

Normal form of $D_4^\pm$ singularity of fronts and its applications

神戸大学・大学院理学研究科 佐治健太郎

Kentaro Saji

Department of Mathematics, Graduate School of Science
Kobe University

2025 年 3 月 30 日

概要

本稿は 2024 年 12 月 16-18 日に京都大学数理解析研究所で行われた 2024 年度 RIMS 共同研究（公開型）「可微分写像の特異点論とその応用」での著者の講演の内容に加筆したものに, [2] の内容を加えてまとめ直したものである. 上記講演では主に D_4^- 特異点の幾何学を扱った. また, [2] の内容は主に D_4^+ 特異点の幾何学である. 本稿は両者を合わせた $D_4^\pm$ 特異点の幾何学に関する著者の最近の研究の総合的な解説である.

1 $D_4^\pm$ 特異点の $SO(3)$ 標準形

変数 (u, v) の $D_4^\pm$ 関数

$$\frac{u^3}{6} \pm \frac{uv^2}{2}$$

の 3 パラメーター (x, y, z) の Morse 関数族

$$H(u, v, x, y, z) = \frac{u^3}{6} \pm \frac{uv^2}{2} + xu + yv + z$$

〒657-8501 神戸市灘区六甲台 1-1

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

の判別集合 $\mathcal{D}_H \subset (\mathbf{R}^3; x, y, z)$ は

$$\begin{aligned} (u, v) &\mapsto (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \quad (+ \text{ のとき}), \\ (u, v) &\mapsto (u^2 - v^2, uv, u^3 - 3uv^2) \quad (- \text{ のとき}) \end{aligned}$$

のパラメーター表示をもつ (図 1). 波面の $D_4^\pm$ 特異点とはこの写像の原点における写像芽

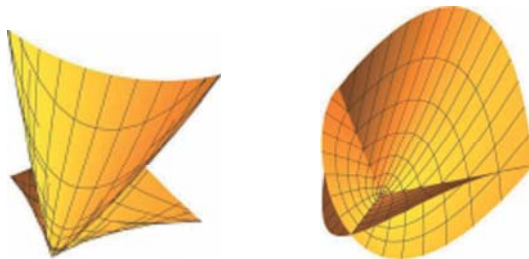


図 1 D_4^+ 特異点 (左) と D_4^- 特異点 (右)

に定義域と像域の微分同相写像芽でうつりあう ($\mathcal{A}$ -同値) ものをいう. この写像の微分幾何的性質を調べたい場合, $\mathcal{A}$ -同値は微分幾何的性質を保存しないため, 次のような $SO(3)$ 標準形と呼ばれる表示を用いて研究する方法がある. 次が成り立つ.

定理 1.1 ([2]). 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は座標 (u, v) と $\varphi_1(0, 0)$ と $\varphi_2(0, 0)$ が一次独立であるような φ_1, φ_2 が存在して $f_u = u\varphi_1(u, v)$, $f_v = v\varphi_2(u, v)$ が成り立つとする. このとき $a \in \mathbf{R}$, $b_1, b_3, c_1, c_3 \in C^\infty(1, 1)$, $b_2, c_2 \in C^\infty(2, 1)$, $s \in \text{Diff}_+(2)$, $A \in SO(3)$ が存在して

$$\begin{aligned} A \circ f(s^{-1}(u, v)) = & \left(u^2 - v^2, a(u^2 + v^2) + u^3 b_1(u) + u^2 v^2 b_2(u, v) + v^3 b_3(v), \right. \\ & \left. u^3 c_1(u) + u^2 v^2 c_2(u, v) + v^3 c_3(v) \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

が成り立つ. ただし $a > 0$, $c_1(0) \geq 0$, $c_3(0) \geq 0$ である.

定理 1.2. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は座標 (u, v) と $\varphi_1(0, 0)$ と $\varphi_2(0, 0)$ が一次独立であるような φ_1, φ_2 が存在して

$$f_u = u\varphi_1(u, v) + v\varphi_2, \quad f_v = -v\varphi_1(u, v) + u\varphi_2$$

が成り立つとする. このとき $a \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in C^\infty(2, 1)$, $s \in \text{Diff}_+(2)$, $A \in SO(3)$ が存

在して

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left((u^2 - v^2)/2 + a(u, v), auv + b(u, v), c(u, v) \right), \\ j^2 a(0) &= j^2 b(0) = j^2 c(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

が成り立つ. ただし

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_1(u^2, v^2) + ua_2(u^2, v^2) + va_3(u^2, v^2) + uva_4(u^2, v^2), \\ b(u, v) &= b_1(u^2, v^2) + ub_2(u^2, v^2) + vb_3(u^2, v^2) + uvb_4(u^2, v^2), \\ c(u, v) &= c_1(u^2, v^2) + uc_2(u^2, v^2) + vc_3(u^2, v^2) + uvc_4(u^2, v^2) \end{aligned}$$

とおくと,

$$(d_1)_u + (d_1)_v \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (1.3)$$

$$d_2 - 2v((d_2)_u + (d_2)_v) \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (1.4)$$

$$d_3 + 2v((d_3)_u + (d_3)_v) \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0, \quad (1.5)$$

$$(d_4)_u + (d_4)_v \Big|_{(u,v)=(t,-t)} = 0 \quad (1.6)$$

をみたす. ただし, $d = a, b, c$.

D_4^+ 特異点は定理 1.1 の仮定をみたし, D_4^- 特異点は定理 1.2 の仮定をみたす. これらは一意性をみたさないが 3-jet までの標準形で一意性をみたすものが作れる.

定理 1.3 ([2]). 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は $D_4^\pm$ 特異点とする. このとき, 局所座標 (u, v) と $A \in SO(3)$, $a > 0$, $b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03} \in \mathbf{R}$ $c_{30} > 0$, $c_{03} > 0$ が存在して

$$A \circ f(u, v) = \begin{cases} (u^2 - v^2, a(u^2 + v^2) + b_{30}u^3 + b_{03}v^3, c_{30}u^3 + c_{03}v^3) & (+) \\ (u^2 - v^2, auv + b_{30}u^3 - b_{03}u^2v - b_{30}uv^2 + b_{03}v^3, \\ c_{30}u^3 - c_{03}u^2v - c_{30}uv^2 + c_{03}v^3) & (-) \end{cases}$$

となる.

この式の右辺を $f_{(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03})}$ と書くことにするとさらに次が成り立つ. $D_4^\pm$ 特異点 $f_{(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03})}$, $f_{(a', b'_{30}, b'_{03}, c'_{30}, c'_{03})}$ が定義域の座標変換と像域の $SO(3)$ による変換で 3-jet までが一致するようにできるならば

$$(a, b_{30}, b_{03}, c_{30}, c_{03}) = (a', b'_{30}, b'_{03}, c'_{30}, c'_{03})$$

となる. ここに現れた係数はすべて微分幾何的不変量であり, 写像の性質を言い表すための言葉として用いることができる.

2 $D_4^\pm$ 特異点の幾何学

ここでは定理 1.3 により分かる $D_4^\pm$ 特異点の性質を述べる.

2.1 D_4^+ 特異点

写像芽 f を D_4^+ 特異点とし, そのパラメーター表示を定理 1.3 のものとする. このとき f の特異点集合は $\{uv = 0\}$ であり, ガウス曲率 K は

$$K = \frac{1}{uv} \left(\frac{c_{03}c_{30}}{16a^2} + O(1) \right)$$

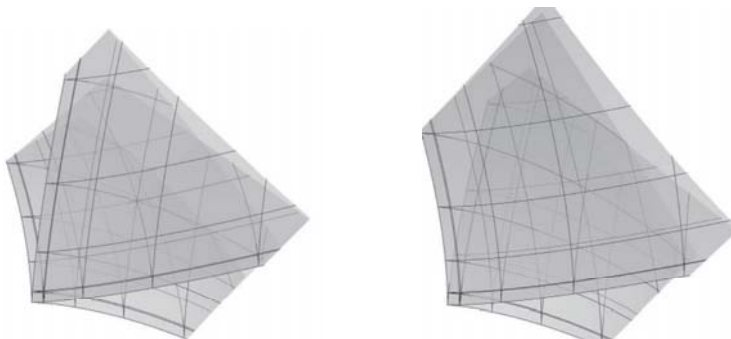
となり, 自己交差曲線 $i(t)$ は

$$i(t) = \left(1, - \left(\frac{c_{03}}{c_{30}} \right)^{1/3} \right) t + O(2)$$

となる. ゆえに, 自己交差のある領域はガウス曲率が常に負である. さらに $\{v = 0\}$ 上の特異曲率 $\kappa_s(u)$ (測地曲率に符号を適切につけたもの) は

$$\kappa_s(u) = \frac{1}{u} \left(\frac{b_{30}}{2(1+a^2)^{3/2}} + O(u) \right)$$

となる. 特異曲率の幾何学的意味 [4, Theorem 1.17] から, $b_{30}b_{03}$ の符号により特異点の近辺での cuspidal edge の曲がり方は図のようになることがわかる.



$b_{30}b_{03} > 0$ のとき

$b_{30}b_{03} < 0$ のとき

ベクトル ν を f の単位法線ベクトルとする. 原点を通る平面 $\nu^\perp$ を接平面という. また, $\hat{\gamma}_1(v) = f(0, v)$, $\hat{\gamma}_2(u) = f(u, 0)$ とおくとこれらは特異点集合のパラメーター表示で

あり, $\hat{\gamma}_i''(0)$ ($i = 1, 2$) は一次独立であることがわかる. これらで生成される直線を**特異曲線の接線**といい (図 3), 曲面のある部分のこれらの二等分線を**中心線**という. 中心線の法平面で原点を通るものを**法平面**という. 中心線と $\nu(0)$ で生成される平面を**主平面**という (図 2). 次がわかる.

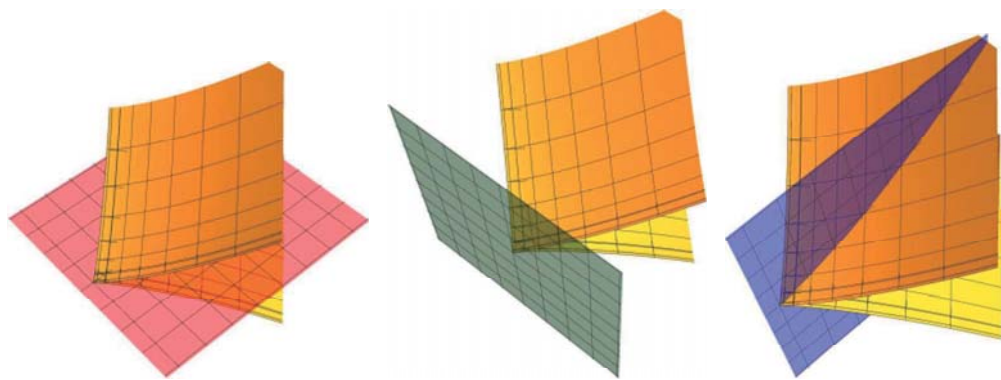


図 2 接平面, 法平面, 主平面

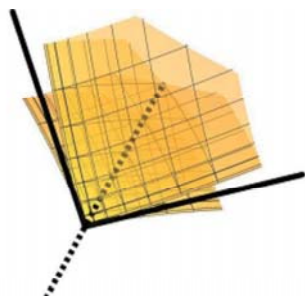


図 3 中心線 (点線) と特異曲線の接線 (実線)

定理 2.1. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ は D_4^+ 特異点とする. 直交行列 $T \in O(2)$ が存在して $0 \in \mathbf{R}^3$ の集合芽として $T \circ f(U) = f(U)$ をみたし, T が恒等写像でないとき, T は

- (1) 接平面に関する折り返し,
- (2) 主平面に関する折り返し,
- (3) 中心線に関する π 回転

のどれかである。さらに f が定理 1.3 の形であり、解析的であれば、

- (4) 上記の (1) の必要十分条件は $b(u, v) = b(-u, -v)$, $c(u, v) = -c(-u, -v)$ である。
- (5) 上記の (2) の必要十分条件は $b(u, v) = b(v, u)$, $c(u, v) = c(v, u)$ である。
- (6) 上記の (3) の必要十分条件は $b(u, v) = b(-v, -u)$, $c(u, v) = -c(-v, -u)$ である。

2.2 D_4^- 特異点

写像芽 f を D_4^- 特異点とし、そのパラメーター表示を定理 1.3 のものとする。このとき f の特異点集合は原点のみであり、ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-\frac{c_{30}^2 + c_{03}^2}{4a^2} + O(1) \right),$$

$$H = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{a^2 - 1}{2a} (c_{30}u + c_{03}v) + O(2) \right)$$

である。また、この式から特異点付近でガウス曲率は負の無限大に発散することがわかる。さらに平均曲率が発散しないためには $a = 1$ である必要があることから、Weierstrass 型表現公式

$$k = \operatorname{Re} \int \left(\frac{(1 - g^2)h}{2gh} \right) dz.$$

で与えられた極小曲面 k は $g_z h_z \neq 0$ のとき D_4^- 特異点をもつことが知られているが、この極小曲面の定理 1.3 にあられる不変量 a の値は $a = 1$ であることがわかる。一方 k の式の 2-jet を変形して直接 $a = 1$ を示すこともできる。特異点付近でガウス曲率が常に負であることから、 D_4^- 特異点付近には漸近線が存在する。単位法線ベクトルを ν とし、 ν から定まる第二基本形式の係数を

$$L = f_{uu} \cdot \nu, \quad M = f_{uv} \cdot \nu, \quad N = f_{vv} \cdot \nu$$

とし、 $(0, 2)$ 対称テンソル

$$w_{as} = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

を考える。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2, 0)$ が $w_{as} = 0$ の解であるとは $w_{as}(X, X) = 0$ のときと定義し、 $w_{as} = 0$ が定める模様とは $w_{as} = 0$ の解の積分曲線のこととする。次がわかる。

定理 2.2. 写像芽 f は D_4^- 特異点とする。このとき座標 (u, v) が存在して w_{as} は

$$j^1(\Phi^* w_{as}) = -v du^2 - 2u dudv + v dv^2.$$

をみたす.

ここに現れた $(0, 2)$ テンソルに対して $-v du^2 - 2u dudv + v dv^2 = 0$ が定める模様は [1] によって与えられており, 図 2.2 のようになる. ここで, w_{as} は X の方向に関する二

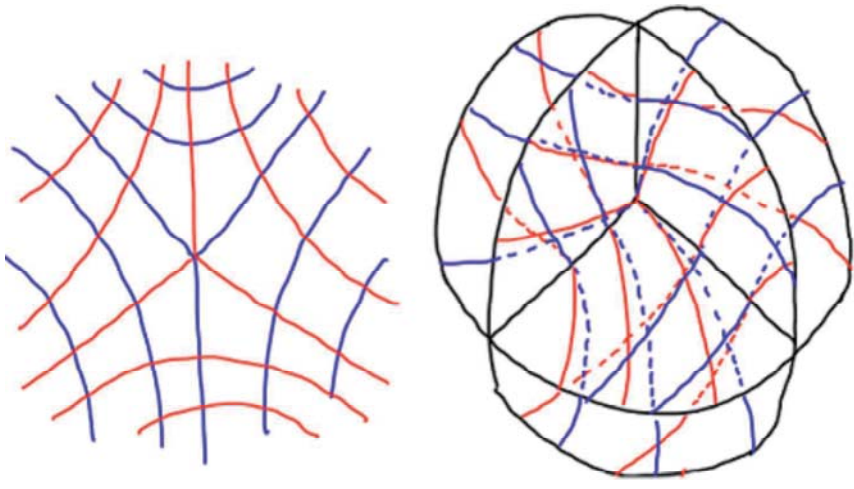


図 4 D_4^- 特異点付近の漸近線

次方程式となっており, その判別式が原点以外では正であるため, 原点以外では一次独立な 2 つの方向が $w_{as} = 0$ の解となる. その 2 つの方向を色分けして描いてある.

3 大域的な公式

M を向き付けられた閉曲面とする.

定義 3.1. 写像 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ が余向き付可能な波面であるとは

$$\nu : M \rightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$$

が存在して任意の $p \in M, X \in T_p M$ に対して

$$df_p(X) \cdot \nu(p) = 0 \quad \text{かつ} \quad \left(f, \frac{\nu}{|\nu|}\right) : \text{はめこみ}$$

が成り立つときをいう.

波面とは局所的に単位法線ベクトルが特異点を越えて拡張可能なものをいう. 余向き付可能な波面とはその単位法線ベクトルが M 全体に拡張可能なものである. 余向き付可能

な波面 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して $p \in M \setminus S(f)$ が **+** の正則点であるとは ν が M の向き付けに対して正の方向であるときをいい **-** の正則点であるとは ν が M の向き付けに対して負の方向であるときをいう. $M_{\pm}$ を $\pm$ の正則点の集合とする.

定理 3.2. 余向き付け可能波面 $f : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ は特異点として $\text{rank} = 1$ であり, 高々 peak であるものと $D_4^{\pm}$ 特異点のみを持つとする. このとき

$$2\pi\chi(M) = \int_M K dA + 2 \int_{S(f)} \kappa_s ds + \sum_{P_i \in S_{D_4^+}(f)} (4\angle_{D_4^+}(P_i) - 2\pi) + 2\pi\sharp(S_{D_4^-}(f))$$

$$2 \deg \left(\frac{\nu}{|\nu|} \right) = \chi(M_+) - \chi(M_-) + \sharp(P_+) - \sharp(P_-) + \sharp((D_4^-)_+) - \sharp((D_4^-)_-)$$

が成り立つ. ここで, $S_{D_4^{\pm}}(f)$ は f の $D_4^{\pm}$ 特異点の集合, $(D_4^{\pm})_{\pm}$ は周囲が $\pm$ の正則点であるような $D_4^{\pm}$ 特異点を表す. また, $\angle_{D_4^+}(p)$ は D_4^+ 特異点 p に対して, 特異曲線の接線のなす角を表す.

これは $D_4\pm$ 特異点がない場合の同様の公式 [3, 4] に $D_4\pm$ 特異点の寄与が加わった形をしている. ここで $\text{rank } df = 1$ である特異点についての記号は κ_s は特異曲率であり, $P_{\pm}$ は $\pm$ の peak を表す. ただし peak の定義を含めた詳細は [3, 4] を参照されたい.

参考文献

- [1] J. W. Bruce and D. L. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), no. 1-2, 147–168.
- [2] K. Saji, *Normal form of D_4^+ -singularities of fronts and its applications*, arXiv:2312.05931v1.
- [3] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.
- [4] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 491–529.