geq 0$$

明らかに, F_x は絶対連続, $F'_x(h) = f(x+h)$ ($x+h \in D_f$). 故に, $F'_x(\cdot) = f(x+\cdot)$ a.e.

$$F_x(h) = \int_0^h F'_x(t) dt + F_x(0) = \int_0^h f(x+t) dt$$

$$f(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} F_x(h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt = g(x).$$

(3) (2) より $g|_{D_f} = f$ だから $\text{ess } V(f) \leq V(g)$. 逆の不等式が成り立つ事を示すため, $\mathbb{R}$ の要素の列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ を任意にとる. g は右連続, D_f は $\mathbb{R}$ で稠密なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b_k \in [a_k, a_{k+1}) \cap D_f$ ($1 \leq k \leq n$) が存在して, $|g(a_k) - g(b_k)| < \varepsilon/2(n-1)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |g(a_{k+1}) - g(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \{|g(a_{k+1}) - g(b_{k+1})| + |g(b_{k+1}) - g(b_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |g(b_{k+1}) - g(b_k)| + \varepsilon \\ &\leq \text{ess } V(f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $V(g) \leq \text{ess } V(f)$. ■

補題 6 任意の $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \leq \text{ess } V(f), \quad h \neq 0.$$

証明 $\text{ess } V(f) = \infty$ の場合は明らか.

$\text{ess } V(f) < \infty$ の場合. g を補題 5(2) で定義した右連続関数とすると, 同定理より, $V(g) = \text{ess } V(f) < \infty$, $g = f$ a.e.. 従って, Jordan 分解により, 非減少関数 g_1, g_2 が存在して, $g = g_1 - g_2$, $V(g_1) + V(g_2) = V(g)$ と分解できる. 実数 $h, s < t$ を任意にとる.

$$\begin{aligned} \int_s^t |g_1(x-h) - g_1(x)| dx &= \left| \int_s^t (g_1(x-h) - g_1(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_{s-h}^{t-h} g_1(x) dx - \int_s^t g_1(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{s-h}^s g_1(x) dx - \int_{t-h}^t g_1(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^h g_1(s-x) dx - \int_0^h g_1(t-x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^h |g_1(s-x) - g_1(t-x)| dx \right| \\ &\leq |h| V(g_1). \end{aligned}$$

s, t が任意なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(x-h) - g_1(x)| dx \leq |h| V(g_1).$$

同様に,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(x-h) - g_2(x)| dx \leq |h| V(g_2).$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-h) - g(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(x-h) - g_1(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(x-h) - g_2(x)| dx \\ &\leq |h| V(g_1) + |h| V(g_2) = |h| (V(g_1) + V(g_2)) = |h| V(g). \end{aligned}$$

■

定理 7 $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次の関係式が成り立つ:

$$f \in BV(\mathbb{R}) \iff \text{ess } V(f) < \infty,$$

かつ $|Df|(\mathbb{R}) = \text{ess } V(f)$.

証明 ($\Leftarrow$) を見るために, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\text{ess } V(f) < \infty$ と置くと, 補題 6 より,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \varphi(x) dx &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-h) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x+h) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \text{ess } V(f) \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ として, 次が得られる:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_\infty \text{ess } V(f) \text{ for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ がコンパクトなサポートを持つ連続関数 $C_0(\mathbb{R})$ の中で稠密なので, $Df \in (C_0(\mathbb{R}))^*$.
従って, $f \in BV(\mathbb{R})$ かつ $|Df|(\mathbb{R}) \leq \text{ess } V(f)$.

一方, 逆 ($\Rightarrow$) を示すために, $f \in BV(\mathbb{R})$ とする.

ここで, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$, $\text{supp } \rho \subset [-1, 1]$ と置き, 更に, $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \rho(x/\varepsilon)$ と置く. いま, 特に, $\varepsilon = 1/n$ と置き,

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{1/n}(x-y) f(y) dy = (\rho_{1/n} * f)(x)$$

と定義すれば, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ かつ, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ($\forall x \in D_f$) が成り立つことが容易に確かめられる.

いま $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して, Fubini の定理により,

$$\int_{\mathbb{R}} f'_n(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) (\rho_{1/n} * \varphi')(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) (\rho_{1/n} * \varphi)'(x) dx.$$

これと, $(\varphi * \rho_{1/n})(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|(\varphi * \rho_{1/n})\|_\infty \leq 1$ より

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f'_n(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) (\varphi * \rho_{1/n})'(x) dx \right| \leq |Df|(\mathbb{R}).$$

ここで, φ も任意なので, $\int_{\mathbb{R}} |f'_n(x)| dx \leq |Df|(\mathbb{R})$ が成り立つ.

更に, $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, $x_i \in D_f$ を任意にとると,

$$\sum_{i=1}^k |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'_n(x) dx \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'_n(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f'_n(x)| dx \leq |Df|(\mathbb{R}).$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば, $x_i \in D_f$ より

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |Df|(\mathbb{R})$$

が得られる. これより, $\text{ess } V(f) \leq |Df|(\mathbb{R})$. 従って, $\text{ess } V(f) = |Df|(\mathbb{R})$ が成り立つ ■

定理 8 $f \in L_1(\mathbb{R})$ とすれば,

$$f \in BV(\mathbb{R}) \text{ であるための必要十分条件は } \Lambda_1(f) = \ell_1.$$

証明 $f \in BV(\mathbb{R})$ と仮定する. 補題 6 と定理 7 より, 直ちに, 次の不等式が得られる:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)| dx \leq \text{ess } V(f)|a|, \forall a \in \mathbb{R}.$$

これより直ちに, $\ell_1 \subseteq \Lambda_1(f)$. 逆向きの包含関係, $\ell_1 \supseteq \Lambda_1(f)$ は準備で述べた (i) ([3, Theorem 1]) から得られる. よって, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$.

逆を背理法で証明するために, $\text{ess } V(f) = \infty$ と仮定する. 定理 2 より, 任意の n に対し, 次を不等式を満たすよう, $h_n \neq 0$ を取ることができる:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h_n) - f(x)}{h_n} \right| dx > 2^n.$$

故に,

$$|h_n| < \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h_n) - f(x)| dx \leq 2^{1-n} \|f\|_1.$$

そこで, 不等式 $N|h_n| \leq 2^{1-n} \|f\|_1$ を満たす最大の正の自然数 N を $N(n)$ と置く.

$N(n)$ の最大性から

$$2^{1-n} \|f\|_1 < (N(n) + 1)|h_n| < 2N(n)|h_n|.$$

故に,

$$\|f\|_1 < N(n)2^n |h_n| < N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x-h_n) - f(x)| dx.$$

これを用いて数列 (a_n) を構成する:

$$a_1 = h_1, \dots, a_{N(1)} = h_1$$

$$a_{N(1)+1} = h_2, \dots, a_{N(1)+N(2)} = h_2$$

$$\vdots$$

$$a_{N(1)+N(2)+1} = h_3, \dots, a_{N(1)+N(2)+N(3)} = h_3$$

$$\vdots$$

以下同様にして, 数列 $\mathbf{a} = (a_n)$ を定義する.

これより,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} N(n) |h_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} \|f\|_1 < +\infty.$$

つまり, $\mathbf{a} \in \ell_1$.

一方,

$$\Psi(\mathbf{a}; f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f(x-a_n) - f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} N(n) \int_{\mathbf{R}} |f(x-h_n) - f(x)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_1 = \infty.$$

従って, $\mathbf{a} \notin \Lambda_1(f)$. これは仮定, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ に矛盾. ■

References

- [1] S. D. Chatterji and V. Mandrekar, Quasi-invariance of measures under translation, Math. Z. **154**(1977), 19–29.
- [2] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, A class of sequence spaces defined by a non-negative integral function, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces II. Kitakyushu, Japan, 2006, 309–317.
- [3] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, An L_p -function determines ℓ_p , Proc. Japan Acad., **84**(2008), Ser. A , 39–41.
- [4] H. Shimomura, An aspect of quasi-invariant measures on $\mathbb{R}^\infty$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **11**(1976), 749–773.
- [5] William P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 1989