

(続紙 1)

京都大学	博士（ 人間・環境学 ）	氏名	北垣 芳彦
論文題目	Generalized eigenvalue-counting estimates for some random acoustic operators （ランダムな音響作用素に対する一般化された固有値数え上げ評価）		
(論文内容の要旨)			
ランダムな作用素のスペクトルの研究は1958年のアメリカの物性物理学者アンダーソンの研究以来まずアンダーソンモデルを対象として始められ、その後他のモデルへの拡張が考えられてきた。2009年にクライン、コム、ジェルミネの研究グループによって導出された固有値の数え上げ評価もまずアンダーソンモデルに対して与えられたが、他のモデルへの拡張が予想されていた。そこで本論文では離散的な空間上のランダムな媒質中の音響を記述する波動方程式に現れる線形作用素(以下音響作用素と呼ぶ)にクラインらによる固有値の数え上げ評価を拡張することが試みられている。この音響作用素の特徴はそれを構成する確率変数についての摂動の階数が空間の次元 d だけあることにあり、アンダーソンモデルのように1ではない。このことが多次元の場合に問題をもたらし、クラインらが与えた評価はそのままの形では成立が期待出来ない。しかし本論文では弱い形の評価であれば音響作用素に対しても成立し、その評価からも幾つかの知見が得られることが示されている。ここでクラインらの与えた評価とは対象とする作用素を有界領域に制限した作用素の固有値がある区間内に n 個以上存在する確率をその区間の長さの n 乗で上から抑える評価であり、$n=1$ の場合はウェグナーが1981年に与えた評価になり、$n=2$ の場合は南が1996年に与えた評価になる。いずれも固有値があまり集積しないことを表現しているが本論文の対象のように摂動の階数が大きい場合は集積が起きやすくなる。本論文の与えている評価は考える作用素の固有値がある区間内に $(n-1)d+1$ 個以上存在する確率をその区間の長さの n 乗で上から抑える評価である。 第1章は序文であり本論文の結果の既存の結果との関係が述べられている。 第2章の第1節では本論文の主対象である音響作用素が定義され、それに対して成り立つ固有値の数え上げ評価が定理の形でまとめられている。第2節では前節の定理がクラインらの手法に工夫を加えることによって証明されている。第3節では第1節の定理を応用することによりアンダーソン局在が起きるエネルギー区間内の音響作用素の固有値の多重度が有限になることが示されている。ここでアンダーソン局在とは媒質がランダムであることが原因でスペクトルが点型になり、対応する波動関数が空間的に局在することを言い、アンダーソンモデルなどの基本的なランダム作用素に対してはスペクトル区間の境界付近で起きることが示されている。ここで扱われている音響作用素に対しても1993年にクラインとフィゴーティンによって同様の局在が起きることが示され			

ている。第1節の定理の他の応用として状態密度の評価があるがこれは定理から直ちに導くことが出来るので第1節だけに系の形で述べられている。この応用が1981年のウェグナーの評価の本来の動機であった。

第3章では前章で扱われたものとは別の音響作用素が扱われている。即ち前章で扱われた作用素は媒質の密度に対応する項がランダムであったのに対し、本章で扱われている作用素は音速に対応する項がランダムなものである。本章で扱われている作用素の固有値の数え上げはバーマン・シュビンガー型の評価によりアンダーソンモデルの固有値の数え上げに帰着し、従ってクラインらによる固有値の数え上げ評価がそのままの形で成立する。第1節では本章で扱われる音響作用素が定義され、それに対する固有値の数え上げ評価が定理の形でまとめられている。第2節ではバーマン・シュビンガー型の評価が展開されそれによって前節の定理が証明されている。第3節では第1節の定理を応用することによりアンダーソン局在が起きるエネルギー区間内の音響作用素の固有値から構成される点過程がポアソン点過程で近似されることが示されている。この応用が南の評価の本来の動機であった。

第4章では付録として関連する話題について述べられている。第1節では前章の作用素のスペクトルの上端でのリフシッツ特異性がアンダーソンモデルに対する同様の性質の証明に帰着することにより示されている。ここでリフシッツ特異性とは状態密度がスペクトル区間の境界において指数的に減衰することであり、スペクトルが境界付近で非常に希薄なことを示している。これは1964年に物理学者リフシッツがアンダーソンモデルに対して起きることを指摘して以来ランダムな作用素に特徴的な現象として知られておりアンダーソン局在にも関係している。第2節では1次元の場合に第2章で扱われた作用素と第3章で扱われた作用素がある作用素とその随伴作用素の合成で表示したとき、互いに順序交換しただけのものであることが示され、これによって互いの0以外のスペクトルが同じであることが示されている。第3節では第3章で扱われた作用素に対してレゾルベント作用素の分数モーメントが空間変数について指数的に減衰することを示すことによってアンダーソン局在が起きることが証明されている。

(論文審査の結果の要旨)

ランダムな作用素のスペクトルの研究は1958年のアンダーソンの研究以来まずはアンダーソンモデルを対象として始められ、その後他のモデルへの拡張を考察することによって発展してきた。本論文の主な対象である離散系におけるランダムな音響作用素もアンダーソンモデル以外の基本的なモデルの一つである。その特徴の一つはその作用素を構成する確率変数に関する摂動の階数が空間の次元 d だけあることにあり、アンダーソンモデルのように1ではない。従ってアンダーソンモデルの摂動の階数が1であることを本質的に用いた理論を音響作用素に拡張するには新たな工夫が必要になる。2009年にクライン、コム、ジェルミネの研究グループによって導出されたアンダーソンモデルの固有値の数え上げ評価もそのような理論であった。

クラインらの評価は状態密度の上からの評価を与える1981年のウェグナーの評価とアンダーソン局在が起きるエネルギー区間内の固有値から構成される点過程がポアソン点過程で近似されることが示す1996年の南の評価を一般化した評価であり、いずれの評価も固有値があまり集積しないことを示している。しかし確率変数に関する摂動の階数が大きいほどこのことは示し難くなり、クラインらの評価はそのままの形では成立しそうにない。クラインの評価は対象とする作用素を有界領域に制限した作用素の固有値がある区間内に n 個以上存在する確率をその区間の長さの n 乗で上から抑える評価だが、本論文ではそれを弱め、 $(n-1)d+1$ 個以上存在する確率をその区間の長さの n 乗で上から抑える評価を与えている。

これは基本的にはクラインらの議論で階数1のところを d に置き換えたものであるが、その置き換えは自明ではない。何故ならばクラインらが拠り所として用いた全空間での確率測度による積分表示の被積分関数がクラインらの場合と違って負の値をとり得るようになるからである。このことが2009年にクラインらの研究グループが京都に来て本申請者と話し合ったときにも本質的な問題点として意見が一致した点であるが、本論文では積分範囲を被積分関数が0以上の値をとる範囲に制限した上でクラインらの議論を拡張することに成功している。

結果として得られた評価は $n=1$ のときのウェグナー型の評価はアンダーソンモデルに対するものと同等であり状態密度の上からの評価も得られている。 n が2以上の評価については弱くなっているためにポアソン点過程による近似は得られていない。しかし南型の評価の他の応用として2006年にクラインとモルチャノフによって示されたアンダーソンモデルの固有値がアンダーソン局在の起きるエネルギー区間においては重複しないことについては、その議論を拡張することによって音響作用素についても固有値の重複度が d 以下であることが示されている。結果としてアンダーソン

局在の起きるエネルギー区間では固有値は互いに反発するという描像は音響作用素に対しても成り立つことになり、本論文の結果によってその様子がより詳しく明らかになった。

なおランダム作用素のスペクトルの中心的問題はアンダーソン遷移を示すこと、即ちエネルギー区間の境界近くではアンダーソン局在が起き境界から離れたエネルギーについては非局在状態が現れることを示すことであり、本論文の問題もその中心的問題に通じている。以上の議論は本論文にも触れられているように電磁波を記述するマクスウェル方程式に現れる作用素にも通用する。一方対応する連続系のモデルではアンダーソンモデルに対応する合金型モデルでもまだ条件に制約が多く音響作用素への一般化は今後の課題である。

以上は音響作用素の中でも特に媒質の密度に相当する項がランダムな作用素についての話であったが本論文では音速に対応する項がランダムな音響作用素も扱っている。この固有値の数え上げについてはバーマン・シュビンガー型の評価によりアンダーソンモデルの固有値の数え上げに帰着させることによって証明され、その結果は状態密度と重複度の評価、ポアソン点過程による近似に応用されている。更に同じアンダーソンモデルの場合への帰着により、スペクトルの上端でのリフシッツ特異性やレゾルベント作用素の分数モーメントの空間変数に関する指数的な減衰性が証明され、その結果はアンダーソン局在の証明に応用されている。ここでの議論については標準的ではあるが少しの工夫によって多くの結果が導かれる興味深い例を与えている。

以上の成果は多くの文献に亘る最近までの高度な研究成果を十分理解した故に得ることが可能になったものである。更に参考論文として挙げられている論文では連続系におけるランダム面モデルの面状態密度の存在を示している。この題材は本論文のものと関連するが、別のモデルに対する主要な問題を解決しているものであり、申請者の学識の広さと深さを示している。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成23年1月28日、論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果、合格と認めた。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公表可能とする日付を記入すること。

要旨公開可能日： 年 月 日以降