

Waring 問題における $G(n)$ の評価について

名工大 数学教室 江田義計

I. M. Vinogradov は 1959 年に n 中和の Waring 問題における $G(n)$ の upper bound に対し、彼の理論のほとんど極限ともいえる美しい結果： $n \geq 170000$ に対して

$$(1) \quad G(n) < n(2 \log n + 4 \log \log n + 2 \log \log \log n + 13)$$

を与えた。その若々しい姿にはただ頭が下がります、Hua は 1949 年に下記の定理 4 を与えたとき Vinogradov の仕事の素晴らしさを称えてすでに final stage に達したと述べているのであるが。

この結果をうるに大切な役割を果たすのは「Vinogradov の平均値定理」と呼ばれる（この命名は Hua による）次の結果である：

定理 1：正整数 n, r に対し P は十分大としておく、

$$n \geq 12, \quad r \geq r_0 = [6.5 n^2 \log(12 n^2)]$$

ならば

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}$$

とおいて

$$V = \int_0^1 \dots \int_0^1 |S|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

とおくと

$$V \leq (8n)^{4.3 n^3 (\log 12 n^2)^2} P^{r - \frac{n(n+1)}{2}}$$

をうる。

Hua は 1959 年の Enzyklopädie の中の一分冊の改訂版を 1963 年に北京から出したが (指数和的估計及其在数論中的应用), うち早くその附録の一節で上記の Vinogradov の結果を紹介し, 上の平均値定理の代りに少しゆるい次の結果で十分であることを注意している。

定理 2: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |S|^{2r_0} d\alpha_n \dots d\alpha_1 \ll P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1) + \varepsilon}$$

ここで r_0 は次表で与えられる

n	2	3	...	10	$n \geq 11$
$2r_0$	6	16	...	1770	$2r_0 \geq 2n^2 (3 \log n + \log \log n + 4) - 4$

この Hua の結果は実は, 1952 年の Acta Scientia

Sinica, Vol 1, No. 1, p.1~76 の美事な結果によるものの
 ようである, この結果は細かに注意を加えて堆疊素数論の中
 に証明されている (この本の初版は 53 年修訂本は 1957 年
 である). これは次の定理 3 の形の平均値定理であるが古
 い Tarry 型 Diophantus 方程式の解の回数を与えるもの
 であり Hua の論文の表題もとして Tarry 型定理と呼んで
 おくがよい.

定理 3: 上記のように r_0 を定義して

($r_0 \geq 2 [n^2 (3 \log n + \log \log n + 4)] - 11$ とし
 よい)

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2r_0} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 = c_1 c_2 P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1)} + O(P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1) - c(k)})$$

ここで c_1, c_2 は収束する正数で次式で与えられる

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 e(\beta_n x^n + \cdots + \beta_1 x) dx \right|^{2r_0} d\beta_n \cdots d\beta_1$$

$$c_2 = \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_n=1}^{\infty} \sum_{h_1=1}^{g_1} \cdots \sum_{h_n=1}^{g_n} \left| B\left(\frac{h_n}{g_n}, \dots, \frac{h_1}{g_1}\right) \right|^{2r_0}$$

$(h_1, g_1)=1 \quad (h_n, g_n)=1$

$$B\left(\frac{h_n}{g_n}, \dots, \frac{h_1}{g_1}\right) = \frac{1}{g_1 \cdots g_n} \sum_{x=1}^{g_1 \cdots g_n} e\left(\frac{h_n}{g_n} x^n + \cdots + \frac{h_1}{g_1} x\right)$$

さて上記の種々の三角和の評価に対して (この言葉は Vinogradov によるものであろう) その極大になるのは更に次の形の平均値定理 なのであるが、これは 194 年 = Hua によって次の形に、その簡明な証明と共に与えられた

(Quart. J. Math (Oxford), Vol. 20, p. 48-61)

定理 4: $P \geq 2$, k は 整数 と して

$$r_0 \geq \frac{1}{4} n(n+1) + lk, \quad k \geq 2$$

と お く と

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2r_0} d\alpha_0 \cdots d\alpha_l \leq (7r_0)^{4r_0 l} (\log P)^{2l} P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1) + \Delta}$$

$$= \tau \quad \Delta = \frac{1}{2} n(n+1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l, \quad \tau = l = l(n) \text{ は 非負}$$

整数 と す る.

1950 年頃までの Vinogradov の結果の展望は Stekloff 研究所から出ている論文で得られるが幸に K. F. Roth と A. Davenport によって英文の本 The methods of trigonometrical sums in the theory of numbers (Interscience 社), (1954). として身近にある。またその後、結果を記している Vinogradov 自身によって МЕТОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ,

Mockba, 1971 が発行されている。

有限次代数体における Waring 問題などに関しては Siegel 以来 Taniyama, Körner などによって取扱われて来た筆者は (1) に近い結果は得たがそれは 定理 1~3 による。定理 4 の形によったものであった。その特殊な場合つまり有理数体の場合と (一般の場合とを意味深く改変して得られる) ので。記号は 59 年の原論文および英文の本によるものとする。

N は十分大きな正整数とし, $P = [N^{1/n}]$, $X_0 = [\sqrt{P}]$, $Y_0 = [\sqrt{X_0}]$, $R = [X_0^{1-1/2n}]$, $z = 2n P^{n-1}$, $z_0 = X_0^{n-1/2}$, $\gamma = 1/4(1-1/2n)$ とし更に $-1/2 \leq \alpha \leq 1-1/2$ の中で $\alpha = a/q + z$, $|z| \leq 1/qz$, $q \leq P^\delta$, a, q は正整数とし $(a, q) = 1$, $0 \leq a < q$, z 満足する α の集合を basic interval とする。

$k_2 > 2n$ とし $X_j = [X_0^{\delta^j}]$, $Y_j = [\sqrt{X_j}]$, $X_{k_2} > C_0 > 0$ ($0 \leq j \leq k_2-1$), $\delta = 1 - k_0/(n - \frac{1}{2})$,

$k_0 < n$. とし

$$Q(\alpha) = \sum_p \sum_w e^{2\pi i \alpha p^n w}$$

とす, $n \in \mathbb{Z}$ 素数 p は $R < p \leq 2R$ と w は

$$1 \leq h_j \leq Y_j \quad 1 \leq j \leq k_2$$

$$w = \sum_{j=0}^{k_2-1} (X_j + h_j)$$

と独立に動かすことができる.

そこで $Q(\alpha)$ の $\sum \sum$ の次数を Q' とおくと

$$Q(\alpha) \ll Q' X_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r_0} \left(-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \delta^{k_2} + \frac{1}{4k_2} \left(n - \frac{1}{2}\right) (1 - \delta^{k_2}) + \epsilon \right)$$

を得る. 更に $P_1 = [\frac{1}{4}P]$, $P_i = [\frac{1}{2}P_{i-1}^{1-1/n}]$, $2 \leq i \leq k_3$

とし $\xi_1, \dots, \xi_{k_3}$ は $P_i \leq \xi_i \leq 2P_i$ とし $u = \xi_1^n + \dots$

$\dots + \xi_{k_3}^n$ かつ $(\frac{1}{5}P)^n \leq (\frac{1}{2}P)^n$ の間を動かすことができる.

かくして

$$L(\alpha) = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x^n}$$

$$S(\alpha) = \sum_u e^{2\pi i \alpha u}$$

と

$$I(N) = \int_{-T_0^{-1}}^{-T_0^{-1}+1} L^{4n}(\alpha) Q(\alpha) S^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha$$

このあと本と同じ方法でやればよいから

$$k_0 = \left[\frac{1}{2} \log n \right]$$

$$k_2 = \left[\frac{\log(8n)}{-\log\left(1 - \frac{k_0}{n - \frac{1}{2}}\right)} + 1 \right]$$

$$l = \left[\frac{\log(4n(\log n + 1))}{-\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + 1 \right]$$

$$r_0 = 2 \left[\frac{1}{8} k(k+1) + \frac{1}{2} k l + 1 \right], \quad k = 2k_0$$

$$k_3 = \left[\frac{\log\left(\frac{(n-1)}{16nr_0}\right)}{-\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + 1 \right]$$

とすると $I(n) > 0$ が得られ同時に $n \geq 55$ である。

$$G(n) < 2n \log n + 6n \log \log n + 31n - 11.$$

と得る。

なお本では $n \geq 3$ である。

$$G(n) < n(3 \log n + 11)$$

と得られたい。

代数体での Waring 問題については最近の Tatzawa の Acta Arith XXIV, 1973 を参照されたい。

Vinogradov の平均値定理について Birch などの結果がこれから重要になると思うし、また最近の Izbest,

(1973) に 出た A. A. Karacuba に ついて の べ り だ け で
あ る が、こ れ は 重 要 な 結 果 を 含 む と 思 う の で 次 の 機 会 に つ
き たい。な お 筆 者 の 怠 慢 を 常 に い ま し め ら れ、早 速 に
Karacuba の 論 文 の 注 意 を い た だ く な ど 竜 沢 先 生 に 対 し
て 種 々 の こ と も に め ぐ 深 く 感 謝 し た い

(1974 - 8 - 10)