

直交群の多重旗多様体

Multiple flag varieties for orthogonal groups

龍谷大学・文学部 松木 敏彦

Toshihiko Matsuki

Faculty of Letters, Ryukoku University

Abstract

標数が 2 でない任意の無限体上の split 直交群の 3 重旗多様体が有限型 (軌道の数有限個) になるための必要十分条件は、奇数次のときは [M15] で与えられた。偶数次のときについての研究の中間報告をする。

Let $\mathcal{T}$ be a triple flag variety for the split orthogonal group G over an arbitrary infinite field of characteristic not two. If the degree of G is odd, then the condition on $\mathcal{T}$ for the finiteness of $|G \backslash \mathcal{T}|$ is given in [M15]. I will report my study on the even-degree case.

1 split 直交群の旗多様体

$\mathbb{F}$ を標数 $\neq 2$ の可換体とし、 $\mathbb{F}^m$ 上の対称双線形形式 $(,)$ を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i, m+1-j}$$

で定義する。ただし、 $e_1, \dots, e_m$ は $\mathbb{F}^m$ の標準基底である。このとき、 m 次 split 直交群 G が

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^m\} \\ (= \mathrm{O}_m(\mathbb{F}) \text{ と書く})$$

で定義される。 m 次 split 特殊直交群 G_0 も

$$G_0 = \{g \in G \mid \det g = 1\} \quad (= \mathrm{SO}_m(\mathbb{F}) \text{ と書く})$$

で定義できる。正の整数列 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ であって

$$a_1 + \dots + a_p \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = n$$

を満たすものによって、 G の旗多様体

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} = \{V_1 \subset \dots \subset V_p \mid \dim V_j = a_1 + \dots + a_j, (V_p, V_p) = \{0\}\} \cong G/P_{\mathbf{a}}$$

が定義される。ただし、

$$P_{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & A_p & & \\ & & & B & \\ & & & & A_p^* \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & A_1^* \end{pmatrix} \in G \mid A_i \in \mathrm{GL}_{a_i}(\mathbb{F}), B \in \mathrm{O}_{a_0}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$a_0 = m - 2(a_1 + \cdots + a_p), \quad A_i^* = J_{a_i} {}^t A_i^{-1} J_{a_i}, \quad J_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

例 1.1 (1) $m = 2$ のとき、 $\mathrm{Fl}_{(1)} = \{\mathbb{F}e_1, \mathbb{F}e_2\}$

(2) $m = 3$ のとき、

$$\mathrm{Fl}_{(1)} = \{\mathbb{F}e_1\} \sqcup \{\mathbb{F}e_3\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2 - \frac{\lambda^2}{2}e_3) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$$

特に、 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ (s 個の元からなる有限体) のとき、 $|\mathrm{Fl}_{(1)}| = s + 1$ である。

(3) $m = 4$ のとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{Fl}_{(2)} = & \{\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2\} \sqcup \{\mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_3) \oplus \mathbb{F}(e_2 - \lambda e_4) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\} \\ & \sqcup \{\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_3\} \sqcup \{\mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_4\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2) \oplus \mathbb{F}(e_3 - \lambda e_4) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\} \end{aligned}$$

特に、 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ のとき、 $|\mathrm{Fl}_{(2)}| = 2(s + 1)$ である。また、 $\mathrm{Fl}_{(1)}$, $\mathrm{Fl}_{(1,1)}$ も同様に記述でき、 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ のとき、 $|\mathrm{Fl}_{(1)}| = (s + 1)^2$, $|\mathrm{Fl}_{(1,1)}| = 2(s + 1)^2$ である。

2 3重旗多様体と4重旗多様体

3つの正整数の列 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$ で

$$a_1 + \cdots + a_p \leq n, \quad b_1 + \cdots + b_q \leq n, \quad c_1 + \cdots + c_r \leq n$$

を満たすものに対し、3重旗多様体

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$$

が定義できる。 $G = \mathrm{O}_m(\mathbb{F})$ の $\mathcal{T}$ への作用を

$$g \cdot (f_1, f_2, f_3) = (gf_1, gf_2, gf_3)$$

によって定義するとき、次の問題を考える。

問題 $|\mathbb{F}| = \infty$ とするとき、

$$|G \backslash \mathcal{T}_{a,b,c}| < \infty$$

(このとき、 $\mathcal{T}_{a,b,c}$ は有限型であるという) となるための a, b, c の条件を求めよ。

注意 2.1 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ のとき、この問題は [MWZ99], [MWZ00] で解かれた。ただし、彼らは $\mathbb{F}$ を代数的閉体と仮定している。

例 2.2 $m = 3$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(1),(1),(1)}$ のとき、 $|G \backslash \mathcal{T}| = 5$ であり、それぞれの軌道は

$$\begin{aligned} &\{f_1 = f_2 = f_3\}, \{f_1 = f_2 \neq f_3\}, \{f_2 = f_3 \neq f_1\}, \{f_3 = f_1 \neq f_2\}, \\ &\{f_1 \neq f_2 \neq f_3 \neq f_1\} \end{aligned}$$

である。

同様にして、4重旗多様体も考えられる。

例 2.3 $m = 3$ のとき、4重旗多様体 $\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)}$ は無限型である。

証明 $f_1 = \mathbb{F}e_1$, $f_2 = \mathbb{F}e_3$, $f_3 = \mathbb{F}(e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3)$, $f_{4,\lambda} = \mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2 - \frac{\lambda^2}{2}e_3)$ ($\lambda \in \mathbb{F}^\times$) とし、

$$x_\lambda = (f_1, f_2, f_3, f_{4,\lambda})$$

とおく。このとき、 $Gx_\lambda \ni x_\mu \implies \lambda = \mu$ を示せばよい。

$g \in G$, $gx_\lambda = x_\mu$ とすると、 $gf_1 = f_1$, $gf_2 = f_2$ だから、

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{F}^\times, \varepsilon = \pm 1)$$

さらに、 $gf_3 = f_3$ であるので $a = \varepsilon$ となり、従って $g = \varepsilon I$ である。 $gf_{4,\lambda} = f_{4,\mu}$ だから $\lambda = \mu$ となる。(注意: $\mathbb{F}$ が代数的閉体のときは $\dim \mathcal{M} = 4$, $\dim G = 3$ だから、次元の比較により示せる。) $\square$

命題 2.4 ([M15] Proposition 1.2) $n \geq 1$, $k \geq 4$ のとき、 $\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F})$ の k 重旗多様体は無限型である。

証明 $k = 4$, $\mathcal{M} = \text{Fl}_{(a)} \times \text{Fl}_{(b)} \times \text{Fl}_{(c)} \times \text{Fl}_{(d)}$ としてよい。 $U_{[\ell]} = \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_\ell$ とおき、

$$\begin{aligned} f_1 &= U_{[a-1]} \oplus \mathbb{F}e_n, \quad f_2 = U_{[b-1]} \oplus \mathbb{F}e_{n+2}, \\ f_3 &= U_{[c-1]} \oplus \mathbb{F}(e_n + e_{n+1} - \frac{1}{2}e_{n+2}), \\ f_{4,\lambda} &= U_{[d-1]} \oplus \mathbb{F}(e_n + \lambda e_{n+1} - \frac{\lambda^2}{2}e_{n+2}), \\ x_\lambda &= (f_1, f_2, f_3, f_{4,\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbb{F}^\times) \end{aligned}$$

とおくとき、

$$Gx_\lambda \ni x_\mu \implies \lambda = \mu$$

が示せる。 □

3 奇数次のとき

$\mathcal{T}_{a,b,c} = \text{Fl}_a \times \text{Fl}_b \times \text{Fl}_c$ の成分の入れ換えにより、 $p \leq q \leq r$ と仮定してよい。

補題 3.1 ([M15] Corollary 2.6) $m = 5$ のとき、 $\mathcal{T}_{(2),(1,1),(1,1)}$ および $\mathcal{T}_{(1),(1,1),(1,1)}$ は無限型である。

系 3.2 ([M15] Proposition 1.3) $\mathcal{T}_{a,b,c}$ が有限型 $\implies p = q = 1$

以下、 $p = q = 1$ とする。さらに、

$r = 1$ のとき、 $a_1 \leq b_1 \leq c_1$

$r \geq 2$ のとき、 $a_1 \leq b_1$

と仮定してよい。

補題 3.3 $m = 4$, $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ (例えば $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$) のとき、 $\mathcal{T}_{(1),(1),(1)}$ は無限型である。

証明 $f_1 = \mathbb{F}e_1$, $f_2 = \mathbb{F}e_4$, $f_{3,\lambda} = \mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2 + e_3 - \lambda e_4)$, $x_\lambda = (f_1, f_2, f_{3,\lambda})$ ($\lambda \in \mathbb{F}^\times$) とおくとき、

$$Gx_\lambda \ni x_\mu \implies \mu \in \lambda(\mathbb{F}^\times)^2$$

が示せる。 □

系 3.4 ([M15] Proposition 1.4) $\max(a_1, b_1, c_1) < n$, $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty \implies \mathcal{T}_{a,b,c}$ は無限型

従って、次の条件

$$(C) \quad \max(a_1, b_1, c_1) < n \implies |\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| < \infty$$

を仮定してよい。

以上の条件の下で、

定理 3.5 ([M15] Theorem 1.6) $\mathcal{T}_{a,b,c}$ が有限型であるための必要十分条件は、 a, b, c が次の (I),(II),(III),(IV) のいずれかを満たすことである。

$$\begin{array}{ll} (I) \ a_1 = b_1 = n & (II) \ a_1 = 1 \\ (III) \ r = 1, \ c_1 = n & (IV) \ r = 2, \ b_1 = n \end{array}$$

注意 3.6 (1) 条件 (C) が影響するのは (II) 型のみである。

(2) (I) 型と (II) 型は c について無条件である。従って、特に $c = (1^n) = (1, \dots, 1)$ の場合 ($\iff \text{Fl}_c$ は full flag variety $\iff P_c = B$ はボレル部分群) も有限型である。

$\mathcal{T}_{a,b,c}$ の G -軌道分解と 2 重旗多様体 $\mathcal{D} = \text{Fl}_a \times \text{Fl}_b$ の P_c -軌道分解は自然に 1 対 1 に対応するが、[L94] と [S03] において、任意の単純リー群 G に対して、開 B -軌道を持つ 2 重旗多様体が分類されている ([L94] は P_a, P_b が極大の場合)。さらに、 $\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、 $\mathcal{D}$ が開 B -軌道を持つならば $|B \backslash \mathcal{D}| < \infty$ である ([B86],[V86])。

(3) (I) 型の軌道分解は [M13] を参照。

(4) (III) 型の軌道分解の例については [M14] を参照。

4 偶数次のとき (中間報告)

まだ研究中であるが、無限型を除外するために、次の 3 つの補題が使える。

補題 4.1 ((i), (ii) は [M15] Corollary 2.10, Corollary 2.13) $m = 6$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

$$(i) \ \mathcal{T}_{(2),(2),(2)} \quad (ii) \ \mathcal{T}_{(2),(2),(1,2)} \quad (iii) \ \mathcal{T}_{(2),(1,2),(1,2)} \quad (iv) \ \mathcal{T}_{(1,2),(1,2),(1,2)}$$

補題 4.2 $m = 8$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

$$\begin{array}{llll} (i) \ \mathcal{T}_{(4),(2,2),(2,2)} & (ii) \ \mathcal{T}_{(4),(2,2),(2,1)} & (iii) \ \mathcal{T}_{(4),(2,2),(1,2)} \\ (iv) \ \mathcal{T}_{(4),(2,1),(2,1)} & (v) \ \mathcal{T}_{(4),(2,1),(1,2)} & (vi) \ \mathcal{T}_{(4),(1,2),(1,2)} \end{array}$$

補題 4.3 $m = 12$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

$$(i) \ \mathcal{T}_{(6),(4),(2,2,2)} \quad (ii) \ \mathcal{T}_{(6),(4),(2,2,1)} \quad (iii) \ \mathcal{T}_{(6),(4),(2,1,2)} \quad (iv) \ \mathcal{T}_{(6),(4),(1,2,2)}$$

$\mathbf{c} = (1^n)$ のとき、Stembridge の分類 ([S03]) により、 $\mathcal{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$ が有限型になるのは次の (I) または (II) の場合である。

(I) $\mathbf{a} = (1)$, $\mathbf{b} = (i, n-i)$ ($\mathbf{b} = (i)$ も OK)

(II) $\mathbf{a} = (n)$,

$$\mathbf{b} = \begin{cases} (1, 1) & ((1), (2) \text{ も OK}) \\ (3) \\ (n-1, 1) & ((n-1), (n) \text{ も OK}) \\ (1, n-1) \end{cases}$$

注意：(I) 型は $\mathbb{F}$ に関する前節の条件 (C) を仮定する必要があるが、(II) 型は無条件である。

References

- [B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.
- [L94] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Alg. **166** (1994), 142–157.
- [MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.
- [MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.
- [M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.
- [M14] 松木敏彦, 奇数次直交群の有限型多重旗多様体, 数理解析研究所講究録 (表現論と調和解析の新たな進展) **1925** (2014), 78–93.
- [M15] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : Odd degree case*, J. Alg. **425** (2015), 450–523.
- [S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.
- [V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.