

$[0,1]$ および、その部分空間上の力学系について.

東海大 理学部 郡山 彬
松岡 洋司

1° *Expansive homeomorphism* の種々の例が. Bryant [1], Hemmingsen-Reddy [3], Jakobsen-Utz [4], O'Brien [5], O'Brien-Reddy [6], Reddy [7], Utz [9], Williams [10] 等によって得られている. これらの例の多くが, *fixed point* を持っていることに注意しておく. さて, M. Sears [8] は, Cantor set 上の, *expansive homeo.* の全体が, Homeo. 全体の空間内で, *compact-open topology* の下, *dense* であるが, *open* でない事を証明した. この小論に於て我々の目的は, Sears と同様の結果が, より単純な空間に対しても成り立つことを示すことにある. この単純な例から, 次の結果が得られることに注意しておく.

定理 M を向き付けられた PL n -多様体とし, $f: M \rightarrow M$ を, 向きを保つ, *expansive PL homeo.* かつ, $m_0 \in M$ を ^{isolated} *fixed point* に持つとする. この時, 任意の整数 $k > 0$ に対して, 次の性質を持つような homeo. $g_k: M \rightarrow M$ と近傍 $U, m_0 \in U \subset M$ が

存在する。 d を M 上の距離とすると、

$$d(g_k(x), f(x)) < \frac{1}{k} \quad (\forall x \in M) \quad \text{かつ} \quad g_k|_U = \text{id}.$$

明らかに、 g_k は expansive ではない。

2. 空間 J 上の expansive homeomorphisms.

2.1. 定義 $X=(X, d)$ を、距離 d を持つ距離空間とする。

homeo. $f: X \rightarrow X$ が次の条件を満たすとき、expansive homeo. と呼ばれる。
 $\exists$ positive const. $C = C(X, f)$ s.t. $\forall x, y \in X, x \neq y$ に対して、
 $\exists n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > C$

2.2. 記号 $f: X \rightarrow X$ を homeo. とする。 $x \in X$ に対して、

$O_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ とし、 $O_f(x)$ の cardinal 数を $\#O_f(x)$ とする。また $O_f = \{O_f(x); x \in X\}$ とし、 $\#O_f$ も上と同様に定義する。

$J = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n=1, 2, \dots\}$, $\forall x, y \in J$ に対し $d(x, y) = |x - y|$ とおく。 J 上の homeo. 全体の集合を $\mathcal{H}$ とし、 $\mathcal{H}$ の位相は、

compact-open topology とする。 $\mathcal{H}$ 内の expansive homeo. 全体を $\mathcal{E}$ とする。

2.3. 補題 map $f: J \rightarrow J$ が homeo. とする必要十分条件は、

f が 1 対 1, onto map で、かつ、 $f(0) = 0$ なることである。

2.4. 補題 $f \in \mathcal{H}$ かつ $\#O(f) < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{E}$

(証明) $\#O(f) = n+1 < +\infty$ と仮定する。

(2)

n 個の点 $x_1, \dots, x_n \in J$ が存在し、 $0 < x_1 < \dots < x_n$ かつ、

$O(f) = \{0, O_f(x_1), \dots, O_f(x_n)\}$ となる。点 x_0 を、 $0 < x_0 < x_1$ を満す、 x_1 に最も近い点とする。

$U = \{x \in J; x \geq x_0\}$ とおくと、明らかに、 $\#U < +\infty$ である。

$C' = \min\{d(x, y); x, y \in U, x \neq y\}$ とおくと、 $C' = x_1 - x_0 > 0$ 。

そこで、任意定数 C を $0 < C < C'$ となるようにとる。

さて、任意 $x \in J$ に対して、 $x \in O_f(x_k)$ となる x_k が、

$\{x_1, \dots, x_n\}$ 内に存在する。従って、適当な $m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$f^m(x) = x_k$ となる。故に、異なる任意の 2 点 $x, y \in J$ に対し、

$$d(f^m(x), f^m(y)) = d(x_k, f^m(y)) \geq C' > C > 0$$

従って f は expansive homeo. である。

2.5. 補題 任意の $n \geq 2$ に対して、 $\#O(f) = n$ なる $f \in \mathcal{E}$ がある。

(証明) f_1 を、次の様な homeo. とする。

$$\begin{cases} f_1(0) = 0, & f_1\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 1), & f_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ f_1\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^{k+3}} \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

明らかに、 $O(f_1) = \{0, O_{f_1}(1)\}$, i.e. $\#O(f_1) = 2$ 。

$n \geq 2$ に対しては、 $f_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} f_1^{n-1} = f_1 \circ f_1 \circ \dots \circ f_1$ とおく。

$f_{n-1} \in \mathcal{H}$ かつ $\#O(f_{n-1}) = n$ となり、2.4. 補題から、 $f_{n-1} \in \mathcal{E}$ 。

2.6. 補題 $f \in \mathcal{H}$ かつ $\#O(f) = +\infty$ ならば $f \notin \mathcal{E}$ 。

(証明) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、 $B(0; \varepsilon)$ を、 0 の J に於ける ε -近傍とする。このとき、 $n < +\infty$ が存在し、

$J-B(0; \varepsilon) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする。 $\#O(f) = +\infty$ より、

$O(f) = \{O_f(x_1), \dots, O_f(x_n)\} \neq \emptyset$. 従って、 $J - \bigcup_{i=1}^n O_f(x_i)$ 内に相異なる 2 点 x, y をとることができる。

$x, y \notin O_f(x_i) \quad (i=1, \dots, n)$ より、 $f^k(x), f^k(y) \in B(0; \varepsilon) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

従って、 $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon$ for all $k \in \mathbb{Z}$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意であったから、 f は expansive である。

2.7. 定理 $f \in \mathcal{H}$ とする。

$$f \in \Sigma \iff \#O(f) < +\infty$$

(証明) 2.4. および 2.6. 補題から明らか。

ここで、次の様な、興味ある例が存在することに注意しておく。

2.8. 補題 次の性質を満たす homeo. $f_\infty \in \mathcal{H}$ が存在する。

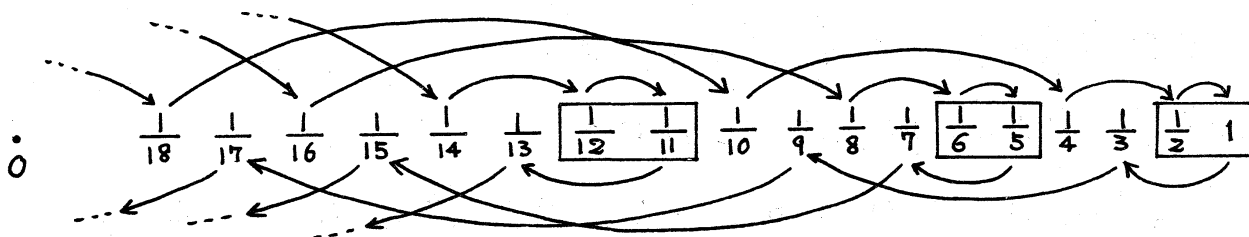
(f_∞ の fixed point は 0 のみ。かつ、
 $\#O(f_\infty) = +\infty$)

(証明) $x_1 = 1$, $x_k = x_{k-1} + 2^{-k}$ (for $k \geq 2$) とおく。

$f_\infty: J \rightarrow J$ を、以下の様に定義する。(図参照)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\infty(0) = 0, \quad \text{各 } k \geq 1 \text{ に対して,} \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+j} - 2^{-k+1}}\right) = \frac{1}{x_{k+j-1} - 2^{-k+1}} \quad (j \geq 2), \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+1} - 2^{-k+1}}\right) = \frac{1}{x_k + 1}, \quad f_\infty\left(\frac{1}{x_k + 1}\right) = \frac{1}{x_k}, \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{x_{k+1} - 2^{-k}}, \quad f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+j} - 2^{-k}}\right) = \frac{1}{x_{k+j+1} - 2^{-k}} \quad (j \geq 1) \end{array} \right.$$

(4)



2.9. 定理 Σ は $\mathcal{H}$ で "open" ではない。

(証明) $\forall f \in \Sigma$ および $\forall R \geq 1$ に対して、 $g_R \in \mathcal{H}$ を、以下の様に定義する。

$\frac{1}{R} \leq x \leq 1$ を満たす各 $x \in J$ に対して、 $O_f(x)$ を考え、 $O_f(x)$ の様子に応じて、 g_R を作る。

(場合(i)) $O_f(x) \subset [\frac{1}{R}, 1]$

この場合は、 $g_R(x) = f(x)$ とおく。

(場合(ii)) $O_f(x) \not\subset [\frac{1}{R}, 1]$

次の条件を満たす2点 y, z が存在する。 $y, z \in O_f(x)$ で、

($y \in [\frac{1}{R}, 1]$ かつ $y' = f(y) \notin [\frac{1}{R}, 1]$,
 $z \notin [\frac{1}{R}, 1]$ かつ $f(z) \in [\frac{1}{R}, 1]$)

そこで、

$$\begin{cases} g_R(w) = f(w) & (\text{for } w \in O_f(x) \cap [\frac{1}{R}, 1]) \\ g_R(z) = f(z) \\ g_R(y') = z \end{cases}$$

とおく。

(場合(Ⅲ)) 上の2つの場合で使用されなかった各 $w \in [0, \frac{1}{k}]$

に対しては、 $g_k(w) = w$ とおく。

以上の様に定義すると、 $\# \mathcal{O}(g_k) = +\infty$ となり、 $g_k \neq \Sigma$ 。

一方、 $d(f, g_k) \leq \frac{1}{k}$ である。 k は任意であったから、

f は、expansive であるならば homeo. である。いくらでも近く、近似することができ。

2.10. 定理 Σ は $\mathcal{H}$ に於て、dense である。

(証明) $\forall g \in \mathcal{H}$ および $\forall k \geq 1$ に対して、

$[\frac{1}{k}, 1]$ に於ては、2.9. 定理の証明中の、場合 (i), (ii) の様に、

周期軌道を作り、 $[0, \frac{1}{k})$ に於ては、2.5. 補題の homeo. f_1 を

使って、 J 上の expansive homeo. を構成すればよい。

3°. より一般的な結果について、

2.9. 定理の証明のポイントは、fixed point の十分小さな近傍上で、homeo. を id. に修正することであった。この事に注目すれば、1°. に於て述べた、より一般的な結果を得る。

証明には、次の2つの定理を必要とする。

3.1. 定理 (V.K.A.M. Guillemin [2]) M を PL n -cell 又は、

PL n -sphere とする。 M から、自分自身への、向きを保つ、

PL homeo. は、id. に PL isotopic である。

3.2. 定理 (Regular neighborhoods の一意性)

(6)

M を PL 多様体. P を M 内の compact polyhedron. N_1, N_2 を、共に P の M に於る regular nbd. とする.

この時、次の性質を満たす PL homeo. $h: M \rightarrow M$ が存在する.

$$h(N_1) = N_2, \quad h|_P = \text{id}, \quad h|_{M-K} = \text{id}.$$

(K は M 内の適当な compact set)

(1° で述べた定理の証明)

W, U_1, U_2 を、共に、 m_0 を含み、次の条件を満たす、closed PL n -cell とする.

- (i) $\text{diameter}(W) < \frac{1}{2k}$, W は m_0 以外に fixed pt. を含まない.
- (ii) $m_0 \in \text{Int } U_2 \subset U_2 \subset \text{Int } U_1 \subset U_1 \subset \text{Int } W$,
- (iii) $U_2 \subset \text{Int } f(U_1)$
- (iv) $f(U_1) \subset \text{Int } W$

そこで、 $U_2, f(U_2)$ は共に、 m_0 の regular nbd. だから、

3.2. 定理より、 $\exists$ PL homeo. $\mathcal{G}: W \rightarrow W$, $\exists$ compact nbd K of $U_2 \cup f(U_2)$ in $\text{Int } f(U_1)$ s.t.

- (i) $\mathcal{G}(f(U_2)) = U_2$
- (ii) $U_2 \cup f(U_2) \subset \text{Int } K$
- (iii) $\mathcal{G}|_{W-K} = \text{id}.$
- (iv) $\mathcal{G}(m_0) = m_0$

そこで、

(7)

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{on } M - \text{Int } W \\ \varphi \circ f & \text{on } W \end{cases}$$

とあく. f_1 は PL homeo. 7". $f_1(U_2) = U_2$, $f_1(m_0) = m_0$ 7" あり. $\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon]$ を $\text{Bd } U_2$ の $W - \text{Int } U_2$ に なる collar nbd 7". $\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \subset \text{Int } f(U_1)$ と なる もの と する.

3.1. 定理 から. $\exists$ PL homeo. $H: \text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \rightarrow \text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon]$ s.t.

$$\begin{cases} H(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon) \\ H(x, 0) = (f_1^{-1}(x), 0) \end{cases}, \text{ for all } x \in \text{Bd } U_2$$

と 7". H を $M - (\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \cup U_2)^c$ の id. map として 拡張 する.

$$g_k = \begin{cases} H \circ f_1 & \text{on } M - \text{Int } U_2 \\ \text{id.} & \text{on } U_2 \end{cases}$$

と あく.

作り 方 から. g_k は expansive 7" 7" 7". かつ.

$$d(f(x), g_k(x)) < \frac{1}{2k} \text{ for all } x \in M.$$

と なる.

REFERENCES.

- [1] B.F. BRYANT, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Monthly, 69 (1962) 386-391.
- [2] V.K.A.M. GUGENHEIM, Piecewise linear isotopy, Proc. London Math. Soc., 31 (1953) 29-53.
- [3] E. HEMMINGSEN - W. REDDY, Expansive homeomorphisms on homogeneous spaces, Fund. Math. LXIV (1969) 203-207
- [4] J.F. JAKOBSEN - W.R. UTZ, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, Proc. J. Math., 10 (1960) 1319-1321.
- [5] T. O'BRIEN, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970) 769-771
- [6] T. O'BRIEN - W. REDDY, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math., 35 (1970) 737-741.
- [7] W. REDDY, The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, Duke Math. J., 32 (1965) 627-632.
- [8] M. SEARS, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor set, Math. Systems Theory, 6 (1972) 129-132.
- [9] W.R. UTZ, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950) 769-774.

[10] R.F. WILLIAMS, A note on unstable homeomorphisms,
Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955) 308-309.