

Kummer 理論の関数体での analogy

愛知教育大 岡田章三 (Shozo Okada)

$k = \mathbb{F}_q(t)$, $A = \mathbb{F}_q[t]$ とし, ∞ を t の pole となる素点とする。 k_∞ を k の ∞ で の完備化とし, Ω を k_∞ の代数閉包の完備化とする。

1. まず Carlitz [1], Hayes [8] に従って, Ω に Elliptic A -module と呼ばれる次のような A -module の構造を導入する。

$$u \in \Omega \text{ に対して } u^t = u^q + tu$$

$$u^\alpha = \alpha u \quad \alpha \in \mathbb{F}_q^\times$$

により t と $\mathbb{F}_q^\times$ の作用を定義するとそれらは互いに可換だから自然な作用の積と値の和によって A のすべての元が Ω に作用し Ω は A -module となる。この作用を多項式を使って $u^M = p_M(u)$ とかく。つまり例えば $M = \alpha_d t^d + \dots + \alpha_0$ とすると

$$p_M(u) = \alpha_d u^{q^d} + \dots + M u \in A[u]$$

となる。

次に Ω から Ω への解析関数 $e_L(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^{q^k}}{D_k}$,
 ここで $D_0 = 1$, $D_k = (x^{q^k} - x) D_{k-1}^{q^k}$, を考える。すると $\exists \alpha \in \Omega$ を使って $L = \alpha A$ と書くことができる一種の Lattice によって,

$$e_L(z) = z \prod'_{\alpha \in L} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

と書くことができる

$$e_L(Mz) = P_M(e_L(z)) \quad \text{for } \forall M \in A$$

を満たす。これは関数体における一種の“虚数乗法”とみることができる。

2. A の ζ -関数 $\zeta(s) = \sum_{\substack{a \in A \\ a: \text{monic}}} a^{-s}$ については

i) (Goss [6]) k が負の整数なら $\zeta(k) \in A$ であり, Bernoulli 数のように帰納的に求めることができる。即ち,

$$\zeta(-i) = 1 - \sum_{\substack{f=0 \\ (q-1) \mid (i-f)}}^{i-1} \binom{i}{f} x^f \zeta(-f)$$

となる。特に, $(q-1) \mid k$ ならば $\zeta(k) = 0$ 。

ii) (Caritz [2]) k が正の整数なら

$$\zeta(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } (q-1) \nmid k \\ \frac{B_k}{1-k} \alpha^k & \text{if } (q-1) \mid k \end{cases}$$

ここで $\Gamma_k = \prod_{\lambda} D_{\lambda}^{a_{\lambda}}$ if $k = \sum_{\lambda} a_{\lambda} q^{\lambda}$,

$$\frac{z}{c_L(z)} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{\Gamma_k} z^k.$$

が成り立つ。ζ-関数の他にもΓ-関数, Gauss 和, Gross-Koblitz の定理, Brummer-Stark 予想などが研究, 証明されている。

3. "円分体" の "類数" 公式 (Galovich-Rosen [4])

$M \in A$ に対して, M -分点を $\Delta_M = \{\lambda \in \Omega \mid \rho_M(\lambda) = 0\}$ と置いて, k の " M -分体" を $K_M = k(\Delta_M)$ とする。すると古典的な代数体の円分体と同様に

- K_M/k はアーベル拡大で
- その Galois 群 G は $(A/(M))^{\times}$ に同型である。

$$\begin{array}{ccc} G & \simeq & (A/(M))^{\times} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \sigma_a & \longleftrightarrow & a \bmod M \end{array}$$

ここで σ_a は $\lambda \mapsto \lambda^a = \rho_a(\lambda)$ for $\lambda \in \Delta_M$ ということ成り立つ。

$K_M^+ = K_M \cap k_{\infty}$ と置くと, これは最大 "実" 部分体に相当する。即ち, ∞ は K_M^+/k で完全分解し, K_M/K_M^+ で完全分岐する。

今 $h(K)$ を体 K の degree 0 の divisor の類の数

$$\begin{array}{ccc}
 K_M & \xrightarrow{\quad} & \{1\} \\
 | & & | \\
 K_M^+ & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}_q^x \\
 | & & | \\
 k & \xrightarrow{\quad} & (A/M)^x
 \end{array}$$

を表わすとする。又、
 相対類数 h_- を定義す
 るために、 A の M を法
 とする Dirichlet 指標
 χ について、

$$\begin{cases}
 \chi \text{ が even} \iff \chi(\mathbb{F}_q^x) = 1 \\
 \chi \text{ が odd} \iff \chi(\mathbb{F}_q^x) \neq 1
 \end{cases}$$

と定義する。そして h_- を

$$h_- = \prod_{\chi: \text{odd a:monic}} \sum \chi(a)$$

と置くと、次が成り立つ。

(Galovich-Rosen)

$$h(K_M) = h_- h(K_M^+), \quad h(\mathcal{O}_{K_M}) = h_- h(\mathcal{O}_{K_M}^+)$$

ここで $h(\mathcal{O}_{K_M})$, $h(\mathcal{O}_{K_M}^+)$ はそれぞれ K_M, K_M^+
 の A 上の整閉 (integral closure) $\mathcal{O}_{K_M}, \mathcal{O}_{K_M}^+$ の
 類数を表わす。

さらに、 E を $\mathcal{O}_{K_M}$ の (従って $\mathcal{O}_{K_M}^+$ の) 単数群, $\mathcal{E}$ を
 円単数群, 即ち $\mathbb{F}_q^x$ と $\lambda \frac{\sigma_a}{\lambda} = \rho_a(\lambda) \lambda$ たちで生成される
 E の部分群とする。このとき、やはり古典の場合と
 同様に、(Galovich-Rosen) $M = p^m$ (素巾) のとき

$$h(\mathcal{O}_{K_M}^+) = [E : \mathcal{E}]$$

が成り立つ。

4. 古典的 Kummer 理論について

Kummer は Kummer criterion, 即ち h を p -分体の類数とすると

$$p|h \iff p|B_n \text{ for } 1 \leq \exists n \leq p-1, \\ n \text{ は偶数,}$$

を証明するのに h を相対類数 h_- と最大実部分体の類数 h_+ に分けて,

$$p|h_+ \Rightarrow p|B_n \text{ for } 1 \leq \exists n \leq p-1, \\ n \text{ は偶数,}$$

という命題を示した。それは以下のような方法による。

まず p -分体の単数群 E と円単数群 $\mathcal{E}$ を Galois 群の作用によって各偶指標 χ の固有空間 $E_\chi, \mathcal{E}_\chi$ にそれぞれ形式的に分解する。すると $h_+ = [E : \mathcal{E}]$ であるから,

$$p|h_+ \Rightarrow p|[E_\chi : \mathcal{E}_\chi] \text{ for } \exists \chi; \text{ even.}$$

$\mathcal{E}_\chi$ は形式上 $(\zeta-1)^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma}$, ただし $\sum$ は Galois 群の上をわたる, によって生成されるから

$$p|[E_\chi : \mathcal{E}_\chi] \Rightarrow (\zeta-1)^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma} = \varepsilon^p \text{ for } \exists \varepsilon \in E.$$

次に p -分体の $\mathcal{P}=(\zeta-1)$ での完備化の単数群 $\mathcal{U}$ につ

いて, 写像 $\varphi_n: U \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($n=1, 2, \dots, p-2$) を次のように定義する。 $\forall u \in U$ に対して $u = f(\zeta-1)$ とする $f(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ を選び,

$$\varphi_n(u) = \left(\frac{d}{dz} \right)^n \log f(e^z - 1) \Big|_{z=0} \pmod{p}$$

と定義する。すると φ_n は f の取り方によらずに定まり, 準同型写像となる。この写像を ε_χ の生成元に施して

$$\begin{aligned} \varphi_n((\zeta-1)^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma}) &= \sum_a \bar{\chi}(\sigma_a) a^n \frac{B_n}{n} \\ &\equiv \begin{cases} -\frac{B_n}{n} \pmod{p} & \text{if } \chi = \omega^n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \end{aligned}$$

ここで σ_a は $\zeta \mapsto \zeta^a$ なる Galois 群の元, ω はいわゆる Teichmüller 指標である。 φ_n は準同型写像であるから $\varphi_n(\varepsilon^p) = p \varphi_n(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$ となる。結局,

$$p \mid [E_\chi: E_\chi], \chi = \omega^n \Rightarrow p \mid B_n.$$

これを用いて前述の命題が示される。

5. 有理関数体での Kummer theory の analogy

P を A の既約多項式, $K = K_P$ を k の P -分体, $K^+ = K_P^+$ をその最大 "実" 部分体とし, $k_+ = k(\mathcal{O}_{K^+})$ とする。又, p を k の標数, 従って ℓ は p の中とする。

以下は Kummer の方法に従って次の定理を証明する。

定理 E, ε を K の単数群, Γ 単数群とすると

$$p \mid h, \text{ 即ち } p \mid [E:\varepsilon] \Rightarrow p \mid B_n \text{ for } 1 \leq n \leq \frac{q^d-2}{(q-1)n}$$

ここで d は P の degree。

まず古典の場合と同様に E, ε をそれぞれの Galois 群の作用によって固有空間に分解する。各偶指標 χ に対して, それぞれの固有空間を E_χ, ε_χ とする。

λ を P -分点 λ_P のうち 0 でない元として, 固定しておく。すると ε_χ の生成元を $\lambda^{\sum \chi(\sigma)\sigma}$ とすることができる。

$\mathfrak{P}=(\lambda)$ が P の上にある K での素 ideal で, $\mathfrak{P}$ は $K/\mathbb{Q}$ で完全分岐する。 K の $\mathfrak{P}$ での完備化の単数群 U の上に Kummer の写像に従って写像 $\Phi_n: U \rightarrow (A/\mathfrak{P}A)$

($n=1, 2, \dots, q^d-2$) を以下のように定める。 $u \in U$ に対して $u=f(\lambda)$ となる $f(x) \in A[[x]]$ を選び

$$\frac{\frac{d}{dz} f(e_L(z))}{f(e_L(z))} = \frac{f'(e_L(z))}{f(e_L(z))} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma_n} z^n$$

と展開されたとすると Goss [7] により a_n は P -integral であることが示される。この a_n を用いて,

$\Phi_n(u) = a_{n-1} \bmod P$ と定義する。すると Elliptic module の理論によつて $\rho_p(u)/u$ が λ の最小多項式であり,

$$\rho_p(u) \equiv u^{q^d} \bmod P, \quad \rho'_p(u) = P$$

であるから, Φ_n は $\bmod P$ で f の取り方によらないことがわかる。又, 対数微分であるから Φ_n は準同型写像である。そしてこの写像を ε_χ に施して,

$$\begin{aligned} \Phi_n(\lambda^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma}) &= \sum_a \bar{\chi}(\sigma_a) a^n B_n \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n} \\ &\equiv \begin{cases} -B_n \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n} \bmod P & \text{if } \chi = \omega^n \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

という結果を得る。 $\Phi_n(\varepsilon^p) = p \Phi_n(\varepsilon) = 0$ となるのも古典的場合と同じであるから,

$$p \mid [E_\chi : E_\chi], \chi = \omega^n \Rightarrow p \mid B_n$$

が導びかれる。よつて, χ が even 即ち $\chi(\pi_q^x) = 1$ となるのは $\chi = \omega^n$ とするとき $(q-1) \mid n$ となることを考慮して定理を得る。

参考文献

- [1] L. Carlitz, A class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 43.(1938), 167-182.
- [2] L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, Duke Math. J. 1.(1935), 137-168.
- [3] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Math. USSR Sb. 23.(1974), 561-592.
- [4] S. Galovich and M. Rosen, The class number of cyclotomic function fields, J. Number Theory 13.(1981), 363-375.
- [5] S. Galovich and M. Rosen, Units and Class Groups in Cyclotomic function fields, J. Number Theory 14.(1982), 156-184.
- [6] D. Goss, v -adic zeta functions, L-series and measures for function fields, Inv. Math. 55.(1979), 107-119.
- [7] D. Goss, Von Staudt for $\mathbb{F}_q[t]$, Duke Math. J. 45.(1978), 885-910.
- [8] D. Hayes, Explicit class field theory

for rational function fields, Trans.
Amer. Math. Soc. 189(1974), 77-91.

[9] D. Hayes, Explicit class field theory
in global function fields, in "Studies
in Algebra and Number Theory" (G.-C.
Rota, Ed.), Academic Press, New York,
1979.

[10] S. Lang, "Cyclotomic Fields," Springer-
Verlag, New York, 1978.