

一般曲線座標系を用いた流れと水質混合の2次元数値解析

岩佐 義朗・綾 史郎・土屋 勉・西内 美宣

2-D NUMERICAL SIMULATION OF FLOW AND ASSOCIATED DISPERSION BY MEANS OF GENERALIZED CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

By Yoshiaki IWASA, Shirou AYA, Tsutomu TSUCHIYA and Yoshinori NISHIUCHI

Synopsis

This paper deals the two-dimensional numerical simulation method of flows and associated dispersion in the horizontal plane by means of the generalized curvilinear coordinate system. Basic mathematical models for flows and convective-dispersion of contaminants are derived in the generalized curvilinear coordinate system. They are represented in the conservation forms and as simple as those in the Cartesian coordinate system. Finite difference forms of these equations are obtained by the integral method and they have the second order accuracy in a time coordinate and the third order accuracy in space coordinates. The algebraical numerical grid generation method is also introduced. The usefulness and the accuracy of these proposed procedures are successfully examined through the comparative study of numerical results with the analytical solution for a 2-D convective dispersion phenomenon. They are also applied to the numerical experiments for 2-D flows and the transverse dispersion of contaminants in a model river. The results obtained are agreed with the knowledge obtained in the past study and the usefulness of the proposed method is verified.

1. は じ め に

本研究は、複雑な地形形状を有する水域における流れと水質混合の特性を高精度な数値的方法により解析することを目的として行うものであり、本報文はその第1報として、平面2次元モデルによる流れと水質混合現象を対象として、一般曲線座標系を用いた数値解析法について述べるものである。

従来より、この種の課題については、デカルト座標系上の直交格子を用いた有限差分法、あるいは有限要素法による多角形網を用いた数値解析法が主流であって、数多くの研究が発表されている。有限差分法は、その歴史も古く、差分解法についての数学的知識も豊富に蓄積されており、定式化が容易であり、計算時間が比較的短くてすむ利点を有している。しかし、一定間隔の直交差分格子を用いるため、数値解を得る場所を任意に選ぶこと、地形形状の正確な表現はやや困難であり、計算コードの中に境界条件を一般的に組み込むことも難しい。一方、有限要素法は、これらの有限差分法の欠点を回避するものであるが、定式化が複雑であり大規模な行列で表現される、数値解の精度を高めることが困難である、計算時間がかかる、3次元流体解析への拡張が難しい等の難点があるようである。

一般曲線座標系による有限差分解法は、近年のコンピュータハードウェアの急速な開発・利用を背景と

して行われるようになってきたものであり、特に航空工学、機械工学等^{1), 2)}の分野で、複雑な物体まわりの流体解析に用いられている。この方法では、デカルト座標系にかえて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入するから、地形形状の表現、境界条件の処理が容易になる。また、一般曲線座標系上で有限差分法により離散化するから、従来より蓄積されてきた（デカルト座標系における）有限差分法に関する豊富な知見を利用して、高精度の差分法を比較的容易に利用することができる。従って、有限差分法、有限要素法双方の長所を持ち合せた数値解法が期待され、水工学の分野においてもいくつか実施されている^{3), 4), 5), 6), 7)}。

一般曲線座標系による数値解析の概略手順を述べると以下のようである。

- (1) 実際の計算対象領域がデカルト座標系 x_i 上（物理面と呼ぶ）で決定されると、これを何らかの方法で生成した一般曲線座標系 ξ_i 上のそれ（計算面と呼ぶ）に変換し、格子網で覆う。一般曲線座標系の生成は一意的なものでなく多くのものが可能であり、物理現象、境界条件に応じて適切なものを選べばよい。計算面は、通常単位長さ $\Delta \xi_i = 1$ の正方形格子で構成される。
- (2) デカルト座標系上で記述された基礎方程式を一般曲線座標系上でのそれに改める。基礎方程式の変換にあたっては、従属変数をデカルト座標系上のもののままとするか、一般曲線座標系のそれとするかにより、2つの方法があるが、本研究では、後述する理由により、前者の方法を用いて変換する。
- (3) (2) においては、座標変換に係わる微係数や変換の Jacobian があらわれてくるが、(1) における座標生成の際に必要な微係数を求めておく。
- (4) 変換された基礎方程式系を適切な有限差分法により、離散化する。差分法の選択基準については、デカルト座標系のそれと同等であり、本報文では、Adams-Bashforth 法を用いた時間 2 次精度、QUICK 法を用いた空間 3 次精度の離散化手法が示される。
- (5) 数値解法をコード化し、数値計算を行う。

以上の手順について、その具体的な手法が次章以下において説明されるとともに、数値解析結果が示される。

2. 基礎方程式系

2.1 デカルト座標系における基礎方程式系

本研究は、平面 2 次元モデルによる数値解析を扱うから、対象とする流れは、水深が浅く、水路幅、流下方向に広い領域を有する流れである。一般に、流れと水質混合を解析する数学モデルは、 x_i ($i = 1, 2, 3$) 方向の運動量方程式、連続式、拡散量の保存を示す拡散方程式および、密度と他の状態量との関係を示す状態方程式より構成される。i) 密度は全領域で一定、ii) x_3 軸（鉛直）方向の運動量の変化は小さいとの仮定のもとに、乱流を対象として、Reynolds の平均操作を以上の数学モデルに行うと、分子運動の効果を無視して、周知の以下の式を得る。

・水平方向の運動量方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j u'_i}) \quad (i=1, 2, j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (1)$$

・静水圧分布式（鉛直方向の運動量方程式）

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad \dots\dots\dots (2)$$

・連続方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

・乱流拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j c) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_j c'}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 u_i ： x_i 軸方向の確率平均速度、 c ：拡散量の確率平均濃度、 p ：確率平均圧力、 ρ ：密度、 g ：重力加速度、 $\overline{u'_j u'_i}$ ：Reynolds 応力、 $\overline{u'_j c'}$ ：Reynolds フラックス、 x_i ：デカルト座標系による空間座標 ($i = 1, 2, 3$) であり、 x_1 ：水平東向き、 x_2 ：水平北向き、 x_3 ：鉛直上向きを正、 t ：時間である。なお、状態方程式は、密度一定の仮定により不要である。

平面2次元モデルのデカルト座標系における基礎方程式系は、(1)～(4)式を x_3 軸方向に水底より水表面まで、積分することにより容易に得られ、これを保存形でベクトル表示して示すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Bmatrix} U_1 M_1 \\ U_1 M_2 \\ U_1 h \\ U_1 N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{Bmatrix} U_2 M_1 \\ U_2 M_2 \\ U_2 h \\ U_2 N \end{Bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Bmatrix} h\tau_{11}/\rho \\ h\tau_{21}/\rho \\ 0 \\ hs_1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{Bmatrix} h\tau_{12}/\rho \\ h\tau_{22}/\rho \\ 0 \\ hs_2 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} -gh\partial\zeta/\partial x_1 + (\tau_{1s} - \tau_{1b})/\rho \\ -gh\partial\zeta/\partial x_2 + (\tau_{2s} - \tau_{2b})/\rho \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、 U_i ： x_i 軸方向の水深平均流速 ($i = 1, 2$)、 M_i ： x_i 軸方向の流束、 N ：水質束であり、各々次式で定義される。

$$U_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} u_i dx_3/h, \quad M_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} u_i dx_3, \quad N \equiv \int_{z_b}^{\zeta} c dx_3 \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、 ζ ：水表面、 z_b ：水路底、 h ：水深 ($\equiv \zeta - z_b$) であり、 τ_{ij} ： x_j 軸に垂直な面に働く x_i 軸方向の応力であり、Reynolds 応力および u_i の鉛直方向分布の非一様性により生じる見かけの (分散) 応力の和を示すものとする。 s_i ： x_i 軸方向の勾配輸送型フラックスであり、乱流拡散フラックス、および分散フラックスの和を示すものとする。また、 τ_{ib} ： x_i 軸方向の底面せん断応力、 τ_{is} ： x_i 軸方向の表面せん断応力である。以下においては、 $\tau_{is} = 0$ として扱うものとする。

2.2 一般曲線座標系における基礎方程式系

一般曲線座標系を用いた流体運動の記述の方法には、第1章で述べたように、2つの方法があるが、本研究では、独立変数のみを一般曲線座標系 ξ_i ($i = 1, 2$) により示し、従属変数はデカルト座標系におけるものを用いることとする。これは、方程式系が簡単に記述され、以下に示すよう

に、デカルト座標系におけるそれとほとんどかわらない程度のものが得られること、したがって、従来より蓄積されてきたデカルト座標系における数値解析法に関する知見が容易に適用できること、数値解析結果の図化等に際しては、デカルト座標系におけるものの方が便利なこと等による。

Viviani⁸⁾ は、デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3, t) で定義される保存形の方程式

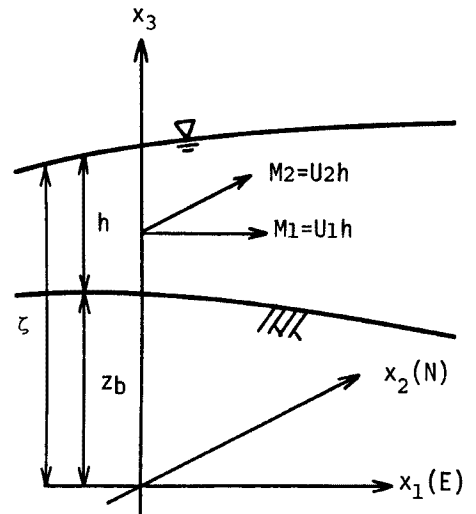


Fig.1. Definition sketch of variables and Cartesian coordinate system.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

は、次式

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

$$\tau = t \quad (9)$$

により、独立変数をデカルト座標系におけるもの x_i より、一般曲線座標系におけるもの ξ_i に変換すると、次の様に記述されることを示している。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{f}{J} \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{F_i}{J} \right) = 0 \quad (10)$$

ここに、 $J (=J_f)$ は Transformation Jacobian であって、

$$J_f = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| = 1/J_x \quad (11)$$

である。

座標変換

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2), \quad \tau = t \quad (12)$$

によって、デカルト座標系において記述した基礎方程式系(5)式を、(7)および(10)式の関係参照して、一般曲線座標系におけるそれに改めると次式を得る (Fig. 2 参照)。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U^1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U^2}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau^{11}/\rho \\ \tau^{21}/\rho \\ 0 \\ s^1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau^{12}/\rho \\ \tau^{22}/\rho \\ 0 \\ s^2 \end{Bmatrix} + \\ & \left(-\frac{gh}{J} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \left(-\frac{1}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau_{1b}/\rho \\ \tau_{2b}/\rho \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

ここに、 U^i は水深平均流速ベクトルの反変ベクトル成分であって、

$$U^i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} U_2 \quad (14)$$

で定義される。また、 τ^{ij} , s^i は次式により定義される。

$$\begin{pmatrix} \tau^{11} & \tau^{12} \\ \tau^{21} & \tau^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \tau_{12}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \tau_{12} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \tau_{21} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \tau_{22}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \tau_{21} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \tau_{22} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$s^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} s_2 \quad (16)$$

(13) 式の物理的意味については、左辺第1項は、局所的時間変化項、左辺第2, 第3項は移流項であり、右辺第1, 第2項は応力項 (あるいは、乱流拡散一分散項)、第3項は圧力項、第4項は底面せん断応力項である。(13) 式の有する特徴をデカルト座標系における(5)式と比較して示すと以下のようである。

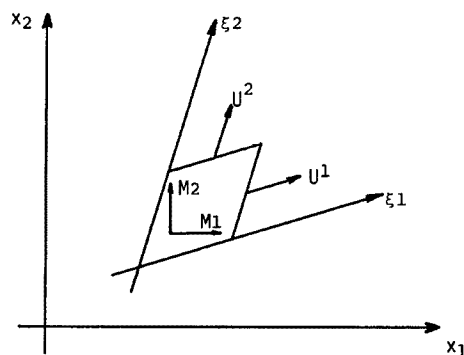


Fig. 2. Cartesian coordinate system and generalized curvilinear coordinate system.

- (1) 従属変数 M_1 , M_2 , h , N はデカルト座標系におけるそれらと同一である。特にベクトル量である流束 (M_1 , M_2) は, デカルト座標系に一致した方向成分を持っている。従って, 運動量の保存則を示す (13) 第1, 第2式もデカルト座標系における運動量保存の関係を表している。
- (2) (5) 式と同様に, (13) 式も保存形で表示されており, 比較的簡単な形で表現されている。保存形表示されている点は, 数値解析を実行するにあたっての離散化の際, 物理量の保存がより正確に表現可能であり, 好都合である。
- (3) (13) 式においては, (5) 式と比較して圧力項の表現がやや複雑になっていることを除いて, 平均流速ベクトル, 応力, 拡散-分散フラックスベクトルに (14) ~ (16) 式の表現を用いることにより, (5) 式とほぼ同様に表現される。即ち, 偏微分される関数が Transformation Jacobian J で除されることを除いて同様である。したがって, デカルト座標系において表現された数値計算コードを容易に拡張することができる。
- (14) 一般曲線座標系 ξ_1 - ξ_2 は直交する必要がない。したがって, 一般曲線座標系を数値的に生成する際, 好都合である。

3. 基礎方程式系の離散化

3.1 離散式の誘導

本研究では, 偏微分方程式系 (13) の離散式を ξ_1 - ξ_2 座標系における積分により求める。通常行われるように, Taylor 展開により離散式を誘導することも可能であるが, 積分による方法の方が物理的意味が明瞭である。

(13) 式中の4本の式全部について, これを示すのは紙面の都合上困難なため, 詳細は参考文献⁹⁾に譲り, ここでは, 次の移流拡散方式を例にとり, 簡単に示す。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{J} U^k \phi \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

(17) 式は, (13) 式中の運動量方程式 (第1, 第2式) にあられる圧力項と底面せん断応力項を除く, 全ての項を含んでいる。

(17) 式を ξ_1 - ξ_2 座標系上の領域 $A'B'C'D'$ において, 積分すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \int \int_{A'B'C'D'} \left(\frac{\phi}{J} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int \int_{A'B'C'D'} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{J} U^k \phi \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ & = \int \int_{A'B'C'D'} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。

領域 $A'B'C'D'$ における積分の意味について考えると以下のようなものである。

まず, 関数 $f(x_1, x_2, t)$ の x_1 - x_2 座標系上の領域 $ABCD$ (**Fig. 3 (a)**) を考える。これを座標変換 (12) 式を用いて求めるものとする。領域 $ABCD$ は, ξ_1 - ξ_2 座標系上の領域 $A'B'C'D'$ (**Fig. 3 (b)**) へ変換され, 積分変数の変換公式により,

$$\int \int_{ABCD} f dx_1 dx_2 = \int \int_{A'B'C'D'} f \frac{1}{J} d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

となるから, f/J の ξ_1 - ξ_2 平面上における積分は x_1 - x_2 平面上における積分に他ならないことが知れる。

(19) 式および Viviani の示した変換 (7) ~ (10) 式を用いると,

$$\int \int_{ABCD} \frac{\partial}{\partial x_j} F dx_1 dx_2 = \int \int_{A'B'C'D'} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x_j} F d\xi_1 d\xi_2$$

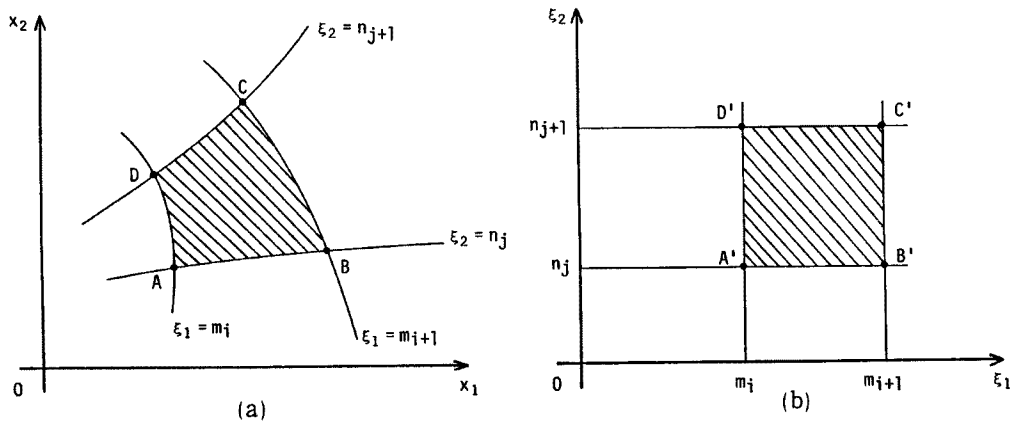


Fig. 3. Transformation of a domain and points from Cartesian coordinate system to generalized coordinate system.

$$= \int \int_{A'B'C'D'} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} F_i \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots \dots (20)$$

が成立するから、移流項、粘性（分散）項などの発散型表示の各項においても、同様に領域 $A'B'C'D'$ の積分は、領域 $ABCD$ における積分に他ならないことが知れる。

(17) 式において、移流項を $L_1(\phi)$ 、拡散（分散）項を $L_2(\phi)$ と記すものとする

$$L_1(\phi) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{U^k}{J} \phi \right), \quad L_2(\phi) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right) \dots \dots \dots (21)$$

であり、(18) 式は次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int \int \left(\frac{\phi}{J} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int \int L_1(\phi) d\xi_1 d\xi_2 = \int \int L_2(\phi) d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots \dots (22)$$

上式において、積分領域は $(i - \frac{1}{2})\Delta\xi_1 \leq \xi_1 \leq (i + \frac{1}{2})\Delta\xi_1$, $(j - \frac{1}{2})\Delta\xi_2 \leq \xi_2 \leq (j + \frac{1}{2})\Delta\xi_2$, $\Delta\xi_1 = \Delta\xi_2 = 1$ の長さ1の辺を有する正方形領域 (Fig. 4) とし、各変数はすべて同一の格子点 $(i\Delta\xi_1, j\Delta\xi_2)$ において定義されるものとし、その積分を以下の様に近似することにより離散式を得る。

(1) 局所的時間変化項

領域内において、 ϕ , J は一定と仮定し、時間微分を2次の精度を有する Adams-Bashforth 法により離散化するものとする、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \int \int \left(\frac{\phi}{J} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ & \approx \frac{1}{J} (\phi^{n+1} - \phi^n) \Delta\tau \\ & = - \left\{ \frac{3}{2} L_1(\phi^n) - \frac{1}{2} L_1(\phi^{n-1}) \right\} \\ & \quad + \left\{ \frac{3}{2} L_2(\phi^n) - \frac{1}{2} L_2(\phi^{n-1}) \right\} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

(2) 移流項

Takemoto et al¹⁰⁾ が示した3次精度の風上差分法である2次元の QUICK 法を用いると、

$$\int \int L_1(\phi) d\xi_1 d\xi_2$$

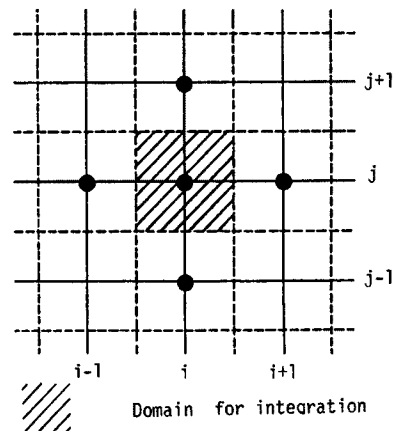


Fig. 4. Definition of locations of variables and finite difference grids in generalized curvilinear coordinate system.

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_{i+1/2,j}^1}{J_{i+1/2,j}} \phi_{i+1/2,j} - \frac{U_{i-1/2,j}^1}{J_{i-1/2,j}} \phi_{i-1/2,j} \\
&+ \frac{U_{i,j+1/2}^2}{J_{i,j+1/2}} \phi_{i,j+1/2} - \frac{U_{i,j-1/2}^2}{J_{i,j-1/2}} \phi_{i,j-1/2} \\
&- \frac{1}{16J_{i+1/2,j}} \{U_{i+1/2,j}^1(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j} + \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i+1,j}) + |U_{i+1/2,j}^1|(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j} - \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i+1,j})\} \\
&+ \frac{1}{48J_{i+1/2,j}} \{U_{i+1/2,j}^1(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j} + \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i+1,j}) + |U_{i+1/2,j}^1|(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j} - \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i+1,j})\} \\
&+ \frac{1}{16J_{i-1/2,j}} \{U_{i-1/2,j}^1(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i-1,j} + \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j}) + |U_{i-1/2,j}^1|(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i-1,j} - \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j})\} \\
&- \frac{1}{48J_{i-1/2,j}} \{U_{i-1/2,j}^1(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i-1,j} + \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j}) + |U_{i-1/2,j}^1|(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i-1,j} - \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j})\} \\
&- \frac{1}{16J_{i,j+1/2}} \{U_{i,j+1/2}^2(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j} + \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j+1}) + |U_{i,j+1/2}^2|(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j} - \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j+1})\} \\
&+ \frac{1}{48J_{i,j+1/2}} \{U_{i,j+1/2}^2(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j} + \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j+1}) + |U_{i,j+1/2}^2|(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j} - \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j+1})\} \\
&+ \frac{1}{16J_{i,j-1/2}} \{U_{i,j-1/2}^2(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j-1} + \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j}) + |U_{i,j-1/2}^2|(\delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j-1} - \delta_{\xi_2}^2 \phi_{i,j})\} \\
&- \frac{1}{48J_{i,j-1/2}} \{U_{i,j-1/2}^2(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j-1} + \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j}) + |U_{i,j-1/2}^2|(\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j-1} - \delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j})\} \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

ここに、

$$(U^k)_{i+1/2,j} = \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} \right)_{i+1/2,j} \frac{1}{2} \{ (U_1)_{i,j} + (U_1)_{i+1,j} \} + \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} \right)_{i+1/2,j} \frac{1}{2} \{ (U_2)_{i,j} + (U_2)_{i+1,j} \} \dots (25)$$

$$\delta_{\xi_1}^2 \phi_{i,j} = \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} \dots\dots\dots (26)$$

等である。

(3) 拡散 (分散) 項

$$\int \int L_2(\phi) d\xi_1 d\xi_2 = \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right)_{i+1/2,j} - \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right)_{i-1/2,j} + \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right)_{i,j+1/2} - \left(\frac{h}{J} \sigma^k \right)_{i,j-1/2} \dots\dots (27)$$

$$\sigma^k = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \sigma_i \dots\dots\dots (28)$$

$$\sigma_i = D^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = D_{ik} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \dots\dots\dots (29)$$

であり D_{ik} は、デカルト座標系上における拡散 (分散) テンソル成分である。

3.2 計算例

3.1 で示した計算コードの有効性を確認するため、簡単な数値計算を行った。すなわち、Fig. 5 に物理面を示すような長方形領域における移流拡散現象の2次元解析である。

計算領域は、流下方向に $-230 \text{ m} \leq x_1 \leq -130 \text{ m}$ 、横断方向に $-60 \text{ m} \leq x_2 \leq 60 \text{ m}$ の領域であり、Fig. 5 に示されるように、これを x_1 軸方向に30分割、 x_2 軸方向に22分割し、非正方形格子網を生成した ($\Delta l_{\max} = 5.81 \text{ m}$, $\Delta l_{\min} = 5.00 \text{ m}$, $\Delta \xi_1 = \Delta \xi_2 = 1$)。格子網生成の方法については次章で述べる。

速度場は、 $x_2 = 0$ の線と平行に、 $U_1 = 1.21 \text{ m/s}$ で横断方向に一様とし、分散係数は $D_L = 5.93 hu_*$ 、 $D_T = 2.00 hu_*$ とした。

境界条件としては、原点 P_0 に負荷量 m が $t \geq 0$ で一定連続投入される場合を想定し、

2次元移流拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = D_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + D_T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \dots\dots\dots (30)$$

の定常解¹¹⁾

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{m}{2\pi\sqrt{D_L D_T}} \exp\left(-\frac{U_1 x_1}{2D_L}\right) K_0\left(\frac{U_1}{2D_L} \sqrt{x_1^2 + \frac{D_L}{D_T} x_2^2}\right) \dots\dots\dots (31)$$

K_0 ; 第2種0次の変形ベッセル関数

を用いた。すなわち、境界の上流端 $x_1 = -130$ m において、(31) で与えられる定常解を $t \geq 0$ で、境界条件にして与えた。

時間発展を繰り返すと、領域内の濃度分布も定常となり、解析解 (31) と比較することができる。

Fig. 6 は検査面 A-A における濃度の横断方向分布を示している。同図中には、参考の為 2次精度風上差

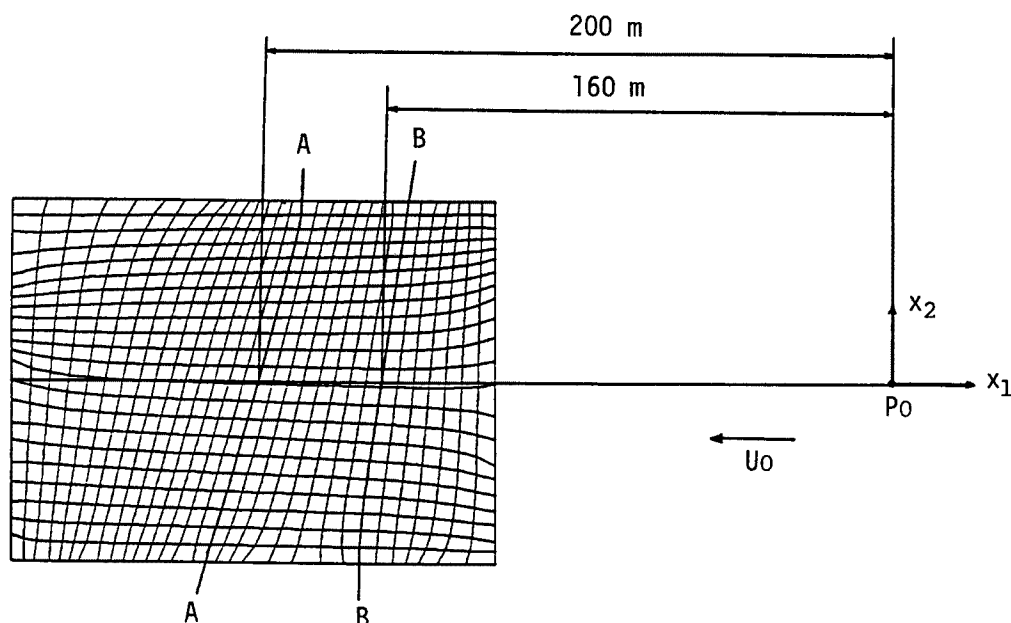


Fig. 5. Domain used in the numerical simulation of a 2-D convective-dispersion equation.

分法である Donor-Cell 法による結果もあわせて示している。Donor-Cell 法による数値解は解析解に比較してピーク濃度が約 10% 程度低くなるとともに、やや歪んでいる。一方、QUICK 法によるそれはほぼ解析解と一致しており、極めて高精度な数値解が得られている。Donor-Cell 法による解が歪んだ原因としては、 U_1 の流向と座標軸 $\xi_1-\xi_2$ の方向が一致していないため、数値分散効果が出現しやすくなったものと考えられる^{9), 12)}。この解析例により、本報で示した数値解法は、一般曲線座標系による非正方形格子網において、十分正確な数値解を与えていることがわかった。さらに、河川流のように流下とともに流向が変化する流れでは、一般曲線座標系の導入により、座標軸を流れの方向と大略一致するよ

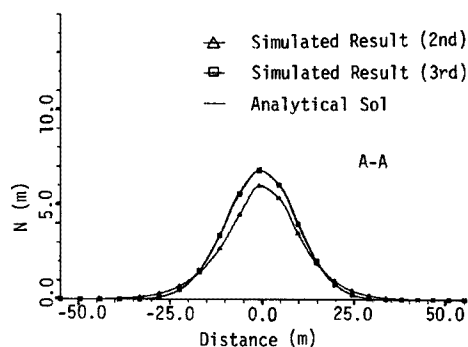


Fig. 6. Comparison of simulated results with analytical solution along the section A-A.

うに選ぶことができるから、数値誤差の出現を抑え得ることがわかった。

4. 平面2次元流れと分散の数値解析

4.1 非正方形格子網の生成法

数値解析を行った流れ場は、後述する Fig. 7 に示されるようなやや湾曲した横長のモデル水域（約 500 m × 約 5000 m）である。水路南岸を ξ_1 軸，西側境界を ξ_2 軸として，非正方形格子網を生成した。

一般曲線座標系の数値的生成法については，現在発展中であり，種々のものが提唱されており，いくつかの成書^{13), 14)}も出版されている。その中では Thompson らが提案する Poisson 方程式によるものが広く用いられているが，本研究では，物理面（デカルト座標系）上における離散的な点を計算面（一般曲線座標系）上の離散的な点に代数的に対応させる手法（代数的方法）¹²⁾を用いた。すなわち，第3章で誘導した基礎方程式系では，座標系は直交する必要がなく，同軸方向の座標線が交わることなく，物理面上の点と計算面上の点が一対一対応し，座標変換に係わる微係数が適切に求まっていけばよいことに注目したものである。本方法は，格子生成の方法が簡単であり，かつ計算時間も短いという特徴を持っている。具体的にその手順を示すと以下のようである。

- (1) まず，計算面において直交格子 $A'B'C'D'$ をつくる (Fig. 3 (b))。
- (2) その格子点を物理面上の格子点 ABCD に対応させる (Fig. 3 (a))。
- (3) 次に，物理面上に座標軸 (ξ_1, ξ_2) と座標線を配置する。
- (4) 次に，物理面上の座標点 (ξ_1, ξ_2) を座標点 (x_1, x_2) と対応させる。
- (5) このままでは，新座標系が屈曲したり，不自然であったりするので，

$$\bar{f}_{i,j} = f_{i,j} + w(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j})$$

により，平均化する。ここに， $f_{i,j}$: (i, j) 点における x_1 あるいは x_2 座標値， w : 重み (≈ 0.1) である。

新座標系の生成にあたっては， $\Delta\xi_1 = \Delta\xi_2 = 1$ とする方が後の数値解析に際して，便利である。また，座標変換に係わる微係数，Transformation Jacobian の計算にあたっては，秋間法¹⁶⁾によって新座標線を内挿補間し，微係数を求めた。

得られた新座標系を物理面上に示したものが，次節で述べる Fig. 7 である。

4.2 流れ場と水質混合現象の2次元数値解析

本数値解析で対象とした現象は，Fig. 7 に示されるような平面形状を有する仮想的な水域の流れと水質混合である。以下に示すように，数値計算は，仮想的な静水状態より開始され，非定常計算を繰り返し，時間発展を行って得られる最終的な定常状態の数値解が検討される。但し，運動量方程式中の移流項については，路床勾配が極めて小さく，その効果は圧力項に比較して無視できるものとして，省略されている。

(1) 計算条件

水理条件としては，以下のものを用いた。まず，底面せん断力の評価法としては Manning 型の抵抗則を用いるものとし，Manning の粗度係数 $n = 0.02$ を用い，路床勾配は， ξ_1 軸方向に $1/5000$ ， ξ_2 軸方向に 0 とした。上流端で流量～時間曲線，下流端で水位～時間曲線を与えた。初期状態は静水状態 ($\zeta = 10.5$ m) とし，正弦曲線により定常流量 ($1500 \text{ m}^3/\text{s}$)，定水位 ($\zeta = 8.5$ m, $h = 3.5$ m) になめらかに接続することとし，時間発展を行い定常解を得た。上流端流量は断面内に一様に分布するものと仮定し，下流端水位は，横断方向に一様と仮定した。

水質混合の計算においては，水理計算で得られた定常な流れ場を対象として，上流端中央部 ($12.0 \leq \xi_2 \leq 14.0$) において拡散物質が定常に投入される場合を想定した。境界条件を一定として時間発展を繰り返す。

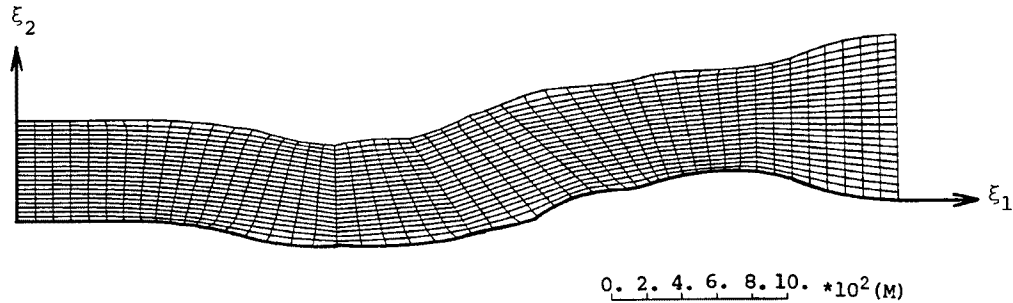


Fig. 7. Plan view of a domain used in simulations and generalized curvilinear coordinate grids generated numerically.

えすと定常な濃度分布を得ることができる。ただし、分散係数は、 $D_L = 5.93 hu_*$, $D_T = 2.00 hu_*$ とした。

(2) 数値計算結果とその考察

得られた定常な流れ場を、流速ベクトル図、等水位線図で示したものが Fig. 8 (a), (b) である。流速ベクトル図 (Fig. 8 (a)) より、流速ベクトルの向きは河道形状に沿ってなめらかに変化しており、流れのパターンはほぼ妥当な結果であるが、やや側岸部の影響が強くていようである。すなわち、通常の実験水路にみられるように水路中央部付近の流速一定とみなされる領域がやや狭いようであるが、これは境界条件として、non-slip 条件を用いたことによるものであろう。同様に等水位線図を示したものが Fig. 8 (b) である。等水位線図は、京都大学大型計算機センターの SSL を用いて描かれているが、数値的な理由により生じたと思われる微小な振動を含んでおり、この除去は、今後の課題としたい。平均的には水面形は水路と直角方向にほぼ一様であり、流下方向にゆるやかに低減している。流速ベクトル図とあわせてみると、上流端において一様に与えられた流速分布が、流下とともに発達し、非一様な流速分布を形成していく様子が理解される。

得られた定常状態の濃度分布形が、Fig. 9 (a), (b) に示している。Fig. 9 (a) は、等濃度線図で

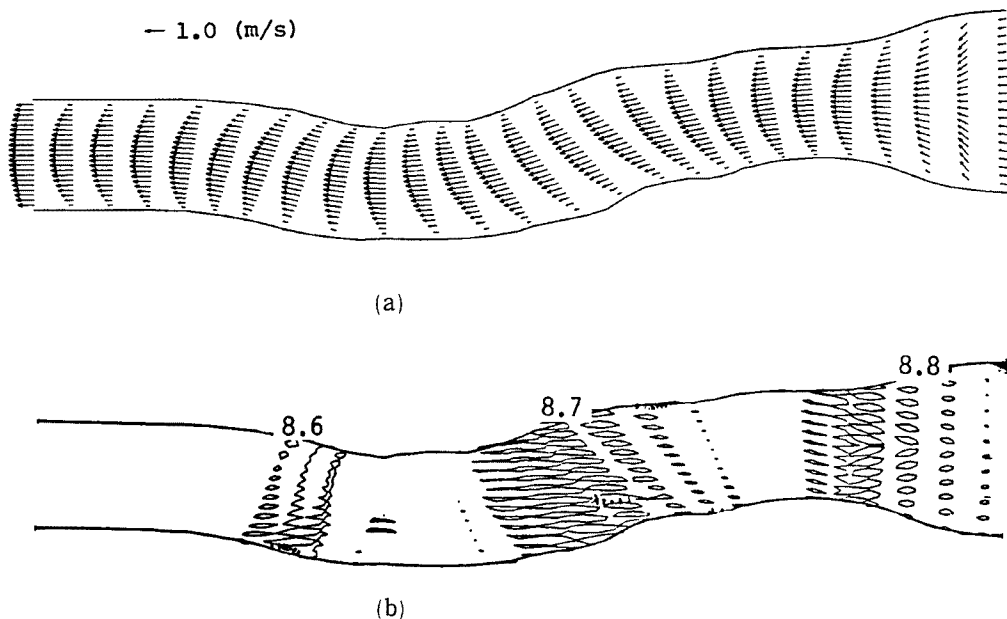


Fig. 8. Simulated results of flows.

(a) Velocity vectors. (b) Iso-water surface elevation lines.

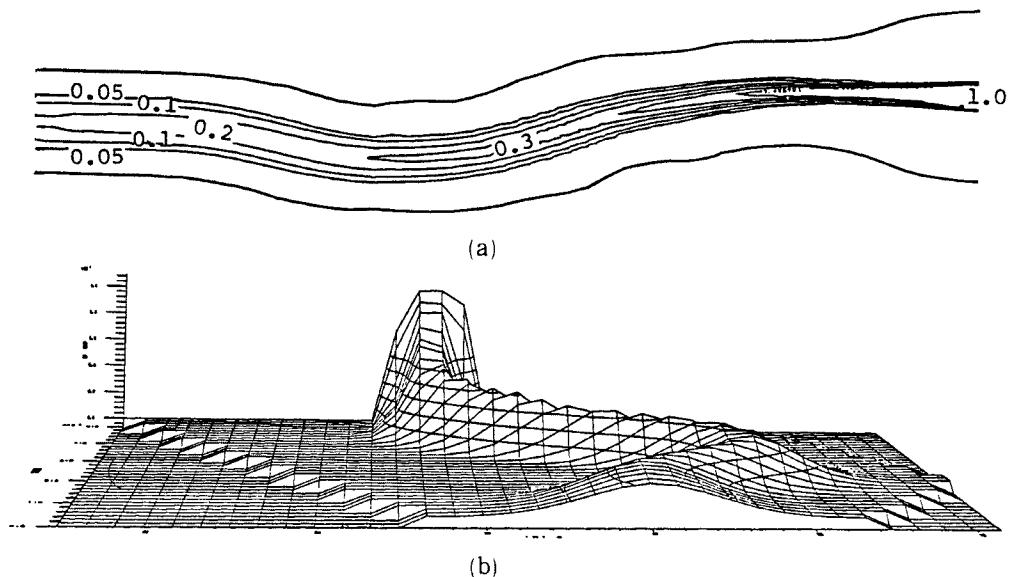


Fig. 9. Concentration distribution.

あり, Fig. 9 (b) は, これを立体視したものである。これらの図より, 拡散物質は横断方向にあまり拡がることなく, 流下していることがよくわかる。また, 投入点付近では, 横断方向に矩形に近い形で歪んだ濃度分布形状を有しているのに対し, 流下に伴い, その分布は正規分布に近い形状を呈している。これらの知見は, 従来河川における汚濁物質の拡散観測などで, しばしば指摘されており, 本解析の有効性を示唆するものであろう。このような河川における横拡散の理論的解析モデルとしては, 四倉の提唱する Stream Tube Model¹⁷⁾ が著名であるが, 数値解析結果を彼の理論と照合することは, 今後の課題である。

5. 結 論

本研究は, 複雑な地形形状を有する水域における流れと水質混合特性を, 一般曲線座標系や, 高精度差分法の導入等により, 高精度に数値解析することを目的として行われている。本報告は, その第1報として, 平面2次元解析モデルによる流れと水質混合特性の解析法について述べたものである。得られた主要な結果を示せば, 以下のようである。

- (1) 一般曲線座標系を用いた, 平面2次元解析モデルの数学モデルを示した。数学モデルは, 独立変数を一般曲線座標系とし, 従属変数をデカルト座標系上のそれとするものである。
- (2) 数学モデルの離散式を積分法により誘導するとともに, 時間2次, 空間3次精度の離散式を示した。さらに, 簡単な計算例により, 数値解と解析解の比較検討を行い, 極めて良い結果を得た。
- (3) 簡単なモデル水域を設定し, 代数的手法に基づく一般曲線座標系の数値的生成法を行うとともに, 流れと水質混合の数値解析を行った。得られた結果は, 水理学的にみてほぼ妥当なものであり, 本報文中で示した数値解析法の有効性を確認した。

今後, 境界条件の設定法の検討, 離散化法の改善などを加え, 実水域を対象とした解析を行う予定である。

最後に, 本研究を行うに際し, 京都大学大学院生井上智夫君, 馬場寿人君の協力を得たことを記し, 両君に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Anderson, D. H., J. C. Tannehill and R. H. Pletcher: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, 1980.
- 2) 桑原邦郎: ナヴィエ・ストークス方程式の数値解法, ながれ, Vol. 1, No. 4, 1982, pp. 333 - 342.
- 3) Benque, J. P., A. Hauguel and P. L. Viollet: Engineering Application of Computatinal Hydraulics Vol. II, Pittman, 1982, pp. 106 - 116.
- 4) Kulkwijk, J. P. and H. J. de Vriend: Computation of the Flow in Shallow River Beds, J. Hydraulic Research, Vol. 18, No. 4, 1980, pp. 327 - 342.
- 5) Wijbenga, J. H. A.: Determination of Flow Patterns in Rivers with Curvilinear Coordinates, Proc. 21 IAHR Congress, Melbourne, 1985, pp. 132 - 139.
- 6) 渡辺明英・灘岡和夫・日野幹雄: 一般曲線座標系による不飽和浸透流の 3 次元解析モデルの開発, 土木学会第 41 回年次学術講演会概要集, 1986, pp. 163 - 164.
- 7) 玉井信行・上田 悟: 乱流モデルによる河川合流部流れの予測, 第 31 回水理講演会論文集, 1987, pp. 437 - 442.
- 8) Viviani, H.: Formes Conservatives des Équations de la Dynamique des Gaz, la Recherche Aérospatiale, No. 1, 1974, pp. 65 - 66.
- 9) 西内美宣: 一般曲線座標を用いた平面 2 次元モデルによる水質混合現象の数値解析的研究, 京都大学修士論文, 1988.
- 10) Takemoto, Y., Y. Nakamura, H. Yamabe, Y. Abe and I. Minami: A Curvilinear Coordinate Method for the Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations Using the Third Order Upwind Differencing Scheme, Trans. JSIDRE, No. 121, 1986, pp. 57 - 65.
- 11) Hinze, J. O.: Turbulence-2nd edition-, McGraw-Hill, 1975, pp. 433.
- 12) Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, 1980 (水谷・香月 訳, コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北, 1985).
- 13) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Wayne Maslin, C.: Numerical Grid Generation-Foundation and Applications-, North-Holland, 1985.
- 14) Häuser, J. and C. Taylor: Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Pineridge, 1988.
- 15) 松田卓也・嶋 英志: 代数的及び幾何学的方法による数値的格子生成, 第 2 回航空機計算力学シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料, pp. 183 - 190.
- 16) Akima, H.: A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedure, J. Assoc. Computational Machinery, Vol. 17, No. 4, 1970, pp. 589 - 602.
- 17) Yotsukura, N. and W. W. Sayre: Transverse Mixing in Natural Channels, Water Resources Research, Vol. 12, No. 4, 1976, pp. 695 - 704.