

Integral Manifolds for Linear Functional Differential Equations

東北大 理 大 藤 敏 機

§1. 序

我々は、関数微分方程式

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

を考える。ここで x は $(-\infty, A)$ で定義され R^n の値を取る関数で、 $t \in (-\infty, A)$ に対して x_t は

$$(1.2) \quad x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{for } \theta \in (-\infty, 0]$$

によって定義される $(-\infty, 0]$ 上の関数を表わす。(1.1) において各固定した t に対して $f(t, \cdot)$ は $(-\infty, 0]$ の上で定義された適当な関数の集合 $\mathcal{B}$ の上で定義された汎関数である。初期時間を t_0 、初期関数を $\varphi_0 \in \mathcal{B}$ とした時の (1.1) の初期値問題の解を $x(t; t_0, \varphi_0)$ で表わす。各固定した t に対して、 $x(t; t_0, \varphi_0)$ から (1.2) によって定義した関数を $x_t(t_0, \varphi_0)$ と表わす。我々は (1.1) に対して、その $(n+1)$ 次元 Integral Manifold を次のような $R \times \mathcal{B}$ の部分集合 S と定義する。

定義 S は $R \times B$ の部分集合で、媒介変数 $(t, c_1, \dots, c_r)$ を用いて

$S = \{(t, \varphi) \mid \varphi = f(c_1, \dots, c_r, t) \text{ } -\infty < t < +\infty, c_1, \dots, c_r \text{ は適当な定義域を持つ}\}$
と表わされ、 $(t_0, \varphi_0) \in S$ ならば、 $-\infty < t < +\infty$ に対して (1.1) の解 $x(t; t_0, \varphi_0)$ が存在し、かつ $(t, x(t; t_0, \varphi_0)) \in S$ である。

§ 2 Hale の空間

B として Hale は [4] に於て、次のような空間を公理的に与えた。以後これを Hale の空間と呼ぶ。

$B = B((-\infty, 0] \rightarrow R^n)$ は、 $(-\infty, 0]$ から R^n への関数 φ の作る集合で、その上にノルム $\|\cdot\|$ が定義されており、このノルムに関して Banach Space になっている。 $\varphi \in B$ に対して φ^β を φ の $(-\infty, -\beta]$ への制限とすると、これは $(-\infty, -\beta]$ から R^n への関数である。 $(\beta > 0)$ $\overline{B}_\beta = \{\eta = \varphi^\beta \mid \varphi \in B\}$ とおき、 $\eta \in \overline{B}_\beta$ に対して、

$$\|\eta\|_\beta \equiv \inf \{\|\varphi\| \mid \varphi^\beta = \eta, \varphi \in B\}$$

とおくと、 $\|\cdot\|_\beta$ は $\overline{B}_\beta$ 上の semi-norm である。 $\overline{B}_\beta$ に同値関係 $\sim$ を、 $\eta_1 \sim \eta_2 \Leftrightarrow \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta = 0$ によって定義し、 $B_\beta = \overline{B}_\beta / \sim$ とおくと B_β は Banach Space である。 B_β のノルムを以後 $\|\cdot\|_\beta$ と書く。さて B に対して次の仮定を置く。

(h) $x(t)$ が $(-\infty, A)$ で定義され ($A > 0$)、 $x_0 \in B$ かつ $[0, A)$ で連続ならば、 x_t は $t \in [0, A)$ で連続である。

(h₂) $(-\infty, 0]$ で定義された有界連続な関数は $\mathcal{B}$ に属する。

(h₃) ある $r > 0$ が存在して次が成立する。 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が、その Euclid norm が一様有界な列で、 $(-\infty, 0]$ に含まれる任意のコンパクト区間の上で一様に φ に収束するならば

$$\varphi^r \in \mathcal{B}_r, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^r - \varphi^r\|_r = 0$$

(h₄) $r \geq 0$ で定義された連続、単調非減少、 ≥ 0 な関数 $\ell(r)$, $c(r)$ が存在して、 $\forall \varphi \in \mathcal{B}$, $\forall \beta \geq 0$ に対して

$$\|\varphi\| \leq \ell\left[\sup_{-\beta \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|\right] + c(\|\varphi^0\|_\beta)$$

(h₅) $\forall \beta \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$ に対して、 $T_\beta \varphi \in \mathcal{B}_\beta$ で $\lim_{\beta \rightarrow +0} \|T_\beta \varphi\|_\beta = 0$
(但し $(T_\beta \varphi)(\theta) = \varphi(\beta + \theta)$ for $\theta \in (-\infty, -\beta]$)

以上の仮定を $\mathcal{B}$ に置く。例として、 $[-\alpha, 0]$ で連続で ($\alpha \geq 0$)

$$\|\varphi\|^2 = \left[\sup_{-\alpha \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|\right]^2 + \int_{-\infty}^0 |\varphi(\theta)|^2 p(\theta) d\theta$$

が有限な値であるような φ の全体は $\mathcal{B}$ の一例である。ここで $p(\theta)$ は $\int_{-\infty}^0 p(\theta) d\theta < \infty$, $\frac{dp(\theta)}{d\theta} \geq 0$, $p(\theta) \geq 0$ とする。他の例として

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} |\varphi(\theta)| e^\theta = 0 \text{ となる連続関数の全体は, } \|\varphi\| = \sup_{-\infty < \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| e^\theta$$

と置く事によって、Hale の空間の例である。上の二つの例では、 $\ell(r)$, $c(r)$ は共に r の一次式である。今からここで扱う問題では (h₁) ~ (h₅) の仮定では、解析を十分に行えないので、更に次の仮定を補う。この仮定を、上記の二つの例は満足している。

(h₆) $\ell(r)$, $c(r)$ は共に r の一次式, $\ell(r) = c(r) = Mr$ である。

(h₅) $\exists m > 0$ が存在して, $\forall \beta \geq 0, \forall g \in \beta$ に対して $\|T_\beta g\|_3 \leq m \|g\|$

(h₆) $\exists l > 0$ が存在して, $\forall g \in \beta$ に対して $|g(0)| \leq l \|g\|$

(h₇) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \beta(\delta) = +\infty$ となる関数 $\beta(\delta)$ が存在して, $\beta \geq \beta(\delta)$.

$g \in \beta, g(0) = 0$ ならば $\|T_\beta g\|_3 \leq \delta \|g\|$

§3 Hale の空間で定義された線型関数微分方程式と,

Integral Manifold の存在定理

我々が以後扱う方程式は, 小さい parameter $\varepsilon \geq 0$ を含む

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= A(\tau, \varepsilon) y_\tau + B(\tau, \varepsilon) x_\tau + w(\tau, \varepsilon) \\ \dot{x}(\tau) &= \varepsilon [C(\tau, \varepsilon) y_\tau + D(\tau, \varepsilon) x_\tau + v(\tau, \varepsilon)] \end{aligned}$$

である。次の事を仮定する。 β_n は $\tilde{y}: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ の作る Hale の空間, β_m は $\tilde{x}: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ の作る Hale の空間とする。各固定した $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$ に対して, A, B, C, D は線型作用素で定義域値域は次の通りである。

$$A: \beta_n \rightarrow \mathbb{R}^n, B: \beta_m \rightarrow \mathbb{R}^n, C: \beta_n \rightarrow \mathbb{R}^m, D: \beta_m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

w は $\mathbb{R}^n$ -vector, v は $\mathbb{R}^m$ -vector である。

(3.2) $\exists K > 0$ が存在して, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ と, $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$|A(\tau, \varepsilon)|, |B(\tau, \varepsilon)|, |C(\tau, \varepsilon)|, |D(\tau, \varepsilon)|, |w(\tau, \varepsilon)|, |v(\tau, \varepsilon)| \leq K.$$

($|\cdot|$ は operator norm または Euclid norm を表わす。)

(3.3) 連続, 非減少な関数 $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\omega(0) = 0$ が存在して, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$|A(\tau, \varepsilon) - A(0, 0)|, |B(\tau, \varepsilon) - B(0, 0)|, |W(\tau, \varepsilon) - W(0, 0)| \leq \omega(\varepsilon)$$

(3.4) 方程式

$$(3.4) \quad \dot{y}(\tau) = A(0, 0) y_\tau$$

の解 $y(\tau; \tilde{\tau}, y_{\tilde{\tau}})$ は

$$\|y_\tau\| \leq k e^{-\lambda(\tau - \tilde{\tau})} \|y_{\tilde{\tau}}\| \quad \text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

を満す。但し $k > 0$, $\lambda > 0$ は (3.4) の解の選び方には無関係な定数である。

以上の仮定の下に、我々は Halanay, Kurzweil [1], [2] によって、次の定理を得た。

定理 3.1 方程式 (3.1) に対して上記仮定を置く。しからは、十分小さい $\varepsilon \geq 0$ に対して ε の関数; $(0 < \mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon), \kappa(\varepsilon), L(\varepsilon), \Theta(\varepsilon), \overline{\Theta}(\varepsilon) (< +\infty) \text{ (for } \varepsilon > 0)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) = \mu(0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu(\varepsilon) = \nu(0) < +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \kappa(\varepsilon) = \kappa(0) < +\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = L(0) < +\infty, \quad \nu(0), \kappa(0), L(0) \neq 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon) = \Theta(0) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\Theta}(\varepsilon) = \overline{\Theta}(0) = +\infty$$

と、写像 $g_\varepsilon: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_m$ が存在して次が成立する。

(i) $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^m, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, g_\varepsilon(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}) = (\tilde{y}, \tilde{x})$ ならば $\tilde{x}(0) = \tilde{y}$

$$\sup_{\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^m, \tau \in \mathbb{R}} \|g_\varepsilon(\tilde{\tau}, \tau) - g_0(\tilde{\tau}, \tau)\| \cdot [1 + |\tau|]^{-1} \leq \Theta(\varepsilon)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^m, \tau \in \mathbb{R} \text{ に対して } \|g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tau) - g_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tau)\| \leq L(\varepsilon) |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|$$

$g_0(\tilde{x}, \tau)$ は τ によらない関数である。

(ii) $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^m, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, g_\varepsilon(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}) = (\tilde{y}, \tilde{x})$ とする。この時 $(-\infty, +\infty)$ で

定義された (3.1) の解 (y_τ, x_τ) が存在して

$$(y_{\tilde{\tau}}, x_{\tilde{\tau}}) = (\tilde{y}, \tilde{x}), \quad (y_\tau, x_\tau) = f_\varepsilon(x(\tau), \tau) \quad \text{for } \tau \in (-\infty, +\infty)$$

(iii) $(y_\tau, x_\tau), (y'_\tau, x'_\tau)$ が $(-\infty, +\infty)$ で定義された (3.1) の解で,

$\forall \tau \in (-\infty, +\infty)$ に対して, $(y_\tau, x_\tau) = f_\varepsilon(x(\tau), \tau), (y'_\tau, x'_\tau) = f_\varepsilon(x'(\tau), \tau)$ ならば

$$|x(\tau) - x'(\tau)| \leq \lambda(\varepsilon) e^{-\mu(\varepsilon)(\tau - \tilde{\tau})} |x(\tilde{\tau}) - x'(\tilde{\tau})| \quad \text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

(iv) (y_τ, x_τ) が $\tilde{\tau} \leq \tau < +\infty$ で定義された (3.1) の解で

$$\|(y_\tau, x_\tau) - f_\varepsilon(x(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})\| \cdot [1 + \lambda(\varepsilon)]^{-1} < \overline{\Theta}(\varepsilon) \quad \text{ならば}$$

$$\|(y_\tau, x_\tau) - f_\varepsilon(x(\tau), \tau)\| \leq \lambda(\varepsilon) e^{-\nu(\varepsilon)(\tau - \tilde{\tau})} \|(y_{\tilde{\tau}}, x_{\tilde{\tau}}) - f_\varepsilon(x(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})\| \quad \text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

(v) $f'_\varepsilon: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_m$ に対して条件

$$(i) \quad f'_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = (\tilde{y}, \tilde{x}) \Rightarrow \tilde{x}(0) = \tilde{x}$$

$$\sup_{\delta \in \mathbb{R}^m, \tau \in \mathbb{R}} \|f'_\varepsilon(\delta, \tau) - f'_0(\delta, \tau)\| \cdot [1 + |\delta|]^{-1} < \overline{\Theta}(\varepsilon)$$

(ii) 上記(i)において f_ε を f'_ε で置きかえた条件

が成立つならば

$$f'_\varepsilon = f_\varepsilon$$

§4 Halanay, Kurzweil の定理

方程式 (1.1) の解 $x(t; t_0, p_0)$ の定義区間を J とすると, J から $\mathcal{B}$ への写像 $J \ni t \mapsto x_t(t_0, p_0) \in \mathcal{B}$ が定まる。(1.1) のすべての解から上のようにして作った写像の集合を考えると, それは次に定義するような flow を作る。

定義 (Halanay, Kurzweil [1]) X をある集合とする。写像

$x: J(x) \rightarrow X$ ($J=R$, x は $[\tilde{\tau}, \infty)$, x は $(\tilde{\tau}, \infty)$ for some $\tilde{\tau} \in R$) の集合 $\mathcal{X}$ が X における *flow* であるとは次が成立つ事である。

(I) $x \in \mathcal{X}$, $t \in J(x)$, $J_1 = [t, \infty)$ x は (t, ∞) とする。 $\tau \in J_1$ に対して

$$\gamma(\tau) = x(\tau) \text{ と置く } \gamma \in \mathcal{X} \quad (J(\gamma) = J_1)$$

(II) $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $t \in J(x_1) \cap J(x_2)$, $x_1(t) = x_2(t)$ ならば $t \geq t$ に対して

$$x_1(\tau) = x_2(\tau)$$

(III) $\forall x \in X, \forall \tilde{\tau} \in R$ に対して $J(x) = [\tilde{\tau}, \infty)$, $x(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$ であるような $x \in \mathcal{X}$ が存在する。

(IV) $x_i \in \mathcal{X}$, $x_i(\tau) = x_j(\tau)$ for $\tau \in J(x_i) \cap J(x_j)$; $i, j = 1, 2, \dots$ とする。

$\gamma: \bigcup_{i=1}^{\infty} J(x_i) \rightarrow X$ を $\gamma(\tau) = x_i(\tau)$ for $\tau \in J(x_i)$ によって定義すると, $\gamma \in \mathcal{X}$ ($J(\gamma) = \bigcup_{i=1}^{\infty} J(x_i)$)

この定義の(III)によって, x は右に一意的に定まるから, $x(\tilde{x}, \tilde{\tau})$ とも書き, τ における値を $x(\tau; \tilde{x}, \tilde{\tau})$ と書く。以後 X は $\mathbb{C}$ の Banach Space $\mathbb{C}$, Γ の直積, $X = \mathbb{C} \times \Gamma$ であるとし, $x(\tau; \tilde{x}, \tilde{\tau}) = (c(\tau; \tilde{c}, \tilde{\tau}), \gamma(\tau; \tilde{c}, \tilde{\tau}))$ のように成分ごとに分けて書く。Halalay, Kurzweil は *flow* $\mathcal{X}$ に対して次の定理を証明している。

定理 4.1 (Halalay, Kurzweil [1]). $\theta, \nu, L, T, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$

は正定数で, $\nu_1 < \nu_3$, $\nu_2 < 1$ とする。 $G_1 = \{(c, \gamma) \in X \mid |c| \leq \theta | \gamma| + \nu\}$

と置き, $X = \mathbb{C} \times \Gamma$ 上の *flow* $\mathcal{X}$ が次の条件を満たすとする。

1° $(\tilde{c}, \tilde{\gamma}) \in G_1$, $\tilde{\tau} \in R$ ならば, $\tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$ に対して,

$$(c(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau}), \gamma(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau})) \in G_1$$

2° $(\tilde{c}_1, \tilde{r}_1), (\tilde{c}_2, \tilde{r}_2) \in G_1, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}$ ならば

$$|c(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{r}_1, \tilde{\tau}) - c(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{r}_2, \tilde{\tau})| + L |\gamma(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{r}_1, \tilde{\tau}) - \gamma(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{r}_2, \tilde{\tau})|$$

$$(a) \leq \begin{cases} \nu_1 |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| & \text{for } \tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T] \\ \nu_4 |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| & \text{for } \tau \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T] \end{cases}$$

$$(b) \leq \begin{cases} \nu_4 |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| & \text{for } \tau \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T] \end{cases}$$

3° $(\tilde{c}_1, \tilde{r}_1), (\tilde{c}_2, \tilde{r}_2) \in G_1, |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| \leq L |\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2|, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}$

$\tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$ ならば

$$(a) |c(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{r}_1, \tilde{\tau}) - c(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{r}_2, \tilde{\tau})| \leq L |\gamma(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{r}_1, \tilde{\tau}) - \gamma(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{r}_2, \tilde{\tau})|$$

$$(b) |\gamma(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{r}_1, \tilde{\tau}) - \gamma(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{r}_2, \tilde{\tau}) - \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2| \leq \nu_2 |\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1|$$

4° $(\tilde{c}, \tilde{r}) \in G_1, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}$ ならば

$$(a) 1 + |\gamma(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau})| \geq \nu_3 (1 + |\tilde{r}|) \quad \text{for } \tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$$

$$(b) 1 + |\gamma(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau})| \geq \nu_5 (1 + |\tilde{r}|) \quad \text{for } \tau \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T]$$

$\mu = -(2T)^{-1} \log(1 - \nu_2), \nu = -T^{-1} \log(\nu_1 \nu_3^{-1})$ とおく。 (からは写像

$p: P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と, 正定数 $\kappa(0, \nu, L, T, \nu_1, \dots, \nu_5)$ で定まる) が存在して次が成立する.

$$(i) |p(x, \tau)| \leq \theta |x| + \nu, |p(x_1, \tau) - p(x_2, \tau)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \text{for } x, x_1, x_2 \in P, \tau \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \tilde{r} \in T, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, \tilde{c} = p(\tilde{r}, \tilde{\tau}) \text{ に対して, } (c, \gamma) \in \mathcal{X} \text{ が存在して,}$$

$$J(c, \gamma) = R, c(\tilde{\tau}) = \tilde{c}, \gamma(\tilde{\tau}) = \tilde{r}, c(\tau) = p(\gamma(\tau), \tau) \quad \text{for } \tau \in \mathbb{R}$$

$$(iii) (c, \gamma) \in \mathcal{X}, (c_1, \gamma_1) \in \mathcal{X}, J(c, \gamma) = J(c_1, \gamma_1) = R, c(\tau) = p(\gamma(\tau), \tau)$$

$$c_1(\tau) = p(\gamma_1(\tau), \tau) \quad \text{for } \tau \in \mathbb{R} \text{ ならば}$$

$$|\gamma(\tau) - \gamma_1(\tau)| \geq \kappa^{-1} e^{-\mu(\tau - \tilde{\tau})} |\gamma(\tilde{\tau}) - \gamma_1(\tilde{\tau})| \quad \text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

(iv) $(\tilde{c}, \tilde{r}) \in G_1, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, \tau \geq \tilde{\tau}$ ならば

$$|c(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau}) - p(r(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau}), \tau)| \cdot [1 + |r(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau})|] \leq |\tilde{c} - p(\tilde{r}, \tilde{\tau})| [1 + |\tilde{r}|]^\mu \chi e^{-\mu(\tau - \tilde{\tau})}$$

(v) $p': \Gamma \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}, |p'(r, \tau)| \leq \theta |r| + \vartheta$ for $r \in \Gamma, \tau \in \mathbb{R}$, かつ p' に対して (iv) において p を p' と書きかえた条件が成立するならば $p' = p$

定理 4.2 (Halany Kurzweil [1]) 定理 4.1 の仮定が満たされ, 更に $\chi_1 < 1$ とする。 $\chi_1 = -T^{-1} \log \chi_1$ とおく。この時ある $\chi_1 > 0$ が存在して $\forall (\tilde{c}, \tilde{r}) \in G_1, \forall \tilde{\tau} \in \mathbb{R}$ に対して

$$|c(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau}) - p(r(\tau; \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\tau}), \tau)| \leq \chi_1 e^{-\chi_1(\tau - \tilde{\tau})} |\tilde{c} - p(\tilde{r}, \tilde{\tau})|$$

Flow χ が周期系を持つ場合, 即ち $\forall \bar{x} \in X, \bar{\tau} \in \mathbb{R}, \tau > \bar{\tau}$ に対して $\chi(\tau + \bar{\tau}; \bar{x}, \bar{\tau} + \bar{\tau}) = \chi(\tau; \bar{x}, \bar{\tau})$ である場合には, 定理 4.1 で得られる p は τ について周期系を持つ, 即ち $\forall r \in \Gamma, \forall \tau \in \mathbb{R}$ に対して $p(r, \tau + \bar{\tau}) = p(r, \tau)$ である。(Halany, Kurzweil [1])

§5 予備的な補題

補題 5.1 方程式 (3.4) に対して仮定 (3.4) が満足されているならば, $\mathbb{R} \times \beta$ で定義された連続な Liapunov functional $V(\tau, \varphi)$ が存在して次の条件が成立つ。

(i) $\|\varphi\| \leq V(\tau, \varphi) \leq k \|\varphi\|$ for $\forall \varphi \in \beta, \forall \tau \in \mathbb{R}$

(ii) $|V(\tau, \varphi_1) - V(\tau, \varphi_2)| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ for $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \beta, \forall \tau \in \mathbb{R}$

(iii) $V_{(3.4)}(\tau, \varphi) \leq -\rho V(\tau, \varphi)$ for $\forall \varphi \in \beta, \forall \tau \in \mathbb{R}$

証明 $V(\tau, \varphi) = \sup_{t \geq 0} \|y_{\tau+t}(\tau, \varphi)\| e^{\rho t}$ とおく。詳しくは
T. Yoshizawa [3] p. 193 を見て下さい。

補題 5.2 (3.4) を仮定する。この時方程式

$$(5.1) \quad \dot{y}(\tau) = A(0, 0) y_{\tau} + u(\tau, y_{\tau})$$

と、補題 5.1 で得た $V(\tau, \varphi)$ に対して $\forall \varphi \in \beta, \forall \tau \in \mathbb{R}$ に於て

$$\begin{aligned} V'_{(5.1)}(\tau, \varphi) &\leq -\rho V(\tau, \varphi) + k \ell'(0) |u(\tau, \varphi)| \\ &= -\rho V(\tau, \varphi) + k M |u(\tau, \varphi)| \end{aligned}$$

が成立する。

証明 T. Yoshizawa [3] p. 203 参照

系 5.3 補題 5.2 により、(5.1) の解 y_{τ} に対して

$$V(\tau, y_{\tau}) \leq e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})} V(\tilde{\tau}, y_{\tilde{\tau}}) + k M \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau-\sigma)} |u(\sigma, y_{\sigma})| d\sigma; \tau \geq \tilde{\tau}$$

この式と補題 5.1 によって、 $\tau \geq \tilde{\tau}$ に対して

$$\|y_{\tau}\| \leq k e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})} \|y_{\tilde{\tau}}\| + k M \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau-\sigma)} |u(\sigma, y_{\sigma})| d\sigma$$

特に $|u(\tau, \varphi)| \leq u$ for $\forall \varphi \in \beta, \forall \tau \in \mathbb{R}$ の場合には

$$\|y_{\tau}\| \leq k e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})} \|y_{\tilde{\tau}}\| + k M \frac{1 - e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}}{\rho} u \quad \text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

§6 定理 3.1 の証明—その1—

方程式 (3.1) の解の集合から作られた flow に対して、定理 4.1 の条件が成立する事を見る。その為に、方程式 (3.1) に於

て $\varepsilon = 0$ とした場合の方程式

$$(6.1) \quad \dot{y}(\tau) = Ay_\tau + Bx_\tau + w, \quad \dot{x}(\tau) = 0$$

$$\text{但し } A = A(0, 0), \quad B = B(0, 0), \quad w = w(0, 0)$$

に対して、定理 4.1 が成立する事を確かめる。この時、 $\varepsilon > 0$ が十分小ならば、(3.1) に対しては定理 4.1 が成立する。まず、(3.1) の解と (6.1) の解を比較すると、次の補題を得る。

補題 6.1 ρ, ε 各々について単調非減少な関数 $\Omega(\rho, \varepsilon)$,

$$\Omega : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad \Omega(0, \varepsilon) = \Omega(\rho, 0) = 0$$

が存在して次が成立する。

$\tilde{y}^i, \tilde{y}^2 \in \beta_n, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 \in \beta_m, \tilde{\tau} \in \mathbb{R}$ を任意に選ぶ。 (y^i, x^i) を $[\tilde{\tau}, \infty)$ で定義され、初期条件 $(y^i, x^i)|_{\tilde{\tau}} = (\tilde{y}^i, \tilde{x}^i)$ を満たす (3.1) の解とする ($i=1, 2$)。 (y^{i+2}, x^{i+2}) を $[\tilde{\tau}, \infty)$ で定義され、初期条件 $(y^{i+2}, x^{i+2})|_{\tilde{\tau}} = (\tilde{y}^i, \tilde{x}^i)$ を満たす (6.1) の解とする ($i=1, 2$)。この時、

$$\|y_\tau^1 - y_\tau^2\| + \|x_\tau^1 - x_\tau^2\| \leq (\|\tilde{y}^1\| + \|\tilde{x}^1\| + 1) \Omega(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon)$$

$$\|y_\tau^1 - y_\tau^2 - y_\tau^3 + y_\tau^4\| + \|x_\tau^1 - x_\tau^2 - x_\tau^3 + x_\tau^4\| \leq (\|\tilde{y}^1 - \tilde{y}^2\| + \|\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2\|) \Omega(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon)$$

$$\text{for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

証明 $(y^1, x^1), (y^3, x^3)$ の満たす方程式 (3.1), (6.1) を積分形に直し、 $y^1(\tilde{\tau}) = y^3(\tilde{\tau}), x^1(\tilde{\tau}) = x^3(\tilde{\tau})$ である事を使い、仮定 (3.2), (3.3) を使うと、 $\tau \geq \tilde{\tau}$ に対して

$$(6.2) \quad |y^1(\tau) - y^3(\tau)| + |x^1(\tau) - x^3(\tau)| \leq \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} (k + \varepsilon k) \{ \|y_\sigma^1 - y_\sigma^2\| + \|x_\sigma^1 - x_\sigma^2\| \} d\sigma \\ + \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} \{ \omega(\varepsilon) + \varepsilon k \} \{ \|y_\sigma^2\| + \|x_\sigma^2\| + 1 \} d\sigma$$

$\dot{x}^3(\tau) = 0$ であるから, (h_4) により

$$\begin{aligned}\|x_\alpha^3\| &\leq \theta \left(\sup_{\tilde{\tau} \leq u \leq \alpha} |x^3(u)| \right) + c \left(\|x_\tau^3\|^{\sigma-\tilde{\tau}} \|\sigma-\tilde{\tau}\| \right) \\ &= \theta \left(|\tilde{x}'(0)| \right) + c \left(\|T_{\sigma-\tilde{\tau}} \tilde{x}'\|_{\sigma-\tilde{\tau}} \right)\end{aligned}$$

故に (h_5) と (h_6) の仮定により

$$\|x_\alpha^3\| \leq M(l+m)\|\tilde{x}'\| \quad \text{for } \alpha \geq \tilde{\tau}$$

が成立する。従って $|Bx_\alpha^3 + w| \leq KM(l+m)\|\tilde{x}'\| + K$ であるから, 系5.3を使って, $\alpha \geq \tilde{\tau}$ の時

$$\|y_\alpha^3\| \leq ke^{-\rho(\alpha-\tilde{\tau})} \|\tilde{y}'\| + \frac{1}{\rho} \{ KM(l+m)\|\tilde{x}'\| + K \}$$

が成立する。故に, M, l, m, k, ρ によって N_1 を適当に選べば, $\alpha \geq \tilde{\tau}$ に対して

$$\|y_\alpha^3\| + \|x_\alpha^3\| + 1 \leq N_1 \{ \|\tilde{y}'\| + \|\tilde{x}'\| + 1 \}$$

である。 $\Omega_1(\rho, \varepsilon) = N_1 \{ w(\varepsilon) + \varepsilon K \}$ とおくと, Ω_1 は ρ, ε 各々について単調非減少で $\Omega(0, \varepsilon) = \Omega(\rho, 0) = 0$, 所以 (6.2) より

$$\begin{aligned}(6.3) \quad |y'(\tau) - y^3(\tau)| + |x'(\tau) - x^3(\tau)| &\leq \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} (K + \varepsilon K) \{ \|y'_\sigma - y_\sigma^3\| + \|x'_\sigma - x_\sigma^3\| \} d\sigma \\ &\quad + \Omega_1(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) \{ \|\tilde{y}'\| + \|\tilde{x}'\| + 1 \}\end{aligned}$$

を得る ($\tau \geq \tilde{\tau}$)。 $Y(\tau) = y'(\tau) - y^3(\tau)$, $X(\tau) = x'(\tau) - x^3(\tau)$, $Y(\tau) = \sup_{\tilde{\tau} \leq u \leq \tau} |Y(u)|$, $X(\tau) = \sup_{\tilde{\tau} \leq u \leq \tau} |X(u)|$ と置けば, (h_4) の仮定と, $y_{\tilde{\tau}}^1 = y_{\tilde{\tau}}^3$, $x_{\tilde{\tau}}^1 = x_{\tilde{\tau}}^3$ である事を使って,

$$\begin{aligned}(6.4) \quad \|y'_\sigma - y_\sigma^3\| &\leq \theta(Y(\sigma)) = MY(\sigma) \\ \|x'_\sigma - x_\sigma^3\| &\leq \theta(X(\sigma)) = MX(\sigma)\end{aligned}$$

である。故に (6.3) 式は

$|Y(\tau)| + |X(\tau)| \leq \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} (K + \varepsilon K) M \{y(\sigma) + x(\sigma)\} d\sigma + \Omega_1(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) \{\|\tilde{y}\| + \|\tilde{x}\| + 1\}$
 この式の右辺は τ について単調非減少であるから、

$$y(\tau) + x(\tau) \leq 2 \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} (K + \varepsilon K) M \{y(\sigma) + x(\sigma)\} d\sigma + \Omega_1(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) \{\|\tilde{y}\| + \|\tilde{x}\| + 1\}$$

Gronwall's Inequality と (6.4) によって、これから直ちに

$$\|y_{\tau}^1 - y_{\tau}^3\| + \|x_{\tau}^1 - x_{\tau}^3\| \leq M \Omega_1(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) e^{2(K + \varepsilon K)M(\tau - \tilde{\tau})} \{\|\tilde{y}\| + \|\tilde{x}\| + 1\}$$

for $\tau \geq \tilde{\tau}$. これで補題 6.1 の初めの不等式は証明された。残りの不等式の証明も同様にしてできる。 Ω としては、 M, l, m, K, h, ρ によって N を適当に選んで

$$\Omega(\rho, \varepsilon) = N \{w(\varepsilon) + \varepsilon K\} \rho e^{2(K + \varepsilon K)M\rho}$$

と置けばよい。

証明終

補題 6.2 任意の constant vector $w \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(6.5) \quad \dot{y}(\tau) = Ay_{\tau} + w \quad (\text{但し } A = A(0, 0))$$

は、 $(-\infty, +\infty)$ で定義された constant solution y_w を持つ。 y_w は指数安定で、従って w に対して一意に定まる。 w に y_w を対応させる写像 R は、 $\mathbb{R}^n$ から $\mathcal{B}_n$ への有界加法的作用素である。
 証明 $P = \{0\}$ と置き、Banach Space $\mathcal{B}_n \times P$ 上の flow $\mathcal{X}$ を次のように定義する。

$(\ell, \gamma) \in \mathcal{X} \iff$ 定義域 $J(y)$ (for some $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}$, $J(y) = [\tilde{\tau}, \infty)$, or $(\tilde{\tau}, \infty)$, or $(-\infty, +\infty)$) で定義された (6.5) の解 y が存在して、 $\ell(\tau) = y_{\tau}$, $\gamma(\tau) = 0$ for $\tau \in J(\ell, \gamma) \equiv J(y)$

この予備 Σ に対して, $\theta, \vartheta, T, L, \varphi_1, \dots, \varphi_5$ を次のように定めれば, 定理 4.1 の条件が満足される事を見るのは容易である。

$$0 < \theta, \frac{1}{2} k M |w| = \frac{1}{2} \vartheta, k e^{-\theta T} \leq \frac{1}{2}, 0 < L, \varphi_1, \varphi_4 \leq k, \varphi_2 < 1,$$

$\varphi_3, \varphi_5 \leq 1$ を満すように定める。定理 4.1 により $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}_m$ が存在して, φ は Σ の Integral Manifold を作る。(6.5) は自励系であるから, §4 の最後で注意したように φ は τ によらない。即ち, $y_\tau = \varphi(0, \tau)$ と置くと, y_τ は $\tau \in (-\infty, +\infty)$ で一定であって, かつ定理 4.1 (v) によって (6.5) の解である。(6.5) の解は指数安定であるから $(-\infty, +\infty)$ に於る constant solution は一意的に定まる。 y_τ に対しては系 5.3 により評価式

$$\|y_\tau\| \leq k e^{-\rho(\tau - \bar{\tau})} \|y_{\bar{\tau}}\| + \frac{1}{2} k M |w|$$

が成立する。 $y_\tau = y_{\bar{\tau}} = \text{constant}$ であるから $\bar{\tau} \rightarrow -\infty$ とすれば,

$$\|y_\tau\| \leq \frac{1}{2} k M |w|$$

従って $|R| \leq \frac{1}{2} k M$

証明終

注意: $y_\tau = \varphi(0, \tau) \equiv y_w$ は $\tau \in (-\infty, +\infty)$ で一定で, (6.5) の解であるから, 実は $y_w(0)$ は $\theta \in (-\infty, 0]$ で一定である。故に $y(\tau) = 0$ で, $0 = A y_w + w \equiv A R w + w$ が $\forall w \in \mathbb{R}^n$ に対して成立つ。

補題 6.3

$U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{B}_m$ を $(Ux)(\theta) = x$ for $\theta \in (-\infty, 0]$ によって定義する。 U は有界加法的作用素である。

証明 (h4) と (h5) により $\|U\| \leq \ell(1) = M$ である事が直ちに導かれ

る。

証明終

補題 6.4 $\mathcal{B}_{m,0} = \{\varphi \in \mathcal{B}_m \mid \varphi(0) = 0\}$ とする。 $\Psi: \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m \rightarrow \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_{m,0} \times \mathbb{R}^m$ を $\Psi(y, x) = (y - R[B \cup x(0) + w], x - \cup x(0), x(0))$ によって定義する。しからば、 Ψ は逆写像を持ち次が成立。

$$(6.6) \quad \exists k_2 > 0, \quad \|\Psi(0, 0)\| \leq k_2 |w|, \quad \|\Psi^{-1}(0, 0, 0)\| \leq k_2 |w|$$

$$(6.7) \quad \exists k_3 > 0$$

$$\|\Psi(y^1, x^1) - \Psi(y^2, x^2)\| \leq k_3 \|(y^1, x^1) - (y^2, x^2)\| \quad \forall (y^i, x^i) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m \quad i=1,2$$

$$\|\Psi^{-1}(a^1, b^1, c^1) - \Psi^{-1}(a^2, b^2, c^2)\| \leq k_3 \|(a^1, b^1, c^1) - (a^2, b^2, c^2)\|$$

$$\forall (a^i, b^i, c^i) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_{m,0} \times \mathbb{R}^m, \quad i=1,2$$

証明 Ψ^{-1} は $(a, b, c) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_{m,0} \times \mathbb{R}^m$ に対して

$$\Psi^{-1}(a, b, c) = (a + R[B \cup c + w], b + \cup c)$$

で定義される。(6.6), (6.7) を確かめるのは容易。 証明終

以後 $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_{m,0} = C$, $\mathbb{R}^m = P$ と書く。方程式 (3.1) の解から、 $X = C \times P$ 上の flow $\mathcal{X}_\varepsilon$ を次のように定義する。

$$(c, r) \in \mathcal{X}_\varepsilon \Leftrightarrow \text{ある区間 } J(y, x) \text{ (for some } \bar{t} \in \mathbb{R}, J(y, x) = [\bar{t}, \infty), \text{ or } (\bar{t}, \infty), \text{ or } (-\infty, +\infty)) \text{ で定義された (3.1) の解 } (y, x) \text{ が存在し}$$

$$\text{て, } (c(\tau), r(\tau)) = \Psi(y_\tau, x_\tau), \quad \tau \in J(c, r) \equiv J(y, x)$$

また方程式 (6.1) から $\mathcal{X}_\varepsilon$ と同様にして、 $X = C \times P$ 上の flow $\mathcal{X}$ を定義する。この二つの flow を比較すると補題 6.1 から次

の補題を得る。

補題 6.5 ρ, ε 各々について単調非減少な関数 $\Omega'(\rho, \varepsilon)$

$$\Omega' : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad \Omega'(0, \varepsilon) = \Omega'(\rho, 0) = 0$$

が存在して次が成立する。

$$(c^i, \gamma^i) \in \mathcal{X}_\varepsilon, (c^{i+2}, \gamma^{i+2}) \in \mathcal{X} \quad i=1, 2; \quad J(c^i, \gamma^i) = [\tilde{\tau}, \infty) \quad i=1, 2, 3, 4;$$

$$(c^i, \gamma^i)(\tilde{\tau}) = (c^{i+2}, \gamma^{i+2})(\tilde{\tau}) = (\tilde{c}^i, \tilde{\gamma}^i) \quad i=1, 2; \quad \tau \geq \tilde{\tau}$$

$$\Rightarrow \|c^1(\tau) - c^3(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^3(\tau)| \leq \Omega'(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) (1 + \|\tilde{c}^1\| + |\tilde{\gamma}^1|)$$

$$\|c^1(\tau) - c^2(\tau) - c^3(\tau) + c^4(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^2(\tau) - \gamma^3(\tau) + \gamma^4(\tau)| \leq \Omega'(\tau - \tilde{\tau}, \varepsilon) \{ \|\tilde{c}^1 - \tilde{c}^2\| + |\tilde{\gamma}^1 - \tilde{\gamma}^2| \}$$

§7 定理 3.1 の証明 — その 2 —

前節で $X = C \times \Gamma$ 上の $J_{\text{low}} \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ を定義した。補題 6.2 と補題 6.4 は $C \times \Gamma \times \mathbb{R}$ の部分集合 $\{(0, r, \tau) \mid r \in \Gamma, \tau \in \mathbb{R}\}$ は $J_{\text{low}} \mathcal{X}$ の Integral Manifold である事を示している。この集合を S と置く時, S にある意味で近い $\mathcal{X}_\varepsilon$ の Integral Manifold S_ε が存在する事が証明される。我々は $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ に対して定理 4.1 が成立つ事を証明する。

補題 7.1 $\varphi \in \mathcal{B}_{m,0}$ に対して $T^\beta \varphi \in \mathcal{B}_{m,0}$ を $\theta \in [\beta, 0]$

の時は $(T^\beta \varphi)(\theta) = 0$, $\theta \in (-\infty, -\beta]$ の時は $(T^\beta \varphi)(\theta) = \varphi(\beta + \theta)$ によ

て定義する。しからば $\beta(\delta)$ を仮定 (h_7) における関数とする

$$\text{と, } \beta \geq \beta(\delta) \text{ の時 } \|T^\beta \varphi\| \leq M \delta \|\varphi\|$$

証明 (h_4) と (h_7) から直ちに導かれる。

補題 7.2 $\theta, \vartheta, L, T, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_7$ を次の不等式を満足するように定める。まず

$$j(\delta) = \max \left\{ k e^{-2\theta\beta(\delta)}, \frac{k k M^2}{\delta} (m e^{-\theta\beta(\delta)} + \delta) + M \delta \right\} \text{ と置く。}$$

δ を十分小さくして $K_3^2 j(\delta) < 1$, $j(\delta) \leq \frac{1}{2}$ とできるようにする。

そして $0 < \theta, \vartheta, L < +\infty$, $T = 2\beta(\delta)$, $\vartheta_1 = K_3^2 j(\delta)$,

$$0 < \vartheta_2 < 1, \vartheta_3 = \vartheta_5 = 1, \vartheta_4 = K_3^2 \max \left\{ k, k k M^2 \frac{m}{\delta} + M m \right\}$$

しからは $\mathcal{F}_{low} X$ に対して定理 4.1 の条件 2°, 3°(b), 4° と

$$5^\circ \quad G_{\vartheta_7} = \{ (c, x) \in X \mid \|c\| \leq \vartheta_7 (\theta \|x\| + \vartheta) \} \text{ と置く。 } (\tilde{c}, \tilde{x}) \in G_1,$$

$\tilde{c} \in \mathbb{R}$ ならば $\tau \in [\tilde{c}+T, \tilde{c}+2T]$ に対して

$$(c(\tau; \tilde{c}, \tilde{x}, \tilde{c}), x(\tau; \tilde{c}, \tilde{x}, \tilde{c})) \in G_{\vartheta_7}.$$

$$6^\circ \quad (\tilde{c}_1, \tilde{x}_1) \in G_1, (\tilde{c}_2, \tilde{x}_2) \in G_1, |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| \leq L |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|, \tilde{c} \in \mathbb{R}, \tau \in [\tilde{c}+T, \tilde{c}+2T]$$

$$\text{ならば } \|c(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{x}_1, \tilde{c}) - c(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{x}_2, \tilde{c})\| \leq \frac{1}{2} L \|x(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{x}_1, \tilde{c}) - x(\tau; \tilde{c}_2, \tilde{x}_2, \tilde{c})\|$$

が満足される。

証明 まず 4° を示す。 $\mathcal{F}_{low} X$ の定義により $\tau \geq \tilde{c}$ に対して

$$x(\tau; \tilde{c}, \tilde{x}, \tilde{c}) = \tilde{x} \text{ であるから } \vartheta_3 = \vartheta_5 = 1 \text{ と定めれば, } X \text{ に対して}$$

4° が成立つのは明きらかである。

2° を見る。 $(c(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{x}, \tilde{c}), x(\tau; \tilde{c}_1, \tilde{x}, \tilde{c})) = (c^1(\tau), x^1(\tau))$ $i=1, 2$ と略

記する。 X の定義により (6.1) の解 (y^i, x^i) が存在して $(c^i(\tau), x^i(\tau))$

$$= \Phi(y^i_\tau, x^i_\tau) \quad i=1, 2. \quad (6.1) \text{ で } \dot{x}(\tau) = 0 \text{ であるから } x^i(\tau) = x^i(\tau)$$

$$= x^i(\tilde{c}) = \tilde{x} \text{ である。 故に条件 2° は } \|c^1(\tau) - c^2(\tau)\| \leq \vartheta_1 (\vartheta_4) \|\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2\|$$

for $\tau \in [\tilde{c}+T, \tilde{c}+2T]$ (for $\tau \in [\tilde{c}, \tilde{c}+T]$) と表わされる。ところで,

$$(6.7) \text{ により } \|c^1(\tau) - c^2(\tau)\| = \|\Psi(y_\tau^1, x_\tau^1) - \Psi(y_\tau^2, x_\tau^2)\| \leq k_3 (\|y_\tau^1 - y_\tau^2\| + \|x_\tau^1 - x_\tau^2\|)$$

$y^1(\tau) - y^2(\tau), x^1(\tau) - x^2(\tau)$ は方程式

$$\frac{d}{d\tau} (y^1(\tau) - y^2(\tau)) = A(y_\tau^1 - y_\tau^2) + B(x_\tau^1 - x_\tau^2)$$

$$\frac{d}{d\tau} (x^1(\tau) - x^2(\tau)) = 0$$

を満足する。故に系5.3により, $\tau \geq \bar{\tau}$ に対して

$$(7.1) \quad \|y_\tau^1 - y_\tau^2\| \leq k e^{-\rho(\tau - \bar{\tau})} \|y_{\bar{\tau}}^1 - y_{\bar{\tau}}^2\| + kM \int_{\bar{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau - \sigma)} |B(x_\sigma^1 - x_\sigma^2)| d\sigma$$

さて、まず 2° (a) の場合を見る。 $x^1(\bar{\tau}) = \bar{x} = x^2(\bar{\tau})$ であるから、

$$x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2 \in \mathcal{B}_m. \quad \text{で} \quad x_\sigma^1 - x_\sigma^2 = T^{\sigma - \bar{\tau}} (x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2) \quad \sigma \geq \bar{\tau} \quad \text{である。}$$

$$\sigma - \bar{\tau} \geq \beta(\delta) \quad \text{であれば補題 7.1 により } \|x_\sigma^1 - x_\sigma^2\| \leq M\delta \|x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2\|$$

$$\text{である。また } (h_4), (h_5') \text{ から } \sigma \geq \bar{\tau} \text{ ならば } \|x_\sigma^1 - x_\sigma^2\| \leq Mm \|x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2\|$$

である。それ故 $\tau \geq \bar{\tau} + T = \bar{\tau} + 2\beta(\delta)$ の時

$$(7.2) \quad \int_{\bar{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau - \sigma)} |B(x_\sigma^1 - x_\sigma^2)| d\sigma \leq K \left(\int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau} + \beta(\delta)} + \int_{\bar{\tau} + \beta(\delta)}^{\tau} \right) e^{-\rho(\tau - \sigma)} \|x_\sigma^1 - x_\sigma^2\| d\sigma \\ \leq \frac{1}{\rho} KM \{ m e^{\rho\beta(\delta)} + \delta \} \|x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2\|$$

故に (7.1) と (7.2) とから $\tau \geq \bar{\tau}$ の時

$$\|y_\tau^1 - y_\tau^2\| + \|x_\tau^1 - x_\tau^2\| \leq j(\delta) \{ \|y_{\bar{\tau}}^1 - y_{\bar{\tau}}^2\| + \|x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2\| \}$$

を得る。従って $\|c^1(\tau) - c^2(\tau)\| \leq k_3 j(\delta) \{ \|y_{\bar{\tau}}^1 - y_{\bar{\tau}}^2\| + \|x_{\bar{\tau}}^1 - x_{\bar{\tau}}^2\| \} =$

$$= k_3 j(\delta) \{ \Psi^1(c^1(\bar{\tau}), x^1(\bar{\tau})) - \Psi^1(c^2(\bar{\tau}), x^2(\bar{\tau})) \} = k_3 j(\delta) \{ \|c^1(\bar{\tau}) - c^2(\bar{\tau})\| + |y^1(\bar{\tau}) - y^2(\bar{\tau})| \}$$

$$= \psi_1 \|c^1(\bar{\tau}) - c^2(\bar{\tau})\|, \quad 2^\circ (a) \text{ が示された。} 2^\circ (b) \text{ も同様に示される。}$$

3° (b) は 4° と同様に容易に判る。

5° は次のように示される。 $(c(\tau; \bar{c}, \bar{x}, \bar{\tau}), x(\tau; \bar{c}, \bar{x}, \bar{\tau})) = (c(\tau), x(\tau))$

と略記する。 π の定義から (6.1) の解 (y, x) が存在して、

$$(c(\tau), x(\tau)) = \Phi(y_\tau, x_\tau) = (y_\tau - R[B\bar{U}x(\bar{\tau}) + w], x_\tau - \bar{U}x(\bar{\tau}), x(\bar{\tau})).$$

y' を $\dot{y}'(\tau) = Ay'_\tau + B\bar{U}x(\bar{\tau}) + w$ を満足する constant solution, 即ち $y'_\tau = R[B\bar{U}x(\bar{\tau}) + w]$ と置くと, $y_\tau - y'_\tau$ は方程式

$$\frac{d}{d\tau}(y(\tau) - y'(\tau)) = A(y_\tau - y'_\tau) + B(x_\tau - \bar{U}x(\bar{\tau}))$$

を満足する。2°(a)の証明と同様の計算により $\tau \geq \bar{\tau} + T$ の時,

$$\|y_\tau - y'_\tau\| + \|x_\tau - \bar{U}x(\bar{\tau})\| \leq f(\delta) \{ \|y_{\bar{\tau}} - y'_{\bar{\tau}}\| + \|x_{\bar{\tau}} - \bar{U}x(\bar{\tau})\| \}$$

である。 $(c(\tau), x(\tau))$ の定義により, この式から $\tau \geq \bar{\tau} + T$ の時,

$$\|c(\tau)\| \leq f(\delta) \|c(\bar{\tau})\| \leq f(\delta) \{ \theta |x(\bar{\tau})| + \nu \} = \nu_7 \{ \theta |x(\tau)| + \nu \}$$

である。従って 5° を得た。

6° も 5° と似た方法で証明される。

証明終

補題 7.3 Flow $\mathcal{X}, \mathcal{X}_\varepsilon$ の elements について補題 6.5 の条件と同じとする。 $D(\varepsilon) = \Omega'(2T, \varepsilon)$ と置けば $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + 2T]$ の時

$$\|c^1(\tau) - c^3(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^3(\tau)| \leq D(\varepsilon) (1 + \|\tilde{c}^1\| + |\tilde{\gamma}^1|)$$

$$\|c^1(\tau) - c^2(\tau) - c^3(\tau) + c^4(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^2(\tau) - \gamma^3(\tau) + \gamma^4(\tau)| \leq D(\varepsilon) (\|\tilde{c}^1 - \tilde{c}^2\| + |\tilde{\gamma}^1 - \tilde{\gamma}^2|)$$

証明 補題 6.5 の直接の結果である。

さて, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_\varepsilon$ について Integral Manifolds が存在する事を証明する準備が整った。定理 4.1 の条件 1° ~ 4° が成立する事を見る。まず $\mathcal{X}$ については $\theta, \alpha, \tau, \psi_1, \dots, \psi_5$ を補題 7.2 のように選べばよい事は直ちに判る。従って定理 4.1 が成立つ。

得られた Integral Manifold $p: P \times R' \rightarrow C$ は, θ, φ が任意に選べる事によって $p=0$ である。定理 4.1 の一意性の条件 (i) により, $p': P \times R' \rightarrow C$, $\sup_{\substack{\tau \in P \\ \tau \in R}} \frac{p'(\tau, \tau)}{1+|\tau|} < +\infty$, p' に対して定理 4.1 の条件 (ii) を p' で置きかえた条件が成立つ, ならば $p'=p=0$ である。

ε_ε については次の補題を得る。

補題 7.4 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して次のような ε の関数, $0 < \underline{\theta}(\varepsilon), \bar{\theta}(\varepsilon), \underline{\nu}(\varepsilon), \bar{\nu}(\varepsilon), \underline{L}(\varepsilon), \bar{L}(\varepsilon), \nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon), \nu_3(\varepsilon), \nu_4(\varepsilon), \nu_5(\varepsilon), \nu_7(\varepsilon) < +\infty$ が存在する。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\theta}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\nu}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{L}(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\theta}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\nu}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{L}(\varepsilon) = +\infty$$

$$\nu_1 < \nu_1(\varepsilon) < \nu_3(\varepsilon) < \nu_3 = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_1(\varepsilon) = \nu_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_3(\varepsilon) = \nu_3 = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_2(\varepsilon) = 0, \quad \nu_4 < \nu_4(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_4(\varepsilon) = \nu_4, \quad 0 < \nu_5(\varepsilon) < \nu_5 = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_5(\varepsilon) = \nu_5 = 1, \quad \nu_7(\varepsilon) > \nu_7, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_7(\varepsilon) = \nu_7 ;$$

$$\underline{\theta}(\varepsilon) \leq \theta \leq \bar{\theta}(\varepsilon), \quad \underline{\nu}(\varepsilon) \leq \nu \leq \bar{\nu}(\varepsilon), \quad \underline{L}(\varepsilon) \leq L \leq \bar{L}(\varepsilon), \quad \nu_2(\varepsilon) \leq \nu_2 < 1$$

を満たす任意の $\theta, \varphi, L, \nu_2$ と $\nu_1(\varepsilon), \nu_3(\varepsilon), \nu_4(\varepsilon), \nu_5(\varepsilon), \nu_7(\varepsilon)$,

$T = 2\beta(\delta)$ について, 以下 ε_ε に対して定理 4.1 の条件

2°, 3°, 4° と補題 7.2 の 5° とが成立する。

証明 ε_ε について定理 4.1, 2°, 3°, 4° と補題 7.2 の 5° が成立つようにするには, $\nu, \theta, L, T, \nu_1, \dots, \nu_7$ をどのように定めたらよいかを見る。まず 4° から調べる。 θ, φ を適当に決めて $G_1 = \{(c, \tau) \mid \|c\| \leq \theta|\tau| + \varphi\}$ と置く。 $(\tilde{c}, \tilde{\tau}) \in G_1, \tilde{\tau} \in R$ に対して,

$(\tau, \tilde{r}, \tilde{r})$ を通る $\mathcal{X}_\varepsilon$ の元を $x' = (c', r')$, $\mathcal{X}$ の元を $x = (c, r)$ と書く。
補題 7.3 により, $\tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$ の時

$$\begin{aligned} |1 + |r'(\tau)|| &\geq |1 + |r(\tau)| - |r(\tau) - r'(\tau)|| \\ &\geq \nu_3(1 + |\tilde{r}|) - D(\varepsilon)(1 + \|c\| + |\tilde{r}|) \\ &\geq [\nu_3 - D(\varepsilon)(1 + \max(\theta, \vartheta))] (1 + |\tilde{r}|) \end{aligned}$$

同様に, $\tau \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T]$ である時

$$|1 + |r'(\tau)|| \geq [\nu_5 - D(\varepsilon)(1 + \max(\theta, \vartheta))] (1 + |\tilde{r}|)$$

今 ε の関数 $\alpha(\varepsilon) > 0$ を適当に定めて

$$(7.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} = +\infty$$

とする。 $\nu_3(\varepsilon) = \nu_3 - \alpha(\varepsilon) = 1 - \alpha(\varepsilon)$, $\nu_5(\varepsilon) = \nu_5 - \alpha(\varepsilon) = 1 - \alpha(\varepsilon)$ と置く。

上の評価式から $\max(\theta, \vartheta) \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} - 1$ ならば

$$|1 + |r'(\tau)|| \geq \nu_3(\varepsilon)(1 + |\tilde{r}|) \quad \tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$$

$$|1 + |r'(\tau)|| \geq \nu_5(\varepsilon)(1 + |\tilde{r}|) \quad \tau \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T]$$

を得る。我々は 4° の評価で θ, ϑ に対して一つの上界 $\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} - 1 < +\infty$ を得た事を注意しよう。

次に 5° を調べる。以下 の Notation は 4° の時と同じとする。

補題 7.3 により, $\tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$ の時

$$\|c'(\tau) - c(\tau)\| + \|r'(\tau) - r(\tau)\| \leq D(\varepsilon) \{(\theta + 1)|\tilde{r}| + \vartheta + 1\}$$

従って $\mathcal{X}$ に対する 5° と, $\mathcal{X}$ の定義により

$$\|c'(\tau)\| + |r'(\tau)| \leq D(\varepsilon) \{(\theta + 1)|\tilde{r}| + \vartheta + 1\} + \nu_7(\theta|\tilde{r}| + \vartheta) + |\tilde{r}|$$

上記に得た 4° を使って

$$\begin{aligned} \|C'(\tau)\| + |\gamma'(\tau)| &\leq \{D(\varepsilon)(\theta+1) + v_7\theta + 1\} \left[\frac{1}{v_3(\varepsilon)} \{1 + |\gamma'(\tau)|\} - 1 \right] + D(\varepsilon)(v+1) + v_7v \\ \therefore \|C'(\tau)\| &\leq \left\{ \frac{D(\varepsilon)(\theta+1)}{v_3(\varepsilon)} + \frac{v_7\theta}{v_3(\varepsilon)} + \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \right\} |\gamma'(\tau)| \\ &\quad + \{D(\varepsilon)(\theta+1) + v_7\theta + 1\} \left\{ \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \right\} + D(\varepsilon)(v+1) + v_7v \end{aligned}$$

この最後の式の右辺が $\leq v_7(\varepsilon) \{ \theta |\gamma'(\tau)| + v \}$ となるように

$v_7(\varepsilon) < 1$, θ, v を取ればよい。まず θ に対しては

$$(7.4) \quad \frac{D(\varepsilon)(\theta+1)}{v_3(\varepsilon)} + \frac{v_7\theta}{v_3(\varepsilon)} + \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \leq v_7(\varepsilon)\theta$$

$$\frac{D(\varepsilon)}{v_3(\varepsilon)} + \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \leq (v_7(\varepsilon) - \frac{D(\varepsilon)}{v_3(\varepsilon)} - \frac{v_7}{v_3(\varepsilon)})\theta$$

この式から, $F(\varepsilon) = D(\varepsilon)v_3(\varepsilon)^{-1} + v_3(\varepsilon)^{-1} - 1$, $v_3(\varepsilon) = D(\varepsilon)v_3(\varepsilon)^{-1} + v_7v_3(\varepsilon)^{-1} + P(\varepsilon) + Q(\varepsilon)$ ($P, Q > 0$), $(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1} = 0)$ となるように $P(\varepsilon) > 0$ を適当に定める。 $Q(\varepsilon)$ は v に対する条件から、すぐ後で条件を定める。) と置けば θ が

$$\frac{F(\varepsilon)}{P(\varepsilon)} \leq \theta$$

を満たせば (7.4) は満足される。 v に対しては

$$(7.5) \quad \{D(\varepsilon)(\theta+1) + v_7\theta + 1\} \left\{ \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \right\} + D(\varepsilon)(v+1) + v_7v \leq v_7(\varepsilon)v$$

でなければならぬ。 4° において $\max(\theta, v) \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} - 1$ としたから

$$\{D(\varepsilon)(\theta+1) + v_7\theta + 1\} \left\{ \frac{1}{v_3(\varepsilon)} - 1 \right\} \leq \frac{1}{1-\alpha(\varepsilon)} \{ \alpha(\varepsilon)^2 + v_7 \frac{\alpha(\varepsilon)^2}{D(\varepsilon)} + (-v_7+1)\alpha(\varepsilon) \}$$

である。 $G(\varepsilon) = \frac{1}{1-\alpha(\varepsilon)} \{ \alpha(\varepsilon)^2 + v_7 \frac{\alpha(\varepsilon)^2}{D(\varepsilon)} + (-v_7+1)\alpha(\varepsilon) \} + D(\varepsilon)$ と

置く、条件 (7.3) の他に $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(\varepsilon)^2}{D(\varepsilon)} = 0$ となるように $\alpha(\varepsilon)$ を取り

直せば $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon) = 0$, 所以して

$$(7.6) \quad G(\varepsilon) \leq \{v_7(\varepsilon) - D(\varepsilon) - v_7\}v$$

であれば (7.5) は満足される, 所以して (7.6) は

$$\frac{G(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)} \leq \nu$$

であれば満たされる。Qは $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)} = 0$ とする
 ようにとる。以上の評価から, $\underline{\theta}(\varepsilon) = F(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1}$, $\bar{\theta}(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)D(\varepsilon)^{-1} - 1$,
 $\underline{\nu}(\varepsilon) = G(\varepsilon)Q(\varepsilon)^{-1}$, $\bar{\nu}(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)D(\varepsilon)^{-1} - 1$, $\nu_3(\varepsilon) = \nu_5(\varepsilon) = 1 - \alpha(\varepsilon)$, $\nu_7(\varepsilon) =$
 $D(\varepsilon)\nu_3(\varepsilon)^{-1} + \nu_7\nu_3(\varepsilon)^{-1} + P(\varepsilon) + Q(\varepsilon)$ と定めれば 4°, 5° が成立する事が
 わかった。

2°, 3° の条件も 4°, 5° と同様の議論をして得られる。結果だけ
 を記しておく。 $\alpha'(\varepsilon) = \min\{D(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, (1 - 2\alpha(\varepsilon) - \nu_1)D(\varepsilon)^{-1}\}$ と置く。
 $D(\varepsilon) = L(4(1+L)^2)^{-1}$ の正の二根を $L_1(\varepsilon) < L_2(\varepsilon)$ とする。この
 時, $\nu_1(\varepsilon) = \nu_1 + D(\varepsilon)\alpha'(\varepsilon)$, $\nu_4(\varepsilon) = \nu_4 + D(\varepsilon)\alpha'(\varepsilon)$, $\nu_2(\varepsilon) = D(\varepsilon)(1 + \alpha'(\varepsilon))$
 $\underline{L}(\varepsilon) = L_1(\varepsilon)$, $\bar{L}(\varepsilon) = \min(L_2(\varepsilon), \alpha'(\varepsilon), \frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} - 1)$ と置けば,
 2°, 3° が成立する。 証明終り

補題 7.4 と定理 4.1 によって次の定理を得た。

定理 7.5 十分小さい $\varepsilon > 0$ の関数 $0 < \Theta_1(\varepsilon), \Theta_2(\varepsilon) < +\infty$,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_1(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_2(\varepsilon) = +\infty$ が存在して次が成立する。

$$\mu(\varepsilon) = -(2T)^{-1} \log(1 - \nu_2(\varepsilon)), \quad \nu(\varepsilon) = -T^{-1} \log \nu_1(\varepsilon)$$

$$\chi(\varepsilon) = \max \left\{ \frac{1 + \nu_2(\varepsilon)}{1 - \nu_2(\varepsilon)}, \frac{\nu_3(\varepsilon)}{\nu_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\nu_1(\varepsilon)}, \frac{\nu_4(\varepsilon)}{\nu_1(\varepsilon)} \right\}$$

と置く。 $\phi_\varepsilon: \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して次が成立する。

(i) $\forall x, x_1, x_2 \in \Gamma, \forall \tau \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|\phi_\varepsilon(x, \tau)\| \leq \Theta_1(\varepsilon)(|x| + 1), \quad \|\phi_\varepsilon(x_1, \tau) - \phi_\varepsilon(x_2, \tau)\| \leq \underline{L}(\varepsilon)|x_1 - x_2|$$

(ii) $\tilde{\gamma} \in \Gamma, \tilde{\tau} \in R, \tilde{c} = p_\varepsilon(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$ に対して, $(c, \gamma) \in X_\varepsilon$ が存在して

$$J(c, \gamma) = R, c(\tilde{\tau}) = \tilde{c}, \gamma(\tilde{\tau}) = \tilde{\gamma}, c(\tau) = p(\gamma(\tau), \tau) \text{ for } \tau \in R$$

(iii) $(c, \gamma), (c', \gamma') \in X_\varepsilon, J(c, \gamma) = J(c', \gamma') = R, c(\tau) = p_\varepsilon(\gamma(\tau), \tau)$

$$c'(\tau) = p_\varepsilon(\gamma'(\tau), \tau) \text{ for } \tau \in R \text{ ならば}$$

$$|\gamma(\tau) - \gamma'(\tau)| \leq X(\varepsilon)^{-1} e^{-\mu(\varepsilon)(\tau - \tilde{\tau})} |\gamma(\tilde{\tau}) - \gamma'(\tilde{\tau})| \text{ for } \tau \geq \tilde{\tau}$$

(iv) $\|\tilde{c}\| \leq \Theta_2(\varepsilon)(|\tilde{\gamma}| + 1) \quad \tilde{\tau} \in R$ ならば, $\tau \geq \tilde{\tau}$ に対して

$$\|c(\tau; \tilde{c}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}) - p_\varepsilon(\gamma(\tau; \tilde{c}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}), \tau)\| \leq X(\varepsilon) e^{-\nu(\varepsilon)(\tau - \tilde{\tau})} \|\tilde{c} - p_\varepsilon(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau})\|.$$

(v) $p' : \Gamma \times R \rightarrow C$

$$\sup_{\gamma \in \Gamma, \tau \in R} \frac{\|p'(\gamma, \tau)\|}{1 + |\gamma|} \leq \Theta_2(\varepsilon)$$

p' に対して (ii) において p を p' と書きかえた条件が成立するならば $p' = p_\varepsilon$

証明 $\Theta_1(\varepsilon) = \max(\underline{\theta}(\varepsilon), \underline{\nu}(\varepsilon)), \quad \Theta_2(\varepsilon) = \min(\bar{\theta}(\varepsilon), \bar{\nu}(\varepsilon))$ と置けば, 定理 4.1 と補題 7.4 とから導かれる。

定理 7.4 によって, 我々は最初の目的である定理 3.1 を得る。

即ち, $g_\varepsilon(\gamma, \tau) = \Psi^{-1}(p_\varepsilon(\gamma, \tau), \gamma)$

$$g_0(\gamma, \tau) = \Psi^{-1}(0, \gamma)$$

と置けば定理 3.1 が成立し, g_ε が方程式 (3.1) の Integral Manifold である。§1 の定義に従って書けば

$$S_\varepsilon = \{(\tau, \gamma, x) \in R \times B_m \times B_m \mid (\gamma, x) = g_\varepsilon(\gamma, \tau), \tau \in R, \gamma \in R^m\}$$

は方程式 (3.1) の $m+1$ 次元 Integral Manifold である。

— 参考文献 —

- [1] A. Halanay, J. Kurzweil: A theory of Invariant Manifolds for Flows;
Rev. Roum. Math. Pures et Appl. Tome XIII N°8. p.1079-1087 1968
- [2] J. Kurzweil: Invariant Manifolds of a class of Linear Functional
Differential. Eqs; Ibid. Tome XIII N°8 p.1113-1120 1968
- [3] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second Method;
the Mathematical Society of Japan 1966
- [4] J. K. Hale, Dynamical Systems and Stability
J. of Math. Analysis and Appl. 26. p.39-59 1969