

重みつきで乗法的相互作用する多自由度確率過程における Pareto-Zipf 則

横浜市立大学総合理学研究科 谷本智史 大月俊也 藤原明広 山本洋

1. イントロダクション

Pareto-Zipf 則は、所得の分布の高額の部分や、都市のサイズ分布、英単語の使用頻度など社会的な分野においてよく現れる。これは従来理解されてきたべき乗分布の一つである臨界現象とは異なり、自然に、自発的にべき乗の分布に至っているように見られる。我々は多体で相互作用をおこなう確率過程のモデルを考えることでこれらの現象の解析を行いたいと考えている。

2. モデル

相互作用系の解析のため、以下のようなモデルを考えた。N個の粒子を考え、粒子はそれぞれある量を持っているとする。この粒子の中から2つを選びだし、相互作用によりそれぞれの量を変化させる。このときの相互作用のルールを以下に示す。

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 \\ x_2' &= bx_1 + ax_2 \end{aligned} \quad (\text{パラメタ } a, b > 0) \quad (1)$$

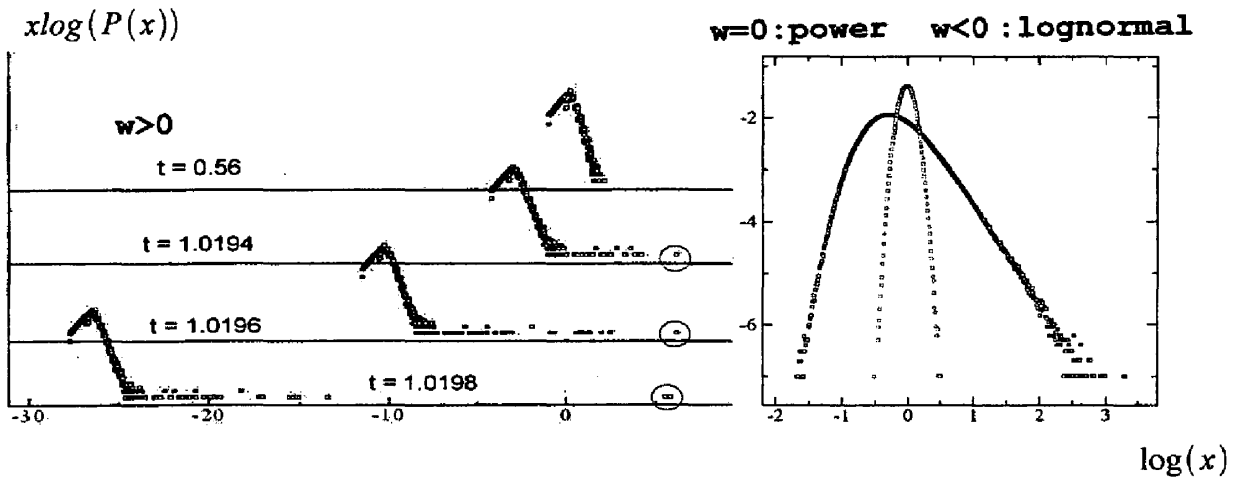
先行する研究[1]によりランダムに粒子を選び出し、このような相互作用させた場合にはこの量 x の分布関数は長時間後においてスケール解を持ち、べき乗のテイルを持つことが明らかになっている。このべきは相互作用パラメータに依存する。ここで本研究では、粒子が相互作用に選ばれる確率をランダムでなく、粒子自身の量による重みをつけた場合を解析した。すなわち、 $K(x_1, x_2) \propto x_1^w x_2^w$ という確率で粒子は相互作用を起こす。このときの w は重みパラメータであり、相互作用確率の粒子の値に対する依存性を表す。また、相互作用パラメータ a, b は成長的な相互作用をする領域から採用した。

詳しい結果はあとに述べるが、 w が正のときは分布関数の不安定化を促し、 w が負のときは幅の狭い、より安定な分布を導く結果となった。これを踏まえて、常に一定としていた重みパラメータ w が系の状態のフィードバックを受け、常に変化するモデルを考えた。

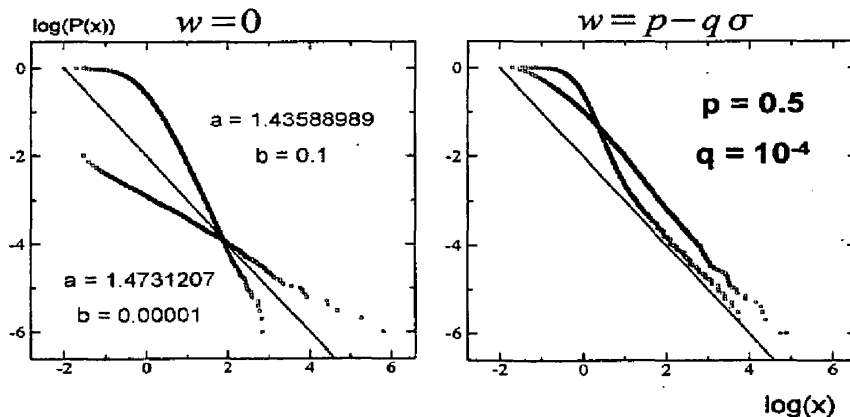
系の状態を表す要素として分布の分散を取り入れた。重み w は分散の関数で $w = p - q\sigma$ のように変化する。 p, q は正のパラメータである。分布の分散が小さいうちは w は正であるが、正の重みの効果により分散が増大すると2項目の効果が働き重みは負になり、不安定になった分布の安定化を促す。このようなモデルでシミュレーションを行い、その挙動を調べた。

3. 結果と考察

w が正のときは、下に示すように時間がたつにつれて2つの大きく成長した粒子が現れ、最終的にこの2つが相互作用を繰り返す、成長し続けるいわば「2人勝ち」の分布となった。 w が負のとき、べきよりもさらに幅の狭い分布となった。当研究室の藤原によりこれは対数正規分布であることは解析的に示された[2]。



$w = p - q\sigma$ のフィードバックする重みの場合、Pareto-Zipfの傾きであるべき指数 -2 の分布にいたることが観察された。また、この状態は相互作用パラメータや重みのカーネルの形に関わらず観察されることから普遍的なものであることが期待される。次に示している図では、左の図が重みをかけていない状態での分布である。パラメータによりべき指数は -3 、 -1.5 と決まっているが、右の図においてフィードバック型の重みをかけることにより同じべき指数の分布に至っている様子が見られる。



ここで一つの仮説を立てることができる。 w が正のときは勝つものが勝ち続ける、社会学等で言うところのマタイ効果的な動きである。対して w が負のときは系を安定化させる効果であるといえる。このように系が不安定になる動きに対するフィードバックとしての安定化の効果が加わると(社会的にはブローバックという)普遍的にPareto-Zipfのテイルであるところの -2 のべき乗分布が現れるのではないか。

参考文献

- [1]D. ben-Avraham et al.Phys. Rev. E 68 R050103(2003)
- [2]Fujihara et al.e-print:cond-mat/0511625