

p -algebraic sequences and van der Corput's theorem

大阪市大・理 釜江哲朗 (Teturo Kamae)

ここでは, p -algebraic sequences の族と有限オートマトンによって生成される sequences の族が一致することと一様分布列に関する van der Corput's theorem の拡張という異なる二つの話題を述べる。

p は 2 以上の整数とし, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする。 K を集合 $\{0, 1, \dots, p-1\}$ と同一視する。 x を変数とする K 上の多項式及び形式的べき級数の全体とそれぞれ $K[x]$ 及び $K[[x]]$ とする。
 $K[[x]]$ の元 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対してはその係数列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ に対して実数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n}$ が p -algebraic であるとは, n 及び $P_0, P_1, \dots, P_n \in K[x]$ が存在して $P_n f^n + \dots + P_1 f + P_0 = 0$ が成立することという。他方以下をみる組 $(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$ を K 上の有限オートマトン という:

- (1) Σ は有限集合 (set of states)
- (2) $\varphi: \Sigma \times K \rightarrow \Sigma$ (next state function)
- (3) $\sigma_0 \in \Sigma$ (initial state)

(4) $\tau: \Sigma \rightarrow K$ (output function)。

上の φ は, K 上の有限列の全体 K^* と書くとき, $\Sigma \times K^*$ から Σ への写像に拡張される:

$$\varphi(\alpha, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)) = \varphi(\dots \varphi(\varphi(\alpha, \xi_1), \xi_2) \dots, \xi_k).$$

$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し, その p 進表現 $\tilde{n} = (e_k, e_{k-1}, \dots, e_0)$ と書く。但し,

$$n = \sum_{i=0}^k e_i p^i, \quad e_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (\forall i) \quad \text{且} \quad e_k \neq 0.$$

また, $\tilde{n}^* = (e_0, \dots, e_{k-1}, e_k)$ と書く。 K 上の無限列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ が K 上の有限オートマトン $(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$ によって生成される $\tilde{n}$ は $\ast$ 生成されるとは, それぞれ

$$a_n = \tau \varphi(\sigma_0, \tilde{n}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$\tilde{n}^*$ は

$$a_n = \tau \varphi(\sigma_0, \tilde{n}^*) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

と等しいことをいう。

定理 1 (G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France and G. Rauzy [1]) K 上の無限列 f に関する以下の 3 命題は互いに同値である。

(1) f は p -algebraic。

(2) f は K 上のある有限オートマトンで生成される。

(3) f は K 上のある有限オートマトンで $\ast$ 生成される。

例 $p = 2$ とし,

$$a_n = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\sum_{i=0}^n e_i} \right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} e_i e_{i+1}} \right)$$

と定義する。但し, $\hat{n} = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_0)$ 。このとき,
 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(x+1)^3 f^2 + (x+1)^2 f + x = 0$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
 は $(x+1)^5 g^2 + (x+1)^4 g + x^3 = 0$ をみたし, いずれも $\mathbb{Z}$ -
 algebraic である。これらの係数列は前者は Morse sequence

後者は Rudin-Shapiro sequence と呼ばれている。前者は

$$\Sigma = \{0, 1\}, \quad \varphi(i, j) \equiv i + j \pmod{2} \quad (\forall i, j \in \{0, 1\})$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \tau(i) = i \quad (\forall i \in \{0, 1\})$$

より有限オートマトン $(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$ によって生成される。

後者は

$$\Sigma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\varphi((i, j), k) = (i + jk, k) \pmod{2} \quad (\forall i, j, k \in \{0, 1\})$$

$$\sigma_0 = (0, 0), \quad \tau((i, j)) = i \quad (\forall i, j \in \{0, 1\})$$

より有限オートマトン $(\Sigma, \varphi, \sigma_0, \tau)$ によって生成される。

註 van der Poorten [2] によれば, 実数 α が p -algebraic
 ならば有理数 α または超越数となる。このことと定理 1 より
有理数でない代数的数は有限オートマトンで生成できないこと
 がわかる。

つぎに, van der Corput's theorem の拡張について述べ
る。 $[0, 1]$ 上の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が 一様分布列 であるとは,
任意の $0 \leq u < v \leq 1$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[u,v]}(a_n) = v - u$$

が成立するをという。集合 $S \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ が van der Corput's property を持つとは, すべての $r \in S$ に対して
 $\{a_{n+r} - a_n \pmod{1}\}_{n=1,2,\dots}$ が一様分布列とならうという任意
の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が一様分布列となることをいう。 van
der Corput は集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ は van der Corput's
property を持つ。この結果はつぎのように拡張される。

定理 2 (T. Kamae and M. Mendes France [3])

$S \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ は $P_\delta^*(S) \neq \emptyset$ ならば van der Corput's
property を持つ。但し,

$$P(S) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \equiv \sum_{n \in T} c_n e^{2\pi i n x}, \quad T \text{ は } S \text{ の有限部分集合} \\ c_n \in \mathbb{R} \quad (\forall n \in T) \\ f(0) = 1 \\ |f(x)| \leq 1 \quad (\forall x \in [0, 1]) \end{array} \right\}$$

$P^*(S)$: $P(S)$ を含み各点収束で閉じた関数の最小族

$$P_\delta^*(S) = \left\{ f \in P^*(S); \Re f(x) \geq -\delta \quad (\forall x \in [0, 1]) \right\}.$$

例 $S = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ は van der Corput's property を持つ。何故か？

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (n \cdot m!)^2 x} = \begin{cases} 0 & x: \text{無理数} \\ 1 & x: \text{有理数} \end{cases}$$

は $P_0^*(S)$ に属す。

例 I は $\{1, 2, 3, \dots\}$ の勝手な無限部分集合とし、
 $S = \{n-m; n > m, n \in I, m \in I\}$ とする。このとき、 S は
 van der Corput's property を持つ。何故か？

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{n \in S \\ n \leq N}} e^{2\pi i n x}}{\sum_{\substack{n \in S \\ n \leq N}} 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{\substack{n \in I \\ n \leq N}} e^{2\pi i n x}}{\sum_{\substack{n \in I \\ n \leq N}} 1} \right|^2 \geq 0$$

は $P_0^*(S)$ に属す。

註 その後、I. Z. Ruzsa [4] によって定理 2 の逆が証明された。

文 献

- [1] G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France and G. Rauzy,
Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math.
France 108 (1980) p.401-419.
- [2] van der Poorten, Propriétés arithmétiques et algébriques
de fonctions satisfaisant une class d'equations fonctionelles,
Séminaire Théorie des Nombres, Bordeaux, 1974-1975, exposé 7.
- [3] T. Kamae and M. Mendes France, Van der Corput's difference
theorem, Israel J. Math. 31 (1978) p.335-342.
- [4] I. Z. Ruzsa, Connections between the uniform distribution
of a sequence and its differences, Proceedings of the Budapest
Conference on number theory, 1981.