

フェルミ原子ガス超流動における BCS－BECクロスオーバー

大橋 洋士

慶應義塾大学理工学部物理学科

概要

2004年にフェルミ原子気体 ^{40}K 、 ^6Li で相次いで観測された超流動では、フェッシュバッハ共鳴と呼ばれる機構により、クーパ対形成に必要な引力相互作用を自在に制御することができる。この画期的な特徴を活かして実現されたのがBCS－BECクロスオーバーであり、そこでは相互作用を強くするにつれ、金属超伝導で実現するBCS状態から、超流動転移温度以上で形成された分子ボソンのボーズアインシュタイン凝縮（BEC）への連続的な移行が起こっている。これにより、従来別々に研究されてきたフェルミ粒子系超流動（超伝導や液体 ^3He ）とボーズ粒子系超流動（液体 ^4He や希薄ボーズ原子ガス）を統一的に扱うことが可能になった。強結合領域で実現する超流動転移温度はフェルミ縮退温度の20%程度にまで達しており、これは金属超伝導の場合に換算すると室温をはるかに超える“超”高温超伝導の実現に匹敵している。また、ここで実現している超流動現象の物理的構造は金属超伝導のそれと本質的に同じであり、この系の研究は高温超伝導研究にも大いに資するところがあると考えられている。この講義では、BCS－BECクロスオーバーという極めて興味深い現象について、粒子の統計性、ボーズ凝縮、BCS理論といった基本的な話題から出発して詳しく解説する。併せて最新の話題についても触れ、現在爆発的勢いで研究が進むフェルミ原子ガス超流動研究の面白さを伝えたいと考えている。

1 はじめに

超伝導、超流動は量子力学的な効果がマクロなスケールで現れる非常に魅力的な現象である。その歴史は古く、20世紀初めのヘリウムの液化の成功（1908年、K. Onnes）がひとつの契機になっている。実際、超伝導は液体ヘリウムを冷媒として1911年にHg

において発見され（K. Onnes）、超流動は正にこの液体ヘリウム（ ^4He ）中で最初に見つかった。

超流動状態では流体は粘性なく流れ、その流体の構成要素が電荷を持った電子である場合が超伝導（＝抵抗なく電流が流れる状態）であるとみなされる。その意味で超伝導、超流動現象は大枠として同じ現象である。実際、1957年に登場したBCS理論（Bardeen、Cooper、Schrieffer）では、引力相互作用により2つの電子（＝フェルミ粒子）がクーパー対と呼ばれる分子（＝ボーズ粒子）を形成、これが低温である種のBEC（Bose-Einstein凝縮）状態になることで超伝導現象が説明された。更に、その後Eagles（1969）、Leggett（1980）Nozières、Schmitt-Rink（1985）らによって、電子間の引力相互作用を次第に強くしていくと、BCS状態は強く結合した分子ボソンのBEC状態に連続的に移行することが理論的に指摘された（BCS-BECクロスオーバー）。しかし、こうした事実にもかかわらず、超伝導、超流動の研究はその後もフェルミ粒子系超流動（超伝導や超流動 ^3He ）とボーズ粒子系超流動（超流動 ^4He や希薄アルカリ原子気体のBose-Einstein凝縮（BEC））という2つの道に分かれて発展することになる。両者をつなぐBCS-BECクロスオーバー現象は、現実問題として電子間相互作用を自在に制御することが不可能であることから、アカデミックな話題以上の興味は持たれなかった。

しかし、この状況はフェルミ原子気体（ ^{40}K 、 ^6Li ）の超流動化の成功（2004）により一変する。この系ではFeshbach共鳴と呼ばれる原子特有の現象を利用することで、フェルミ粒子間の引力相互作用の強さを自在に制御することが可能であり、BCS-BECクロスオーバーがにわかに現実の問題となったのである。これにより、通常の金属超伝導で実現する引力相互作用が弱い場合のBCS状態から強い引力相互作用で実現する分子ボソンのBEC的な超流動状態までを連続的、かつ、統一的に研究することが可能となった。更に、両極限の中間領域（クロスオーバー領域）はこれまでの超伝導、超流動系では到底調べることができなかった新領域として非常に注目を集めることとなった。

BCS-BECクロスオーバーが実際に観測されているのは極低温フェルミ原子気体であるが、そこで実現している「物理」は超伝導で起こっているものと本質的に同じである。強結合BEC領域での超流動転移温度がフェルミ縮退温度（フェルミ原子ガスの場合、これは $\mu[\text{K}]$ のオーダーである）の20%にまで到達しているという驚くべき実験結果は、より高い超伝導転移温度を目指す高温超伝導研究にとってなんらかのヒントになるかもしれない（金属でのフェルミ縮退温度は $10^4 \sim 10^5 [\text{K}]$ 程度）。また、BCS-BECクロスオーバー現象はフェルミ原子気体での実現後、原子物理学や物性物理学はもとより、原子核物理学や素粒子物理学（カラー超伝導）、宇宙物理学においても議論されるようになっていく。これは、この現象の普遍性を如実に表しており、研究領域が細分化している現在の物

理学にあって非常に珍しいことである。長い間、根は同じでありながら別々に研究されてきたフェルミ粒子系、ボーズ粒子系の超流動現象をひとつにまとめ、その全貌を明らかにしようとする研究が今まさに進行中であるこの時期に、その鍵となる BCS-BEC クロスオーバー現象を理解することは非常にタイムリーなことである。

この講義の目的は、超流動の統一理論とも言える BCS-BEC クロスオーバーについて、その本質を平易に解説することにある。超伝導、超流動に興味を持っている人はもちろん、それ以外の分野の研究を行おうとしている人にとっても、この普遍的で汎用性の高い現象に関する基礎知識を身につけておくことは、いつ、どこの分野で新発見があるか分からない今日の物理学の研究を行ううえで意味あることと思われる。

この講義では、物性物理学のさまざまな分野の理論、実験研究をこれから実施しようとしている人に興味を持ってもらえるよう、できるだけ基本的なところから出発、BCS-BEC クロスオーバーについて概説する。ただし、超伝導、超流動現象を理解するうえで必要となる第二量子化については、それを説明する時間的余裕はないので事前に各自で勉強しておいてもらいたい。この講義ノートは実際の講義内容のダイジェスト版（予告編？）であり、講義では実験結果を含めより詳細な解説を行う予定である。

2 原子の統計性と量子性

2.1 フェルミ原子ガス超流動の舞台

現在、フェルミ原子気体の超流動はアルカリ金属原子 ^{40}K 、 ^6Li において実現している。この系はガスであるため拡散しないように捕獲しておく必要があるが、それには磁氣的、光学的に作られた調和振動子型のトラップポテンシャルが用いられている。その中に捕獲された $10^5 \sim 10^8$ 程度の原子をレーザー冷却、蒸発冷却といった手法で μK オーダーの極低温領域まで冷却、超流動状態を実現させている。

原子は陽子、中性子、電子という 3 種類のフェルミ粒子から構成されており、これらの総和が奇数であるものがフェルミ原子、偶数であるものがボーズ原子である。例えば ^6Li の場合、陽子 3、中性子 3、電子 3 で計 9 であり、その同位体である ^7Li は中性子が 4 であるのでボーズ粒子として振舞う。一般にアルカリ金属原子 ^nA の場合、 n が偶数のものがフェルミ原子、奇数のものがボーズ原子である。また、原子のスピン状態 (hyperfine state) F は電子スピン S と核スピン I の合成角運動量で指定されるが、アルカリ金属原子の場合、最外殻電子が 1 であることから $S = 1/2$ となり、結果、 $F = I \pm 1/2$ となる。フェルミ原子ガス超流動で使用される ^6Li では $F = 3/2, 1/2$ 、 ^{40}K では $F = 9/2, 7/2$ で

ある。

電子 (=フェルミ粒子) が主役となる超伝導では、 $S_z = 1/2$ ($\uparrow$) のスピンを持った電子と $S_z = -1/2$ ($\downarrow$) のスピンを持った電子との間でクーパ対が形成される。フェルミ原子ガス超流動の場合、これに相当するものは2種類の原子スピン状態であり、 ^{40}K 、 ^6Li の場合はそれぞれ、

$$^6\text{Li}: |F, F_z\rangle = |1/2, \pm 1/2\rangle$$

$$^{40}\text{K}: |F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle, |9/2, -7/2\rangle$$

が用いられる。これらを擬スピン $\uparrow\downarrow$ とみなせば、理論的な取り扱いに関する限り超伝導とフェルミ原子ガス超流動で違いはない。

2.2 フェルミ統計とボーズ統計

フェルミ原子、ボーズ原子の違いはその統計性に現われる。フェルミ統計に従う粒子の波動関数は2粒子の入れ替えに反対称、ボーズ統計に従う場合は対称であることが要請される。結果、フェルミ粒子の場合、1つの量子状態に最大1つの粒子しか占有できない(パウリの排他律)。また、2つのフェルミ粒子のスピン状態が同じである場合は空間的に同一地点を占めることはできない。

2.2.1 ボーズ統計とボーズアインシュタイン凝縮

フェルミ粒子の持つ排他的性質はボーズ統計に従う粒子には存在せず、その結果、理想ボーズ気体は低温でボーズアインシュタイン凝縮 (BEC) を起こす。理想ボーズ気体の粒子数はボーズ分布関数を $n_B(\varepsilon_p - \mu)$ 、運動エネルギーを $\varepsilon_p = p^2/2m$ と書いて、

$$N = \sum_{\mathbf{p}} n_B(\varepsilon_p - \mu) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1} \quad (1)$$

で与えられるが、化学ポテンシャルは負の値しかとれない(さもないとボーズ分布関数が負になる)ことから、ある温度 T_{BEC} 以下ではこの方程式は満たされなくなる。 T, T_{BEC} で系は BEC 状態にあり、巨視的な数 ($\sim O(N)$) の粒子が最低エネルギー状態 ($\mathbf{p}=0$) を占有する。BEC の転移温度は上式で $\mu=0$ としたもので決定され、

$$T_{BEC} = \frac{2\pi}{(\zeta(3/2))^{2/3}} \frac{\hbar n^{2/3}}{m} \quad (2)$$

ここで $n = N/V$ 、また $\zeta(3/2) = 2.612$ である。 $T < T_{BEC}$ で $\mathbf{p}=0$ に凝縮している粒

子数（凝縮粒子数、condensate fraction、 N_c ）は、

$$N_c = N - \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p} - 1} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_{BEC}} \right)^{3/2} \right] \quad (3)$$

で与えられ、 $T = 0$ で全粒子が凝縮する ($N_c = N$)。

$T > T_{BEC}$ の正常相では化学ポテンシャルは負であり、想像されるように温度が上がるに従ってその絶対値は大きくなる。すなわち、高温ではボーズ分布関数は古典的なボルツマン分布 ($\propto e^{-\beta \epsilon_p}$) に帰着する。逆に高温側から考えると、もし、絶対零度まで系が古典的なボルツマン分布に従うとすると BEC 状態は実現しないので、BEC 状態は粒子の量子性を反映していると理解できる。粒子の量子（統計）力学的な広がり（熱的ドブロイ波長 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m T}$ ）で与えられ^{*1}、これは低温ほど大きくなる。高温領域で、この量が平均粒子間隔 ($d \sim 1/n^{1/3}$ 、 $n = N/V$ は粒子数密度) に比べて十分小さい場合、粒子の波動性は無視できて、「古典的な粒々の集まり」として系を扱える。他方、低温領域で $\lambda_T > d$ である場合は粒子同士の波動関数は重なり合っているため、粒々の集合として系を扱うという古典描像は使えず、量子力学で考える必要がある。したがって、古典領域と量子領域の境目は $\lambda_T \sim d$ で決まることになるが、これを温度について解くと ($O(1)$ の数因子の違いを除き) 式 (2) が得られる。すなわち、 T_{BEC} はボーズ粒子の量子性が顕著になる特徴的な温度という物理的な意味を持つ。

2.2.2 フェルミ統計とフェルミ縮退温度

自由フェルミ気体の粒子数分布はフェルミ分布関数 $f(\epsilon_p - \mu) = 1/(e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1)$ で与えられ、粒子数はスピン自由度が2である場合、

$$N = 2 \sum_{\mathbf{p}} f(\epsilon_p - \mu) = 2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} \quad (4)$$

ボーズ粒子の場合と異なり、この式は化学ポテンシャルを適当に選べば常に成立し BEC のような相転移は起こらない。 $T = 0$ ではフェルミ分布関数は階段関数となるが ($f(\epsilon_p - \mu) = \theta(\mu - \epsilon_p)$)、この時の化学ポテンシャルを ϵ_F と書いてフェルミエネルギーと呼び、また、このエネルギー準位をフェルミレベルと呼ぶ。このエネルギーを温度換算したものはフェルミ縮退温度と呼ばれるが、ボルツマン因子を1とする場合、 $T_F = \epsilon_F$ である（この講義ではこのスケールを採用する）。絶対零度では粒子は ϵ_F 以下の状態

^{*1} 温度 T の気体における粒子の運動エネルギー $\epsilon = p^2/2m$ の期待値は $k_B T$ 程度である。これをドブロイの物質波の式 $p = h/\lambda$ を組み合わせると重要でない数因子の違いを除いて λ_T が得られる。

を占有するため、運動量空間で考えるとフェルミ面と呼ばれる球面内側を粒子が占めることになる。フェルミ面の半径がフェルミ運動量 k_F であり、フェルミエネルギーとは $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ でつながっている。

絶対零度における分布関数の形、 $f(\varepsilon_p - \mu) = \theta(\mu - \varepsilon_p)$ 、はまさにパウリの排他原理（1つの量子状態に2つ以上の粒子は占有できない）に因るもので、フェルミ統計の特徴を反映したものである。有限温度でのフェルミ分布関数の形状は階段関数とは異なり、フェルミレベル近傍の粒子が熱的に励起されるため ε_F 近傍の「階段部分」が温度程度の領域にわたり崩れた形になる。温度が ε_F 程度になると階段構造は全エネルギー領域にわたって崩れ、排他原理の影響は少なくとも分布関数の形状には顕には見えなくなる。したがって、 T_F はフェルミ統計性が重要になってくる目安の温度であると考えられる。実際、式 (4) から得られる粒子数密度、 $n = p_F^3/3\pi^2$ 、から平均粒子間距離を $d \sim 1/n^{1/3} = (3\pi^2)^{1/3}/p_F$ と見積もり、そこから $\lambda_T \sim d$ となる温度を求めると（重要でない数因子の違いを除き）フェルミ縮退温度 T_F が得られる。

3 フェルミ粒子の対形成

3.1 引力相互作用する2粒子系の場合

フェルミ粒子系はそのままでは量子性が重要となる低温領域でも BEC 状態にはならないが、粒子間にはたらく引力相互作用によって分子化することができれば、分子ボソンの BEC への道が開かれる。フェルミ粒子の分子化条件を探るため、接触型（デルタ関数型）の引力相互作用を有する2粒子系という単純化したモデルを考える。 $\hbar = 1$ として Hamiltonian は

$$H = -\frac{\nabla_1^2}{2m} - \frac{\nabla_2^2}{2m} - U\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5)$$

波動関数の空間成分は重心運動量0の場合を考えると次のようにおく。

$$\Psi = \sum_{\mathbf{p}} g_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (6)$$

2つの粒子のスピンの異なる場合 ($\uparrow, \downarrow$)、スピン部分はシングレット、トリプレットに分類され、全体としての波動関数の反対称性から、シングレットの場合は空間部分が対称 ($g_{-\mathbf{p}} = g_{\mathbf{p}}$)、トリプレットの場合は空間部分が反対称 ($g_{-\mathbf{p}} = -g_{\mathbf{p}}$) となる。シュレーディンガー方程式にこの形の解を代入すると

$$\left[\frac{p^2}{m} - E \right] g_{\mathbf{p}} = U \sum_{\mathbf{p}} g_{\mathbf{p}} \quad (7)$$

スピントリプレットの場合、 $g_{-\mathbf{p}} = -g_{\mathbf{p}}$ に注意すると右辺は0となる。結果、相互作用していない2粒子系のエネルギー $E = 2 \times p^2/2m$ が得られるが、これは、トリプレットの場合、2つのフェルミ粒子は空間的に同一地点に来れない為に今考えている接触型の相互作用が機能しないことに因る。スピンシングレットの場合は式(7)よりエネルギーの方程式として

$$1 = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\frac{p^2}{m} - E} = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}} - E} = U \frac{m\sqrt{2m}}{2\pi^2} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon - E} \quad (8)$$

分子形成はこの方程式が $E < 0$ の束縛状態の解を持つか否かで判定されるが、この方程式の右辺の積分は紫外発散して収束せず、何らかのカットオフが必要である。これは相互作用をデルタ関数型（これはフーリエ変換してみれば容易に分かるようにあらゆるエネルギー領域で相互作用の強さが同じである）にとったことに因るものであり、高エネルギー領域で値が小さくなるような運動量依存性を有する現実的な相互作用を用いればこの発散は本来存在しないはずである。しかし、複雑な運動量依存性を有する相互作用を用いると当然計算も複雑になり、本来低エネルギーの現象を考えているのに高エネルギー領域での相互作用の詳細を知る必要がある、というのは不便である。一方、人為的にカットオフを導入する場合、結果は当然カットオフに依存してしまい、実験と比較する際に問題になる。幸いにして、この発散は繰り込みの処方により回避することができる。そのアイデアは、今考えている相互作用に対する散乱行列 (t 行列) の低エネルギー、長波長極限で与えられる s 波散乱長 a_s

$$\frac{4\pi a_s}{m} = - \frac{U}{1 - U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \quad (9)$$

に紫外発散を押し込めてしまおう、というものである。式(9)は高エネルギーの散乱の効果が「繰り込まれた」（低エネルギー極限の）2体相互作用を表す。この式の分母は積分に直すとやはり高エネルギー領域で発散しており、何らかのカットオフが必要であるが、そのカットオフの詳細を探ることはせずに散乱長 a_s は実験で決めることにする。一旦このように決めると、式(9)を用いて式(8)の相互作用を散乱長で表現することにより

$$1 = - \frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}} - E} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right] = - \frac{a_s \sqrt{2m}}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{E}{2\varepsilon - E} \quad (10)$$

となり、積分は収束、しかも方程式は実験的に決められる量のみで書かれる。この方程式を解くと束縛状態は $a_s > 0$ の場合に得られ、束縛エネルギーは

$$E = -\frac{1}{ma_s^2} \quad (11)$$

また、この時の波動関数は式 (7) より

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_s}} \frac{e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/a_s}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (12)$$

はじめの相互作用 U と相互作用を散乱長で表現した場合との対応は、「値は大きいが有限なカットオフ ω_c 」を式 (9) の分母の和に導入すると分かる。 a_s^{-1} 軸上で考えた場合、引力相互作用が弱い (U が小さい) 極限は $a_s^{-1} \rightarrow -\infty$ に対応しており、強い (U が大きい) 極限は $a_s^{-1} \rightarrow +\infty$ に対応する。従って、ここでの結果は、2 粒子系の場合分子化するにはある程度引力相互作用が強い必要があり、形成される分子のサイズは散乱長程度 a_s である（したがって引力相互作用が強いほど分子は小さい）ことを示している。尚、散乱長が正であるからといって、2 粒子間に斥力がはたらいているわけではないことに注意する。

3.2 フェルミ面効果（クーパー問題）

前節でみたように、2 粒子系の場合、引力相互作用がある程度強くなければフェルミ粒子は分子化しない。これに対し、Cooper は、多フェルミ粒子系の場合、フェルミ面の存在を考慮するとこの相互作用の強さに関する制限はなくなり、無限小の引力相互作用によってフェルミ粒子は対を形成できることを示した (Cooper instability)。

ここではフェルミ面を形成している 2 成分自由フェルミガス (スピン自由度が $\uparrow\downarrow$) にスピン状態の異なる 2 のフェルミ粒子を付け加えた場合を考える。簡単のため、接触型の引力相互作用がこの新たに付け加えた 2 粒子間にのみはたらくとする (クーパー問題)。シュレーディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\nabla_1^2}{2m} - \frac{\nabla_2^2}{2m} - U\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \Psi = (E + 2\varepsilon_F)\Psi \quad (13)$$

ここで、エネルギーはフェルミエネルギー ε_F から測っている (ただし、2 粒子分で 2 倍してある)。波動関数の空間成分は式 (6) の形にとるが、今の場合、フェルミ面以下の準位はすでに詰まっていて使えないため、運動量の和は $p > p_F$ に制限される。スピン部分についてはシングレットの場合のみ束縛状態の解が可能であり、その方程式は、式 (7) で右辺の和を $p > p_F$ に制限したものとなる。今回も運動量の和は高エネルギー領域で紫外

発散するので散乱長によってその発散を取り除く。ただし、今の場合、フェルミ面以下が使えないことから、フェルミレベルまで繰り込んだ散乱長を導入すると都合が良い。

$$\frac{4\pi a_s(p_F)}{m} = -\frac{U}{1 - U \sum_{p>p_F} \frac{1}{2\varepsilon_p}} \quad (14)$$

ただし、フェルミエネルギーに比べ非常に大きいカットオフ $\omega_c \gg \varepsilon_F$ が分母の和にあると考えると、 $[0, \omega_c]$ で和をとると $[\varepsilon_F, \omega_c]$ で和をとるとではほとんど違いはなく、 a_s と同じものと考えて差し支えない（以下では単に a_s と書く）。すると、紫外発散が除去された束縛状態の方程式は

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{p>p_F} \left[\frac{1}{2\varepsilon_p - 2\varepsilon_F - E} - \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] = -\frac{a_s \sqrt{2m}}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{E + 2\varepsilon_F}{2\varepsilon - 2\varepsilon_F - E} \quad (15)$$

引力相互作用が強い場合 ($(p_F a_s)^{-1} \gg 1$)、先の2粒子問題の結果、式(11)が再現され、その時の分子サイズも2粒子の場合と同じ結果 ($\sim a_s$) となる。フェルミ面が存在する場合の大きな効果は、2粒子の場合には相互作用が弱すぎて分子化しなかった弱結合領域 ($a_s^{-1} < 0$) でも束縛状態が形成可能となるという点である。フェルミ面の存在により無限小の引力相互作用で対形成が可能になる現象は Cooper instability と呼ばれ、生じた分子をクーパー対と呼ぶ。弱結合領域で束縛エネルギーの大きさがフェルミエネルギーに比べ十分小さい場合、式(15)の解として、

$$E = -8\varepsilon_F e^{-\frac{\pi}{p_F |a_s|}} \quad (16)$$

生じた分子のサイズも先と同様に計算できて、分子の波動関数は(12)で分子サイズを表す a_s の部分を次式で置き換えたものとなる。

$$\xi \equiv \frac{1}{p_F} e^{\frac{\pi}{2p_F |a_s|}} \quad (17)$$

中間領域を含めた全域の振る舞いは式(15)を数値的に解く他ないが、結果はここで得た両極限の結果をスムーズにつないだものになる。すなわち、引力相互作用が強くなるにしたがって分子の結合エネルギーは増加、分子サイズは小さくなる。次節で重要になることであるが、分子サイズが平均粒子間距離 ($d \sim p_F^{-1}$) 程度になるのは $|p_F a_s|^{-1} \lesssim 1$ の領域である（これは、式(17)、あるいは強結合での分子サイズの結果 ($\sim a_s$) から予想できる）。相互作用を散乱長で測った場合、強結合側 ($a_s^{-1} > 0$) はフェルミ面の影響もあるものの、本質的には分子形成は2体問題のレベルで生じる。これに対し、弱結合側 ($a_s^{-1} < 0$) では、対形成には（たくさんのフェルミ粒子によって形成された）フェルミ面の存在が本質的に重要であり、ある意味、多体的な束縛状態である。

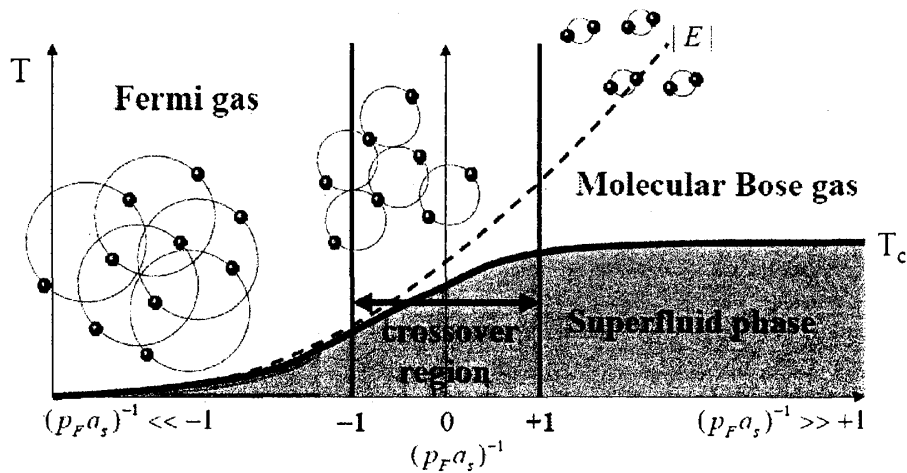


図1 フェルミ原子気体の相図 (BCS-BEC クロスオーバー)

3.3 分子ボソンのボーズ凝縮として捉えた場合の BCS-BEC クロスオーバー

前節の議論をすべてのフェルミ粒子間に引力相互作用がはたらいている場合に発展させたものが BCS 理論であるが、これについては後の章で説明するとして、ここでは、フェルミ対を「分子ボソン」ととらえる範囲で、BCS-BEC クロスオーバーという現象が定性的かつ直感的に理解できることを示す。

まず、BEC は粒子の量子性に起因する現象で、それは熱的ドブロイ波長が粒子間距離程度になると起こる、という点に注意する。図1は、横軸が散乱長で測った相互作用（右にいくほど引力が強くなる）、縦軸は温度である。点線は分子の束縛エネルギー（結合エネルギーであり）、温度軸にプロットした場合、分子が形成される特徴的な温度を与える。前節でみたように、 $|E|$ は強結合領域ほど大きく、結果、分子形成温度も図の右にいくほど高くなる。先ず、左端の弱結合領域を考えると、温度を下げて $T \sim |E|$ 程度になると、クーパー対分子ボソンが形成されるが、この時分子のサイズ（式 (17)）は平均粒子間距離（ $\sim p_F^{-1}$ ）に比べ非常に大きいため、分子形成と同時に BEC の条件が満たされる。結果、この領域ではクーパー対形成とそのボーズ凝縮が同じ温度で起こることになる。金属における超伝導転移は通常これに相当し、この領域は BCS 領域と呼ばれる。

引力相互作用が強くなると、結合エネルギーの上昇を反映して転移温度も高くなる（図1の T_c の線）。同時に分子サイズは小さくなり、 $|(p_F a_s)^{-1}| \lesssim 1$ の領域（クロスオーバー

領域)を越えると、 $T \sim |E|$ で形成された分子のサイズは粒子間距離に比べ小さくなる。この場合、 $T \sim |E|$ で分子ボソンは形成されても BEC の条件を満たさないためボーズ凝縮はおこらず、 $T \lesssim |E|$ の温度領域は凝縮していない分子のボーズ気体となる。この状況になると、更に温度を下げるにつれ、今度は分子を一つの粒子とみなした場合の熱的ドブロイ波長が成長、それが平均分子間距離 ($\sim (n/2)^{-1/3}$) に到達したところで分子の BEC が起こることになる (この領域は BEC 領域と呼ばれる)。この条件 $\lambda_T = (n/2)^{-1/3}$ はフェルミ粒子間の相互作用には依存しないため、ここでの転移温度は相互作用に依らず一定となる。強結合極限 (図 1 の右端) を $N/2$ 個の理想ボーズ気体とみなすと、式 (2) から

$$T_c = \frac{2\pi}{(\zeta(3/2))^{2/3}} \frac{\hbar(n/2)^{2/3}}{(2m)} = 0.218T_F \quad (18)$$

ここでの議論は非常に定性的ではあるが、後で分かるように、微視的理論に基づいた結果をよく再現する。少なくとも定性的にはクーパ対のサイズと平均粒子間距離の大小関係という簡単な議論によって BCS-BEC クロスオーバー現象の本質を理解することができるのである。

3.4 Feshbach 共鳴による可変な対形成相互作用

フェルミ粒子を分子化するには引力相互作用の存在が必要であり、BCS-BEC クロスオーバーを実現させるには実験的に相互作用の強さを広い範囲にわたって制御しなくてはならない。金属超伝導の場合、電子間の対形成相互作用は格子振動 (フォノン) が担っているが、この機構では相互作用制御はできない。これに対し、フェルミ原子気体では、Feshbach 共鳴が対形成機構となっており、この機構では符号も含め相互作用の値を自在に制御することができる。フェルミ原子気体で BCS-BEC クロスオーバーが初めて観測されたのはひとえにこの機構のおかげである。

Feshbach 共鳴とは原子同士の散乱の際、中間状態として共鳴束縛状態 (分子) が形成される現象で、図 2 (a) のように表される^{*2}。これに対し、通常のフォノン機構は図 2 (b) のように表現される。両者とも中間状態 (図 2 の点線部分) にボソン (フォノン、分子) が現われるが、Feshbach 共鳴機構では中間状態は分子ボソンのみであるのみ対し、フォノン機構ではボソンとフェルミ粒子 2 個が共存する。

今、中間状態に現われる分子ボソンのエネルギーを 2ν 、Feshbach 共鳴の結合定数を g

^{*2} ここで生じる分子はクーパ対分子とは別物であることに注意する。

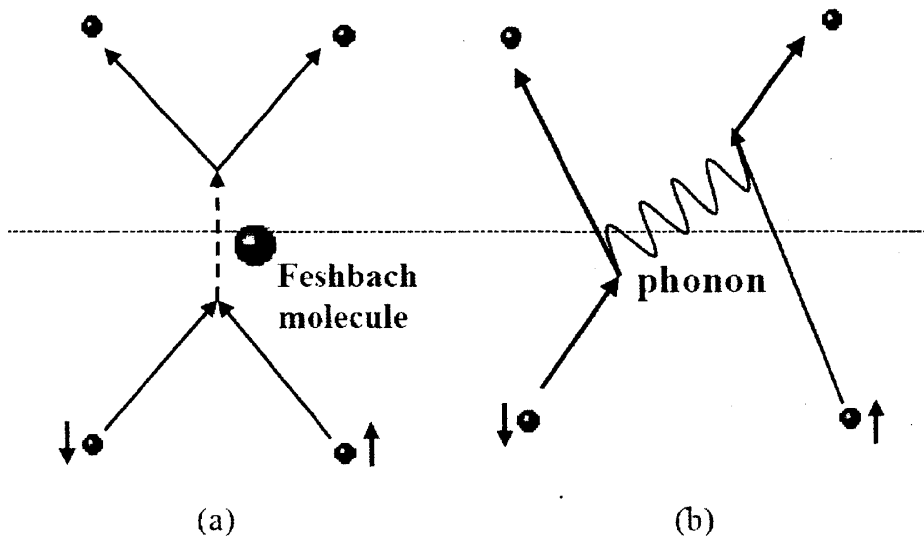


図2 対形成相互作用。(a) Feshbach 共鳴機構。(b) フォノン機構。

とすると、Feshbach 共鳴によるフェルミ原子間の有効相互作用は2次摂動の範囲で^{*3}

$$-V_{FR} = -\frac{g^2}{2\nu} \quad (19)$$

ここで、入射粒子のエネルギーは低エネルギー極限を考慮して0とした。Feshbach 共鳴では分子形成の過程で核スピンと電子スピンとの間に超微細相互作用がはたらくため、解離状態にある2原子の原子スピン状態と分子状態にある時の原子のスピン状態は異なったものになる。例えば⁴⁰Kの実験の場合、解離状態にある時の原子状態は $|F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle, |9/2, -7/2\rangle$ であるのに対し、分子状態にある場合は $|9/2, -9/2\rangle, |7/2, -7/2\rangle$ となる。超微細相互作用では核スピンと電子スピンとの間の交換($S_+I_- + S_-I_+$)が行われるが、核スピンのボーア磁子は電子スピンのそれに比べてはるかに小さいため、解離状態にある時と分子状態である時とで磁場中でのゼーマンエネルギーの大きさに違いが生じることになる。式(19)中の 2ν はこの違いを含んでおり、結果、有効相互作用 V_{FR} は磁場でその値を制御することが可能となる。特に、 $2\nu \rightarrow +0$ とする時、非常に強い引力相互作用が得られる。

Feshbach 共鳴機構を記述するモデルは結合フェルミオンボソンモデル(coupled fermion-boson (CFB) model)、または、2チャンネルモデルと呼ばれ、次の Hamil-

^{*3} 高次の摂動まで考慮しても式(19)と同じ形の相互作用が得られるが、その場合、 g 、 2ν は繰り込まれた量になる。

tonian で与えられる*4。

$$H = \sum_{p,\sigma} \varepsilon_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} + \sum_q (\varepsilon_q^B + 2\nu) b_q^\dagger b_q + g \sum_{p,q} [b_q^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + h.c.] - U \sum_{p,p',q} c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{p'-q/2\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \quad (20)$$

ここで $c_{p\sigma}$ は運動エネルギー $\varepsilon_p = p^2/2m$ を持つフェルミ原子の演算子で、 $\sigma = \uparrow\downarrow$ はクーパ対形成に関与する2種類の原子状態を擬スピンで表したものである。Feshbach 共鳴で生じた分子ボソンは b_q で表され、運動エネルギーは $\varepsilon_q^B = q^2/2M$ である。式 (20) の2項目における 2ν は Feshbach 共鳴の閾値を与え、threshold energy と呼ばれる。Feshbach 共鳴は3項目で記述され、2つのフェルミ原子と1つの分子ボソンの間の共鳴を表す (図2 (b) で用いられる電子フォノン相互作用の場合は、電子が散乱されると同時にフォノンが生成されるので $b^\dagger c^\dagger c + h.c$ の形になることに注意。)。最終項は Feshbach 共鳴とは関係ない弱い残留相互作用である (以下では引力 ($U > 0$) にとる)。分子ボソンはフェルミ原子2個から構成されているので $M = 2m$ の関係があり、また分子ボソンをフェルミ原子2個と数えた場合の全フェルミ粒子数は保存しなくてはならない。この拘束条件はグランドカノニカルな Hamiltonian、 $H - \mu N$ ($N = N_F + 2N_B$) を考えることにより式 (20) に吸収させることができる。得られる Hamiltonian は式 (20) で $\varepsilon_p \rightarrow \xi_p \equiv \varepsilon_p - \mu$ 、 $\varepsilon_q^B \rightarrow \xi_q^B \equiv \varepsilon_q^B - 2\mu$ と置き換えたものになる。

金属超伝導を議論する場合、勿論フォノン機構から出発しても良いが、フォノンによって媒介された有効相互作用を $-U$ とはじめて書いてフォノン自体は陽には扱わない BCS モデル

$$H_{BCS} = \sum_{p,\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{p'-q/2\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \quad (21)$$

がしばしば用いられる。今の場合、同じように、式 (20) を用いずに Feshbach 共鳴で得られた可変な引力相互作用 (19) を BCS モデルの引力項に組み込んで議論して良いか、という問題は必ずしも自明ではない。フェルミ原子ガス超流動の研究の初期の段階で、この単純化の正当性については議論が行われ、現在では、結合定数 g が大きい broad resonance の場合には良いと考えられている。尚、 ^{40}K 、 ^6Li の超流動はいずれも broad resonance

*4 現実の系は捕獲ポテンシャル内に閉じ込められているが、それ自体は BCS-BEC クロスオーバーとは無関係なのでここではこの効果は考えない。捕獲ポテンシャルがあると空間的に非一様になり、表面波や表面束縛状態などの興味深い現象が現われることを付記しておく。

の場合に相当している。この簡単化ができたため、フェルミ原子気体の超流動は Feshbach 共鳴という特殊な機構で実現しているものの、この系の超流動を研究することは BCS モデルで記述されるその他のフェルミ粒子系超流動の理解にも役立つ。

4 フェルミ粒子系超流動の基底状態 ($T=0$)

フェルミ粒子系超流動の基底状態に対する BCS 理論ははじめ弱結合超伝導理論として登場したが、その後、Leggett らの研究により、化学ポテンシャルの取り扱いに注意すれば、少なくとも定性的には強結合領域に至るまで適用できることが明らかとなった。ここでは、BCS 状態 (基底状態) が BCS-BEC クロスオーバー領域でどのように振舞うかについて説明する。

4.1 BCS 状態

クーパー問題を (スピンの異なる) 全てのフェルミ粒子間に引力相互作用がはたらいっている場合に発展させたものが BCS 理論である。ただし、この発展は演繹的に説明できるものではなく、BCS 状態は Bardeen、Cooper、Schrieffer 3 人の深い物理的洞察によって発見されたものと理解すべきであろう。しかし、以下のように考えるとある程度、クーパー問題から BCS 状態への発展過程を知ることができる。

クーパー問題での波動関数をフェルミ面以下が完全に詰まっていることを顕にして書くと

$$\Psi = \sum_{p > p_F} g_p c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger |F\rangle \quad (22)$$

ここで、 $|F\rangle = \prod_{p \leq p_F, \sigma} c_{p\sigma}^\dagger |0\rangle$ はフェルミ面以下に詰まった粒子を表す。このように書くと、式 (22) の和の制限は実際には必要はない (フェルミ面以下の項は自動的に 0 になる)。また、 $|F\rangle$ は対を単位として次のようにも書くことができる。

$$|F\rangle = \left[\sum_{p_1} \tilde{g}_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right] \left[\sum_{p_2} \tilde{g}_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right] \cdots \left[\sum_{p_N} \tilde{g}_{p_N} c_{p_N\uparrow}^\dagger c_{-p_N\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (23)$$

ただし、 $\tilde{g}_p = \theta(p_F - p)$ 。すると、式 (22) は

$$\Psi = \left[\sum_p g_p c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \right] \left[\sum_{p_1} \tilde{g}_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right] \left[\sum_{p_2} \tilde{g}_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right] \cdots \left[\sum_{p_N} \tilde{g}_{p_N} c_{p_N\uparrow}^\dagger c_{-p_N\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (24)$$

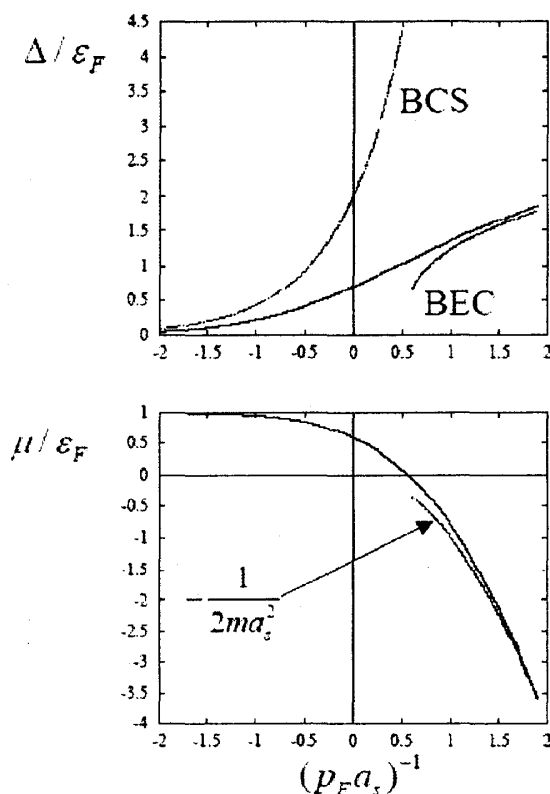


図3 BCS-BEC クロスオーバー領域における秩序パラメータ Δ と化学ポテンシャル μ ($T=0$)。 BCS, BEC はそれぞれ弱結合、強結合極限での結果を表す。

これはクーパー問題の波動関数であるが、もし全ての粒子間に引力相互作用がはたらき、それによる対形成が多数おこるとすると、次のようになることが推測される。

$$\Psi = \left[\sum_{p_1} g_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right] \left[\sum_{p_2} g_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right] \cdots \left[\sum_{p_N} g_{p_N} c_{p_N\uparrow}^\dagger c_{-p_N\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (25)$$

ここで g_p はクーパー問題で得られたものと類似のものであると期待される。

Bardeen、Cooper、Schrieffer は本質的には式 (25) と同じであるが、より扱い安い波動関数として次のものを提案した (BCS 状態)。

$$|BCS\rangle = C \prod_p \left[1 + g_p c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (26)$$

これを展開すると粒子数が偶数の様々な項が得られるが、粒子数が $2N$ のものを集めると式 (25) に一致する。 $C = \prod u_p$ 、 $g_p = v_p/u_p$ 、と書くとよく知られた BCS 状態の式に

なる。

$$|BCS\rangle = \prod_p \left[u_p + v_p c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (27)$$

規格化条件は $u_p^2 + v_p^2 = 1$ である。 u_p 、 v_p は粒子数期待値 N 一定の条件のもと、式 (21) で与えられる BCS Hamiltonian のエネルギー期待値 $\langle BCS | H_{BCS} | BCS \rangle$ を最小化することにより決定される。結果は

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right], \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right] \quad (28)$$

$\Delta \equiv U \sum_p u_p v_p$ は BCS 秩序パラメータと呼ばれ、フェルミ粒子系超流動と特徴づける量である。式 (28) を Δ の式に代入すると秩序パラメータの方程式 (ギャップ方程式) が得られる。

$$1 = U \sum_p \frac{1}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \equiv U \sum_p \frac{1}{2E_p} \quad (29)$$

この方程式は紫外発散を含むが先と同様に散乱長によってそれを取り除くと*5

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_p \left[\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \quad (30)$$

これと粒子数の方程式、

$$N = \sum_{p,\sigma} \langle BCS | c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} | BCS \rangle = \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right] \quad (31)$$

から秩序パラメータ Δ と化学ポテンシャル μ が自己無撞着に求まる。

通常の金属超伝導ではギャップ方程式のみを解き、化学ポテンシャル μ はフェルミエネルギー ε_F に等しいとして式 (31) はあえて解かない。これは引力相互作用が弱い弱結合領域では正当化されるが、相互作用が強い領域では成立しない。実際、式 (30)、(31) を弱結合 BCS 領域、強結合 BEC 領域で解くと、

○弱結合 BCS 領域： $(p_F a_s)^{-1} \ll -1$

$$\Delta = \frac{8}{e^2} \varepsilon_F e^{-\frac{\pi}{2p_F |a_s|}}, \quad \mu = \varepsilon_F \quad (32)$$

*5 金属超伝導の場合、フォノンによる引力相互作用には物理的に意味のあるカットオフが存在し、それは格子振動のエネルギーの上限を与えるデバイ周波数 ($O(10^3 [K])$) である。これに対し、原子気体では物理的に意味のあるカットオフは存在せず、ここでの繰り込みの処方が実験と理論を比較する際に重要となる。また、散乱長で相互作用を整理すると個々の系の詳細に依らない一般的な議論ができるという利点もある。

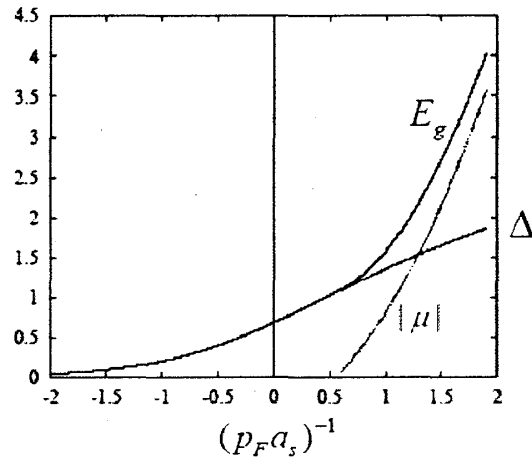


図4 1粒子励起のギャップ (ϵ_F で規格化している)。

○強結合 BEC 領域： $(p_F a_s)^{-1} \gg +1$

$$\Delta = \sqrt{\frac{16}{3\pi}} |\mu|^{1/4} \epsilon_F^{3/4}, \quad \mu = -\frac{1}{2ma_s^2} \quad (33)$$

となり、強結合 BEC 領域では化学ポテンシャルはフェルミエネルギーから大きくずれて負の値をとる。図3に示すように化学ポテンシャルの符号の反転はクロスオーバー領域で起こる。

4.2 BCS 状態の励起スペクトル

BCS 状態からの励起を議論する場合は、BCS モデルに対する平均場近似を考えるのが便利である。秩序パラメータ Δ が $\Delta = U \sum_p u_p v_p = U \sum_p \langle BCS | c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger | BCS \rangle$ と書けることから、BCS モデル (21) に対し、対を表す演算子部分をその平均値で近似する。相互作用部分は重心運動量 0 の部分のみ残すと、定数部分は無視して*6

$$H_{BCS} = \sum_{p,\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - \Delta \sum_p \left[c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger + c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \right] \quad (34)$$

これは Bogoliubov 変換

$$\begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{-p\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p & v_p \\ -v_p & u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{p\uparrow} \\ \alpha_{-p\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (35)$$

*6 一般性を失うことなく、 Δ は実数にとってよい。

で対角化できて、

$$H_{BCS} = \sum_{p,\sigma} E_p \alpha_{p\sigma}^\dagger \alpha_{p\sigma} \quad (36)$$

すなわち、励起スペクトルは $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$ となる。 α_p はボゴロンと呼ばれ、式 (35) を逆に解くと分かるようにフェルミ統計にしたがう準粒子である。容易に分かるように $\alpha_{p\sigma}|BCS\rangle = 0$ となり、BCS 基底状態からの励起を記述している。

ボゴロンは元のフェルミ粒子の生成演算子と消滅演算子の線形結合で書かれているので粒子数が保存されない。したがって、粒子数が保存される励起においてはボゴロンは最低2個励起される必要がある。また、励起スペクトルの構造からボゴロンの励起にはギャップ E_g があり、 $\mu > 0$ の領域では $E_g = \Delta$ 、強結合 BEC 領域 ($\mu < 0$) では $E_g = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \rightarrow |\mu|$ となる (図4)。強結合極限での粒子数を保存する場合の励起のギャップ、 $2 \times E_g = 2|\mu| = 1/ma_s^2$ 、は2粒子の対形成や Cooper 問題を解いた際の強結合側の分子の束縛エネルギーに一致しており、ボゴロンがクーパー対の解離を伴う1粒子励起を表していることを示している^{*7}。すなわち、弱結合 BCS 領域では通常理解のように化学ポテンシャルはフェルミ球の大きさを与えるが、強結合 BEC 領域では μ (の2倍) は分子の結合エネルギーを与える。

ボゴロンで表される1粒子励起スペクトルは超伝導の場合、超伝導状態密度と呼ばれる。フェルミ面付近の状態密度が一定とみなせる場合、これは

$$N(\omega) \propto \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \theta(\omega - \Delta) \quad (37)$$

で与えられ、秩序パラメータ Δ のところにピーク構造を持つ (コヒーレンスピークと呼ばれることがある)。しかし、超伝導では有名なこのピーク構造はフェルミ粒子系超流動の一般的な性質ではなく、強結合領域では消失する。この領域での状態密度を計算すると

$$N(\omega) = \sum_p \delta(\omega - E_p) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \rho(\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - |\mu|) \theta(\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - |\mu|) \quad (38)$$

となり、状態密度の構造はフェルミ粒子の状態密度 $\rho(\omega) \propto \sqrt{\omega}$ の構造を強く反映したものになる。これは、強結合 BEC 領域では、解離した原子が $-|\mu|$ からフェルミ粒子のバンドの底に励起されるためである。

^{*7} 弱結合領域でのエネルギーギャップ Δ (の2倍) は Cooper 問題を解いた際のこの領域での分子の結合エネルギーの表式に近いが完全には一致しない。これはこの領域ではフェルミ面効果が重要であるが、Cooper の議論と BCS 理論とで、フェルミ面近傍の粒子の扱いが完全には同じではないことに因ると考えられる。

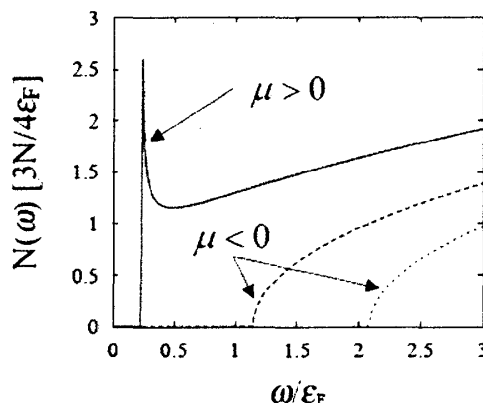


図 5 超流動状態密度。弱結合 BCS 領域 ($\mu > 0$) ではコヒーレンスピークが $\omega = \Delta$ のところに現われる。強結合 BEC 領域 ($\mu < 0$) では通常の 1 粒子状態密度の構造を反映したスペクトルになる。

4.3 フェルミ粒子系超流動の集団励起

1 粒子励起スペクトルのギャップは強結合 BEC 領域近づくにつれ非常に大きくなり、強結合 BEC 極限では無限大になる。ではこの領域では励起は存在しないのであろうか？ 当然答えは否である。フェルミ粒子系超流動には 2 種類の励起が存在し、前節で考えた 1 粒子励起以外に系全体が励起に関与する集団励起が存在する。これは、超流動ではゲージ対称性という連続対称性が自発的に破れていることに伴って現われた Goldstone モードであり（弱結合 BCS 理論では Anderson-Bogoliubov モードと呼ばれる）、長波長領域で音波的分散を有する^{*8}。このタイプのギャップレスの集団励起はボーズ粒子系超流動にも存在し Bogoliubov フォノンと呼ばれる。ボーズ粒子系超流動の場合、ボーズ原子の解離を考えない限り、フェルミ粒子系超流動のような 1 粒子励起は存在しない。すなわち、ボーズ粒子系超流動の低エネルギー励起は集団励起で尽きている。

ここまで秩序パラメータは実数としてきたが、 $|\Delta|e^{i\theta}$ のように位相をつけてもエネルギーや 1 粒子励起スペクトルなどの物理的性質は全く変わらない結果が得られる。ただ

^{*8} 金属超伝導の場合、 $T = 0$ では電子間の長距離クーロン相互作用によって、この音波的分散を有する集団励起は波数 0 でも有限のエネルギーを持つプラズマ振動となる。ただし、 T_c 近傍では熱的に励起された準粒子がクーロン相互作用を遮蔽、音波的分散を有する Goldstone mode が復活する。これは Carlson-Goldman モードと呼ばれる。

し、基底状態はこの場合、

$$|BCS(\theta)\rangle = \prod_p \left[u_p + v_p c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger e^{i\theta} \right] |0\rangle \quad (39)$$

となるので先の BCS 状態とはエネルギー的に縮退した別の状態である。こうした縮退した基底状態の候補は θ の値によって無限に存在し、そのうちのあるものが相転移に伴って実現する。ただし実現しなかった状態もエネルギー的には縮退しているので、励起エネルギー 0 でそうした状態に移ることができる。この縮退した基底状態間をつなぐ励起が Goldstone mode であり、波数 0 で励起エネルギー 0 という一般的性質を持つ。

フェルミ粒子系超流動での集団励起を求める前にボーズ粒子系超流動での Bogoliubov フォノンについて見ておく。弱く斥力相互作用するボーズ気体を考え、Hamiltonian として次のものを用いる。

$$H = \sum_q [\varepsilon_q - \mu] b_q^\dagger b_q + \frac{U}{2} \sum_{p,p',q} b_{p+q}^\dagger b_{p'-q}^\dagger b_{p'} b_p \quad (40)$$

この系の超流動状態は $\phi_m \equiv \langle b_{q=0} \rangle = \sqrt{n_c}$ で特徴付けられる (Bogoliubov 理論)。ここで n_c は condensate fraction である。この扱いでは $q \neq 0$ の状態は凝縮状態からの励起を表すことになるが、その寄与は小さいとして $b_{q \neq 0}$ について 2 次まで残す近似を行う。すると式 (40) は

$$H = E_0 + \sum_q [\varepsilon_q - \mu + 2Un_c] b_q^\dagger b_q + \frac{U}{2} \sum_p \left[b_p^\dagger b_{-p}^\dagger + h.c. \right] \quad (41)$$

ここで $E_0 = Un_c^2/2 - \mu n_c$ は基底状態のエネルギーであり、それを最適化するように化学ポテンシャルを決定する。結果は $\mu = Un_c$ であり、これを代入して式 (41) を対角化すると (この手続きも Bogoliubov 変換と呼ばれる)、定数項は除いて

$$H = \sum_q E_q^B \gamma_q^\dagger \gamma_q \quad (42)$$

γ_q はボーズ統計に従う演算子で、励起エネルギーは $E_q^B = \sqrt{\varepsilon_q [\varepsilon_q + 2Un_c]}$ となる。この励起は長波長極限で音波的分散 $E_q^B = v_\phi q$ を有し、音速は

$$v_\phi = \sqrt{\frac{Un_c}{m}} \quad (43)$$

となる。

ここでは ϕ_m を実としたが、 $|\phi_m|e^{i\theta}$ としても物理的には同じ結果が得られ、やはり基底状態と縮退した無限個の状態が存在することになる。 E_q^B はこの縮退した状態間をつなぐ励起であり、それを反映して長波長極限でギャップレスになっている。

BCS-BEC クロスオーバーを考えると、従来の弱結合 BCS 理論における Anderson-Bogoliubov モードは引力相互作用が強くなるにつれ、Bogoliubov フォノンにつながると期待される。これを確かめるために、秩序パラメータが波数 q の振動状態にあるとしてそれに対する系の応答を計算する。このような振動状態にあると、波数 q を持った対

$$\langle \phi_q^\dagger \rangle \equiv \langle c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger \rangle \quad (44)$$

及び、この複素共役な量が時間的に振動することになる。BCS モデルの平均場近似の際にこうした寄与も残すと、Haimotonian には新たな項として次のものが加わる。

$$\delta H = -U \sum_p [\langle \phi_q^\dagger \rangle c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + h.c.] \quad (45)$$

これを摂動として扱うと、つじつまがあっていれば、これにより $\langle \phi_q^\dagger \rangle$ の振動が誘起されることになり、外部から強制的に振動させなくても振動が存在できることになる（すなわち、安定な励起モードが存在する）。この条件を線形応答理論を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \phi_q(t) \rangle &= -U \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \langle \phi_q(t); \phi_q^\dagger(t') \rangle \rangle \langle \phi_q(t') \rangle - U \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \langle \phi_q(t); \phi_q(t') \rangle \rangle \langle \phi_q^\dagger(t') \rangle \\ \langle \phi_q^\dagger(t) \rangle &= -U \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \langle \phi_q^\dagger(t); \phi_q^\dagger(t') \rangle \rangle \langle \phi_q(t') \rangle - U \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \langle \phi_q^\dagger(t); \phi_q(t') \rangle \rangle \langle \phi_q^\dagger(t') \rangle \end{aligned} \quad (46)$$

ここで $\langle \langle A; B \rangle \rangle = -i\theta(t-t') \langle BCS | [A(t), B(t')] | BCS \rangle$ である。この方程式を時間に関してフーリエ変換し、 $\langle \phi_q^\dagger \rangle$ 、 $\langle \phi_q \rangle$ が有限となる条件を求めると

$$0 = \begin{vmatrix} 1 + U \langle \langle \phi_q; \phi_q^\dagger \rangle \rangle_\omega & U \langle \langle \phi_q; \phi_q \rangle \rangle_\omega \\ U \langle \langle \phi_q^\dagger; \phi_q^\dagger \rangle \rangle_\omega & 1 + U \langle \langle \phi_q^\dagger; \phi_q \rangle \rangle_\omega \end{vmatrix} \quad (47)$$

ただし、 $\langle \langle \phi_q; \phi_q^\dagger \rangle \rangle_\omega$ などは時間に関しフーリエ変換されたものである。この方程式を満たす ω が集団励起の振動エネルギーとなるが、特に音波モードの解を探すと $\omega = v_\phi q$ において

$$v_\phi = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\sum_p \frac{\Delta_p^2}{E_p^3} \varepsilon_p + \sum_p \frac{\xi_p}{2E_p^3}}{\sum_p \frac{1}{E_p^3} + \left(\sum_p \frac{\xi_p}{2E_p^3} \right)^2 / \sum_p \frac{\Delta_p^2}{E_p^3}}} \quad (48)$$

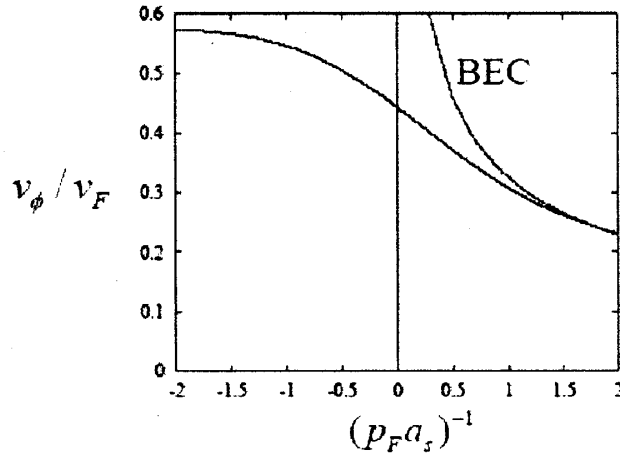


図6 フェルミ粒子系超流動の BCS-BEC クロスオーバー領域における Goldstone モードの音速の振る舞い。「BEC」は式 (49) の結果。

弱結合 BCS 領域では Anderson-Bogoliubov モードの速度、 $v_\phi = v_F/\sqrt{3}$ が得られる。強結合 BEC 領域では

$$v_\phi = \sqrt{\frac{U_B n_B}{M}}, \quad U_B = \frac{4\pi(2a_s)}{M}, \quad M = 2m, \quad n_B = \frac{n}{2} \quad (49)$$

となるが、式 (43) と比較すると、期待されたとおり、「 U_B で与えられる斥力相互作用する分子ボソンの BEC における Bogoliubov フォノン」の音速になっていることが分かる。そして、図6に示すとおり、両極限の結果は BCS-BEC クロスオーバーにおいて連続的につながる。

4.4 Feshbach 共鳴を考慮した場合：BCS モデルでフェルミ原子ガス超流動は扱えるか？

BCS モデルと Feshbach 共鳴機構のモデルである結合フェルミオンボソン (CFB) モデルとの対応関係は、前節の平均場近似を後者にも適用すると割合容易に理解することができる。ただし、式 (20) の CFB モデルにはフェルミ粒子だけでなく分子ボソンの演算子も含んでいるので、秩序パラメータとしては Δ に加え、分子ボソンの BEC を表す秩序パラメータ $\phi_m = \langle b_{q=0} \rangle$ も導入する必要がある。併せて基底状態も BCS 状態と分子ボソンの BEC 状態の積、 $e^{\phi_m b_{q=0}^\dagger} |BCS\rangle$ 、になる。

2つの秩序パラメータ (Δ , ϕ_m) は独立ではなく、平衡状態では ϕ_m が時間変化しない

($i\hbar\dot{\phi}_m = \langle [b_{q=0}, H] \rangle = 0$) ことから厳密に得られる次の関係式

$$\phi_m = -\frac{1}{2\nu - 2\mu} \frac{g}{U} \Delta \quad (50)$$

でつながっている。すなわち、一方が有限であれば必ず他方も有限となり、両者別々に相転移することはない。このことに留意して式 (20) に平均場近似を行うと（定数項は除いて）

$$H = \sum_{p,\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - \tilde{\Delta} \sum_p \left[c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger + c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \right] + \sum_{q \neq 0} \left[\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu \right] b_q^\dagger b_q \quad (51)$$

$\tilde{\Delta} = \Delta - g\phi_m$ は composite order parameter と呼ばれ、Feshbach 共鳴によるフェルミ超流動を特徴付ける秩序パラメータである。式 (50) を用いると

$$\tilde{\Delta} = \left[U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu} \right] \sum_p \langle c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \rangle \equiv U_{eff} \sum_p \langle c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \rangle \quad (52)$$

と書くことができ、Feshbach 共鳴の効果を含む有効相互作用 U_{eff} によるクーパー対形成を記述しているとみることもできる。式 (51) のフェルミ粒子部分は先と同様、Bogoliubov 変換で対角化でき、励起スペクトルとして、 $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \tilde{\Delta}^2}$ が得られる。また、composite order parameter に対するギャップ方程式は

$$1 = \left[U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu} \right] \sum_p \frac{1}{2\sqrt{\xi_p^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (53)$$

となり、やはり Feshbach 共鳴を含む有効相互作用が現われる。化学ポテンシャルを決定する粒子数の方程式は $T = 0$ の場合、熱的に励起された分子ボソンはない一方、BEC 状態にある Feshbach 分子ボソンが存在するので（分子ボソン 1 個はフェルミ原子 2 個分と数える）

$$N = 2|\phi_m|^2 + \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right] \quad (54)$$

結合定数 g が非常に大きい ($g\sqrt{n} \gg \varepsilon_F$) broad resonance の場合、有効相互作用 $U_{eff} = U + g^2/(2\nu - 2\mu)$ は threshold energy 2ν がフェルミエネルギーに比べて十分大きい領域で既に大きな値をとることができる。そうした条件を満たす範囲の強結合領域であれば、 U_{eff} 中の化学ポテンシャルは 2ν に比べて無視でき、相互作用は 2 体のそれ（に残留相互作用 $-U$ を加えたもの）に等しくなる。この場合、式 (53) は $U_{eff}^{2b} \equiv U + g^2/2\nu$ に対する 2 体の s 波散乱長

$$\frac{4\pi a_s}{m} = -\frac{U_{eff}^{2b}}{1 - U_{eff}^{2b} \sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p}} \quad (55)$$

によって紫外発散を除去することができ、方程式は式 (30) で Δ を $\bar{\Delta}$ と読み替えたものとなる。また、threshold energy 2ν が分子ボソンの最低エネルギーであることに注意すると、この値がフェルミエネルギーに比べて十分大きい場合、共鳴分子は有効相互作用の中間状態に現われるのみで、凝縮体成分としての寄与は小さいと考えられる。従って、式 (54) 中の共鳴分子 BEC からの寄与 ($2|\phi_m|^2$) は無視することができる。結果、粒子数の方程式は BCS 理論のもの (31) と同一の形になる。以上のように、broad resonance の場合、threshold energy がフェルミエネルギーに比べて大きい領域であれば、BCS モデルによってその超流動物性を扱って良い。 ^{40}K 、 ^6Li のフェルミ原子ガス超流動で用いられている Feshbach 共鳴はいずれも broad resonance であり、BCS-BEC クロスオーバー領域での BCS モデルの使用は正当化される。

これに対し、結合定数 g が小さい ($g\sqrt{n} \lesssim \varepsilon_F$) narrow resonance の場合、強結合領域は $2\nu \approx 2\mu$ あたりで実現するため、BCS-BEC クロスオーバーを考える場合に有効相互作用中の化学ポテンシャルが無視できない。化学ポテンシャルの存在はこの相互作用が「その他のたくさんの粒子」の影響を受けていることを示しており、Feshbach 共鳴による 2 体レベルの相互作用 $U_{eff}^{2b} \equiv U + g^2/2\nu$ とは形が異なっているため、式 (55) を利用して紫外発散を取り除くことはできない。また、 2ν が小さいことにより、式 (54) 中の共鳴分子の凝縮成分を無視することもできない。結果、narrow resonance の場合、BCS モデルによって議論する場合にはその妥当性について注意する必要がある^{*9}。

5 BCS-BEC クロスオーバーにおける超流動転移温度

前章では $T = 0$ における BCS 理論（ただし、秩序パラメータだけでなく、化学ポテンシャルも粒子数の方程式から計算する。）を用いて、弱結合から強結合にいたる過程での超流動の性質についてみた。ここでは超流動転移温度について考える。超流動転移温度を考えると、BCS-BEC クロスオーバーが「BCS 的な超流動転移から分子ボソンの BEC への移行」であることをより明確に知ることができる。有限温度を議論する場合、超流動揺らぎの効果が顕著になるので、絶対零度の場合に比べ扱いが複雑になる。ここでは broad resonance の場合に有効な BCS モデルを用いて議論する。（ただし、ここで説明する方法

^{*9} ただし、narrow resonance における結果が BCS モデルでの結果と全く異なるわけではない。散乱長は本来 2 体問題に対するものであるが、形式的に U_{eff} に対する散乱長 a'_s を式 (55) にならって導入し紫外発散を除去、これと式 (54) を組み合わせて解いた場合、凝縮粒子がクーパー対であるか共鳴分子ボソンであるかの詳細に依存しない問題については、BCS モデルで結果で a_s を a'_s で置き換えたものと narrow resonance の結果はよい一致を示す。

は CFB モデルに対しても有効である。)

少なくとも絶対零度では、BCS 状態や平均場近似によって弱結合から強結合領域までを議論することができた。前章の平均場近似を有限温度に拡張するには物理量の期待値を統計力学的な平均に置き換えれば良い。平均場近似での BCS Hamiltonian がフェルミ統計に従うボゴロンによって対角化されているので、 $T > 0$ では $\langle \alpha_{p\sigma}^\dagger \alpha_{p\sigma} \rangle = f(E_p)$ となることに注意すると、有限温度におけるギャップ方程式、粒子数の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_p \left[\frac{1}{2E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2} - \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \quad (56)$$

$$N = \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2} \right] \quad (57)$$

特に超流動転移温度 T_c においては $\Delta = 0$ として

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_p \left[\frac{1}{2\xi_p} \tanh \frac{\beta \xi_p}{2} - \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \quad (58)$$

$$N = \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{|\xi_p|} \tanh \frac{\beta |\xi_p|}{2} \right] = 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu) \quad (59)$$

弱結合 BCS 領域 ($(p_F a_s)^{-1} \ll -1$) の場合、 T_c は ε_F に比べ非常に小さく、その場合、粒子数の式は期待されるように $\mu = \varepsilon_F$ を与える。これをギャップ方程式に代入して T_c を求めると、

$$T_c = \frac{8\gamma}{\pi e^2} \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2p_F a_s}} = 0.61 \varepsilon_F e^{-\frac{\pi}{2p_F |a_s|}}, \quad (\gamma = 1.78) \quad (60)$$

これと絶対零度における式 (32) で求めた秩序パラメータとの比、 $2\Delta(T=0)/T_c = 3.54$ は BCS 理論の普遍定数と呼ばれ、多くの超伝導物質で実験的に確認されている。 Δ は弱結合領域での (クーパー対の解離を伴う) 1 粒子励起のギャップを与え、 2Δ はこの領域におけるクーパー対の結合エネルギーという意味を持つことから、この比が 1 のオーダーである、ということは、BCS 領域における超流動転移がクーパー対の解離によって決まっていることを示している。

一方、強結合 BEC 領域 ($(p_F a_s)^{-1} \gg +1$) では、式 (58) から

$$\mu = -\frac{1}{2ma_s^2} \quad (61)$$

が得られるが、これは $T = 0$ の超流動状態における結果 (33) と同じである。つまり、フェルミ原子 2 個の励起に $2|\mu| = 1/ma_s^2$ の励起ギャップが存在していることを意味しているが、これは前に求めた分子の結合エネルギーに一致しており、このことは T_c においても $T = 0$ の時同様、分子が解離しないままであることを表している。このような状況であると、系は強く結合した分子ボーズ気体であると考えられ、超流動転移もそうした性質を強く反映したものになると期待されるが、もう一つの方程式である式 (59) は自由フェルミ気体の粒子数方程式そのものであり、そこからボソンの性質は期待できない。

この問題は、平均場近似を越え、粒子数の方程式に対する超流動揺らぎの効果を加味することで解決できることが Nozières と Schmitt-Rink によって示された (NSR 理論)。この理論は、その後の汎関数理論による議論から、平均場近似のまわりの超流動揺らぎの効果をガウス揺らぎのレベルまで取り込んだものであることが分かっている。NSR 理論によると粒子数の方程式は次のように修正される^{*10}。

$$N = 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu) - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, i\nu_n} e^{i\delta\nu_n} \log \left[1 + \frac{4\pi a_s}{m} \left[\Pi(q, i\nu_n) - \sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \right] \quad (62)$$

(この式の導出は付録にまとめてある。変数の定義等についても付録を参照のこと。) 超流動揺らぎの効果は最終項で与えられ、 $\Pi(q, i\nu_n)$ はクーパ対の揺らぎを表す分極関数である。弱結合 BCS 領域では超流動揺らぎの効果は小さく、式 (59) に帰着するが、強結合領域に近づくにつれ、超流動揺らぎの効果が重要になってくる。式 (61) を (62) に代入すると BEC 極限 ($(p_F a_s)^{-1} \rightarrow +\infty$) で 1 項目は無視できて

$$\frac{N}{2} = \sum_q n_B\left(\frac{q}{2M}\right) \quad (63)$$

が得られるが、これは、期待された「質量 $M = 2m$ 、 $N/2$ 個の理想分子ボーズ気体の BEC の転移温度の方程式」であり、これを解くと式 (18) が得られる。

BCS-BEC クロスオーバー全域での T_c の振る舞いは式 (58)、(62) を数値的に解くことによって求まり (図 7)、それは定性的議論によって描いた図 1 と良く一致している。

^{*10} NSR 理論では式 (58) は修正を受けない。汎関数理論によるとこの方程式は分配関数についての汎関数積分を実行する際の鞍点を定める方程式から得られ、そのまわりの揺らぎをガウスレベルで取り込んだ計算から粒子数の式が得られる。

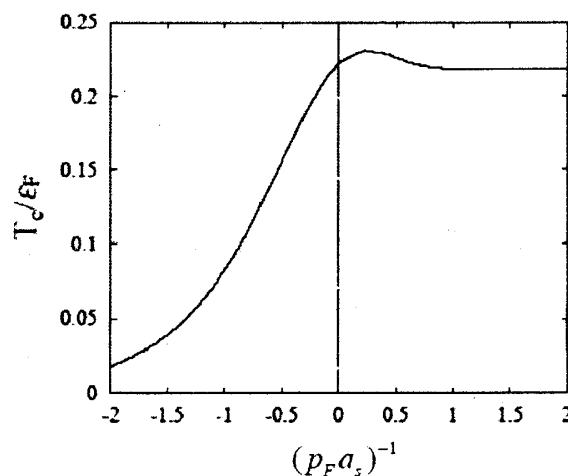


図7 BCS-BEC クロスオーバー領域における超流動転移温度の振る舞い

6 おわりに

ここでは今、注目をつめているフェルミ原子ガス超流動における BCS-BEC クロスオーバーについて、その基礎的事項を中心に説明した。実験の成功からまだ数年しか経っていない、ということもあり、この問題に対する研究は現在急速な勢いで進んでいる。また、同様の理由でこの話題に対するまとまった教科書は国内外問わず存在しない。こうした状況はこの分野の活気の表である一方、新たに興味を持ってこの分野の研究を始めようと思う人にとってはどこから始めれば良いのか分かりにくくなっているかもしれない。この講義ノートが多少なりともそうした人たちに役立てば幸いである。

付録 A 式 (62) の導出 (NRS 理論における粒子数方程式)

NSR 理論では、式 (62) は超流動揺らぎの効果を含んだ熱力学的ポテンシャル Ω を計算し、恒等式

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (64)$$

から求める。これにならって、まず Ω を計算するために、BCS モデルで運動エネルギー項を H_0 、相互作用項を H_1 として、後者に対し摂動展開を行う。 $e^{-\beta H} = e^{-\beta H_0} R(\beta)$ と

書くと、 $R(\beta)$ は

$$R(\beta) = T_\tau \left[\exp \left(- \int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right) \right], \quad H_1(\tau) = e^{\tau H_0} H_1 e^{-\tau H_0} \quad (65)$$

ここで T_τ は時間順序演算子であり、フェルミ演算子 A, B に対しては

$$T_\tau \{A(\tau_1)B(\tau_2)\} = \begin{cases} A(\tau_1)B(\tau_2) & \tau_1 \geq \tau_2 \\ -B(\tau_2)A(\tau_1) & \tau_1 < \tau_2 \end{cases} \quad (66)$$

これを用いると

$$\Omega = -T \log Z = \Omega_0 - T \log \langle R(\beta) \rangle_0 \equiv \Omega_0 + \delta\Omega \quad (67)$$

と書けるが、 $\Omega_0 = -2T \sum_p \log(1 + e^{-\beta \xi_p})$ は自由粒子の熱力学的ポテンシャル、 $\langle \dots \rangle_0$ は H_0 に対する平均を表す。式 (67) の2項目は $\delta\Omega = -T [\langle R(\beta) \rangle_c - 1]$ と書き直せることが知られている。ここで、 $\langle R(\beta) \rangle_c$ はこの部分を評価する際、それをダイアグラムで表現した場合に「つながったもののみ考慮すれば良い」ことを表す。この性質を使うと

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu} + T \frac{\partial}{\partial \mu} \langle R(\beta) \rangle_c \\ &= 2 \sum_p f(\xi_p) + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial \mu} \langle T_\tau \left(- \int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right)^n \rangle_c \equiv 2 \sum_p f(\xi_p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \delta\Omega_n}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (68)$$

残る作業は2項目の計算であるが、これは各次数の項を Wick の定理で分解して処理する。 $n=1$ の項については

$$\begin{aligned} \delta\Omega_1 &= U \sum_{p,p',q} \int_0^\beta d\tau \langle T_\tau \{ c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) c_{p'-q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) c_{p'\downarrow}(\tau) c_{p\uparrow}(\tau) \} \rangle_c \\ &= U \sum_{p,q} \int_0^\beta d\tau G_{p+q/2\uparrow}(\tau - \tau_+) G_{-p+q/2\downarrow}(\tau - \tau_+) \end{aligned} \quad (69)$$

ここで、 $\tau_+ = \tau + \delta$ は相互作用において散乱前の粒子が消えてから散乱後の粒子が現われる、という時間順序を顕に表現したものである。 $G_{p\sigma}(\tau - \tau') \equiv -\langle T_\tau \{ c_{p\sigma}(\tau) c_{p\sigma}^\dagger(\tau') \} \rangle_0$ は自由フェルミ気体における1粒子温度 Green 関数である。式 (69) は $G_{p\sigma}(\tau - \tau')$ をフェルミオン松原周波数 $\omega_n = \pi T(2n+1)$ でフーリエ変換したもの

$$G_{p\sigma}(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{p\sigma}(\tau) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p} \quad (70)$$

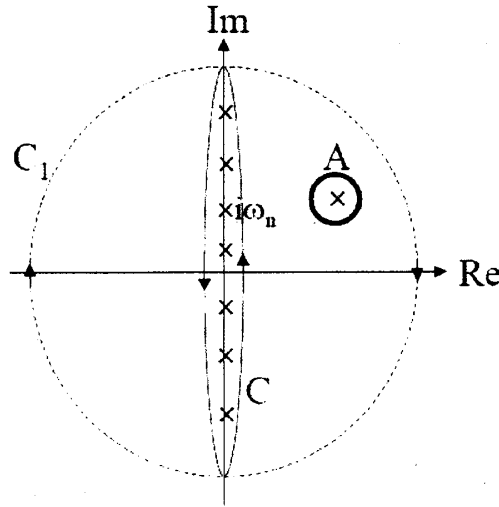


図 8 松原周波数の和を計算するための積分経路

を用いると次のように書くことができる。

$$\delta\Omega_1 = \frac{U}{\beta} \sum_{p,q,i\nu_n,i\omega_n} e^{i\nu_n\delta} G_{p+q/2\uparrow}(i\omega_n + i\nu_n) G_{-p+q/2\downarrow}(-i\omega_n) \equiv U \sum_{q,i\nu_n} e^{i\nu_n\delta} \Pi(q, i\nu_n) \quad (71)$$

$\nu_n = 2n\pi T$ はボソン松原周波数である。分極関数部分 $\Pi(q, i\nu_n)$ は松原周波数の和を計算する標準的な方法で計算することができる。図 8 にある経路 C を使って

$$\frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} F(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dz f(z) F(z) \quad (72)$$

書けることに注意し、更に、寄与のない半径無限大の経路 C_1 を加えると、虚軸上の極 $i\omega_n$ を拾う代わりに C と C_1 で囲まれた中の極 (図 8 の A) を計算すれば良いことになる。これを適用すると

$$\begin{aligned} \Pi(q, i\nu_n) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_p \int_C dz f(z) \frac{1}{z + i\nu_n - \xi_{p+q/2}} \frac{1}{-z - \xi_{-p+q/2}} \\ &= -\sum_p \frac{1 - f(\xi_{p+q/2}) - f(\xi_{-p+q/2})}{i\nu_n - \xi_{p+q/2} - \xi_{-p+q/2}} \end{aligned} \quad (73)$$

$n = 2$ についても同様に計算すると、Wick の定理によって分解したものをダイアグラムで表現するとつながったもの (図 9 (a)) とつながっていないもの (図 9 (b)) が得られるが、 $\langle \dots \rangle_c$ の規則に従って前者のみ考慮すれば良い、結果は $\delta\Omega_2 = (U^2/2) \sum_{q,i\nu_n} e^{i\nu_n\delta} \Pi(q, i\nu_n)^2$ となる。更に高次項を考えると、つながったダイアグラ

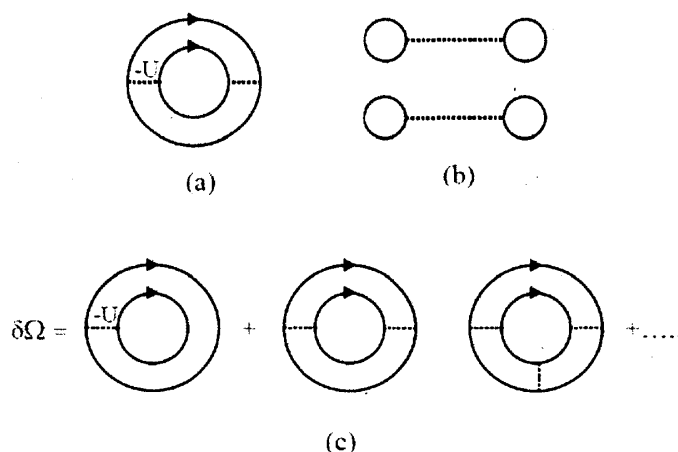


図9 (a) 2次項で現われるつながったダイアグラム。(b) 2次項で現われるつながっていないダイアグラム。(c) 高次項で残す超流動揺らぎを表すダイアグラム。

ムにも様々なタイプが現われ、それらを全て考慮することは事実上できなくなる。そこで、図9 (c) のようなタイプの寄与にのみを考慮することにする^{*11}。すると n 次の項は $\delta\Omega_n = (U^n/n) \sum_{q, i\nu_n} e^{i\nu_n\delta} \Pi(q, i\nu_n)^n$ の形にまとまり、以上を合わせて

$$\begin{aligned}
 N &= 2 \sum_p f(\xi_p) + T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, i\nu_n} e^{i\nu_n\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Pi(q, i\nu_n)^n \\
 &= 2 \sum_p f(\xi_p) - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, i\nu_n} e^{i\nu_n\delta} \log[1 - U \Pi(q, i\nu_n)]
 \end{aligned} \tag{74}$$

$\Pi(q, i\nu_n)$ は式 (73) から分かるように紫外発散しているが、これまでと同様の処理を式 (74) で行くと発散は除かれ、式 (62) が得られる。

^{*11} どのようなダイアグラムを残すべきかは問題によって異なり、そこにはダイアグラムの形状とそれが表す物理的状況に関する経験が必要になってくる。図9 (c) は2つのフェルミ粒子が引力相互作用 $-U$ でひきつけあいながら走っている状況を表しており、超流動揺らぎが強い状況では重要な効果を与える。