

Delicate Determinant of the matrix of
Differential operators

京都大學 數研 矢野 環

Yearning for Mr. Kawai's *voise*

§. 0 Introduction

I cannot, for my soul, remember precisely when, I first considered "determinant" as non-commutatif. It was perhaps, towards October 1970, immediately after consolidating the foundation of "non-commutative Euclidean rings", that I vaguely defined the "determinant". That definition, however, was abandoned, since it seemed strange and was unnecessary for me at that time. Long time had since elapsed, and Prof. Sato presented the definition of "determinant of matrices of pseudo-differential operators of finite order". It coincides with my former definition, but more elegantly formulated. In the following, I explain about it, and check the diversity against the "uncouth" definitions. Unfortunately, we must say that the first who defined the "det" for matrices over a skew-field is, J. Dieudonne (cf. Artin [] pour details).

In §1 we define "the determinant w.r.t. λ " axiomatically, and derive some properties. Our axioms are quite different from those of J. Dieudonne, but actually "det" coincides with

ours. In §2, we define the det. for $\mathcal{Q}^f, \mathcal{Q}_{[t]}^f(\mathcal{P}^f, \mathcal{P}_{[t]}^f)$. And the superiority of "our det." over "uncouth det." is made clear. In §3, we give some applications, especially for Cauchy-Kowalevskaja system, and refer to the canonical form of matrices over $\mathcal{Q}^f, \mathcal{P}^f$. Conjectures are listed.

I want to thank M. Sato for definition of det., and M. Yamaguchi who informed me the work of S. Mizohata.

§ 1. Definition of Determinant.

R : a ring with 1. $R^* = R - \{0\}$

$\bar{C}$: a commutative multiplicative monoid with 0.

$\bar{C} = C \cup \{0\}$ C isn't neces. multiplicatively closed.

$M_n(R)$: the total matrix algebra / R .

$GL_n(R)$: invertible matrices in $M_n(R)$.

1] Axioms.

given $\lambda: R \rightarrow \bar{C}$ unitary multiplicative map.
 $\lambda(r_1 r_2) = \lambda(r_1) \lambda(r_2)$, $\lambda(1) = 1$, $\lambda(0) = 0$, $\varepsilon \equiv \lambda(-1)$

A1. $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_n: M_n(R) \rightarrow \bar{C}$

A2. $\lambda_n(AB) = \lambda_n(A) \lambda_n(B)$

A3. $\lambda_n \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \lambda_{n_1}(A) \lambda_{n_2}(B)$ $n = n_1 + n_2$

Def. 1. If $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ exist, $\det_\lambda = \{\lambda_v\}_{v=1,2,\dots}$ is called "determinant w.r.t. λ ".

Remark: $\lambda_n(I_n) = 1$ by A1, A2.

If R has no zero divisor, λ is induced by $\lambda|_{R^*} : R^* \rightarrow C$, as is easily seen.

Theorem 1. The axioms are categorical if R can be embedded in a (skew) field. And for such R , $\det_\lambda$ exists.

Cor. 1. Theorem also holds for $R[t]$, where R is as in it.

(In fact, if k is a sfield, $k[t]$ is so called (?) "generalized Euclidean ring" and so, "common multiple condition" holds. Hence the cor.).

The proof of theorem is tedious and somniferous, so we omit it. I'm certain that Prof. Sato said that theorem 1 holds for general R .

The axioms being categorical,

Cor. 2. When $R=K$ is a sfield, J. Dieudonné's "det" coincides with ours.

2] Construction of $\det \lambda$ for $R=K$ (field).

The universal selection for λ should be the abelianizer $K^X \rightarrow K^X/[K^X, K^X]$, $\lambda(0)=0$.

$n \geq 2$. $M_n(K) \ni A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$. If A is singular, $\det A \equiv 0$.

If not, $A_i = (a_{i1}, b_i)$, $\exists \chi_i \in K$, $\sum \chi_i A_i = (1, 0, \dots, 0)$

Choose any $\chi_i \neq 0$, $C_i \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n-1}(K)$ then by definition,

$$\det A \equiv \varepsilon^{i+1} \lambda(\chi_i^{-1}) \det C_i \quad \text{This is}$$

indep of the choice of $\chi_i \neq 0$

e.g. $n=2$ $\lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda(\gamma \alpha \gamma^{-1} \delta - \delta \beta) & \gamma \neq 0 \\ \lambda(\alpha \delta) & \gamma = 0. \end{cases}$

If $\beta \neq 0$ also, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ yields

$$\det \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \lambda(\beta \delta \beta^{-1} \alpha - \beta \gamma) \quad \text{by the definition,}$$

and two expressions can change one another.

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma \alpha \gamma^{-1} \delta - \delta \beta) &= \lambda(\gamma) \lambda(\alpha) \lambda(\gamma^{-1} \delta \beta^{-1} - \alpha^{-1}) \lambda(\beta) \\ &= \lambda(\beta) \lambda(\delta \beta^{-1} - \gamma \alpha^{-1}) \lambda(\alpha) \\ &= \lambda(\beta \delta \beta^{-1} \alpha - \beta \gamma) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)$$

A_i : row vector
 a_j : column vector

Prop 1. $\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \mu A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det(a_1, \dots, a_i + \mu a_j, \dots, a_n) = \det A$
 $i \neq j$

Prop 2 $\det \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ A_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \det(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \varepsilon^{|\sigma|} \det A$
 $|\sigma| = \frac{1}{2}(1 - \text{sign } \sigma)$

Prop 3. $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & B \end{pmatrix} = \det A \det B.$

Prop 4 A is singular iff $\det A = 0$.

2 In general, A and tA are completely different in its nature. It may happen $\det A \neq 0$ and $\det {}^tA = 0$.

When $R = K$. Ax. 3 can be weakened as

Ax. 3' $\lambda_{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \end{pmatrix} = \lambda_n(A).$

3]. $R = R$ embeddable in a sfield.

$K = (R^*)^{-1}R = R(R^*)^{-1}$ is a field of quotient of R .

We define "det _{λ} " for $\tilde{\lambda}: K \rightarrow Q(C) \cup \{0\}$,

$\tilde{\lambda}_n: M_n(K) \rightarrow Q(C) \cup \{0\}$ and descend to $M_n(R)$.

The next prop. is indispensable.

Prop 5. $\tilde{\lambda}_n(M_n(R)) \subset \bar{C}. \quad (\text{Not yet! ?/!})$

$C' = \lambda(R^*) \quad Q(C')$ is an group including C' .

§.2. "det" for $\mathcal{G}^f, \mathcal{P}^f, \mathcal{G}^f[t], \mathcal{P}^f[t]$.

1) $R = \mathcal{G}^f$.

$\mathcal{G}^f$ とかくとき, 右の $\mathcal{G}^f$ の germ をとり.

$$\bar{\mathcal{G}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^f / \mathcal{G}_{n-1}^f \quad \text{すなわち,} \quad \bar{\mathcal{G}}^f = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^f / \mathcal{G}_{n-1}^f$$

でとる (cf. λ は principal symbol をとる操作).

$\mathcal{G}^f$ では 公理条件が成立する (n=1 は easy cf. T. Yano [1], 422 M. Kashiwara [2]). det が定義される.

Leray 流の det とは 5 が "1 は $A \times 1 \sim 3$ を与える", その categoricness より, Leray 流では $A \times 2$ が与えられる場合があることがわかる. 以下一致についてのべるため, Leray 流の定義を修正する.

$$P = (p_{ij}(x, D)) \quad \delta_{ij} = \text{order}(p_{ij})$$

$$N = \max_i \sum_j \delta_{ij} \quad \text{と与える} \quad \delta_{ij} \leq s_i + t_j$$

$$\sum (s_i + t_i) = N \quad \text{な} \quad \text{integers} \quad (s_i) \quad (t_j) \quad \text{がある.}$$

$$\tilde{p}_{ij}(x, D) = (p_{ij} \text{ の order } s_i + t_j \text{ の principal part})$$

$$\tilde{P}(x, D) = (\tilde{p}_{ij}) \in P \text{ の principal part を与える,}$$

$$L(x, \xi) = \det(\tilde{p}_{ij}(x, \xi)) \in \mathbb{C} \quad \text{と与える, 与える}$$

$\det(p_{ij}(x, \xi))$ の ξ に関する hom. N -次の part を与える.

$N = \text{out-order } P$ とかくことにする.
(outward order をとり)

一方我々の立場で与えた $\det_\lambda P$ の order を $\text{ess-order } P$ (essential order) と書く. $\text{ess-order} < N$ なら $L \equiv 0$ となってしまう; かつあるが,

Theorem $\text{out-order } P = \text{ess-order } P$
 $\Leftrightarrow L(x, \xi) = \det_\lambda P.$

$\text{out-order } P \gg \text{ess-order } P$ のときは, $\det(p_{ij}(x, \xi))$ の生主項, かつ最高階の次数は, $\text{ess-order } P$ より高いことも低いこともあり, もはや $\det(p_{ij}(x, \xi))$ は何の意味もない.

2) $R = \mathcal{G}^f[t]$

$\overline{\mathcal{G}^f}[t]$ の元は, Newton polygon (上に凸) をかいたときに, 各辺より下にきて(ま)よりな係数をもった t の項は 0 にする, という処理をほどこしたものを全体をみる. 与えらば, 積を $\overline{\mathcal{G}^f}[t]$ で与えた上で再び上の処理をほどこしたものを積と考えて, monoid になる. 与えらば

$$\mathbb{C} \ni t^2 + x t + \xi^2 \rightarrow t^2 + \xi^2$$

$$(t-1)(t-\xi) = t^2 - (\xi+1)t + \xi \rightarrow t^2 + \xi t + \xi$$

et. .
 λ は, $\mathcal{G}^f[t]$ の元を, まず係数の principal part を与えた上で, 上の処理をするものと解す. これは multiplication map になる.

Th. 1 の Cor. 1 より $\det$ が定数となる。特に

$\det_{\lambda}(tI - P)$ により $P(x, D)$ の characteristic polynomial が定数となる。

$\bar{C}$ のとき, Newton polygon の対角線以下に (2) の

(i.e. $a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$ で $\text{ord } a_i \leq i$)

全体の submonoid をなすものを C_K とおき, Kovalevskian polynomials と称する。このとき $(1, 1)$, $(1, 2)$ の π の, $(0, 0)$ が出てくる。以下をいふ。

$\det_{\lambda}(tI - P(x, D))$ が C_K に属すること, $\det(tI - P(x, \xi))$

が C_K に属すること, 互いに従属 (なり) ($-A$) になる。

$\det(tI - P(x, D))$ は次のように作れる。

$P \in M_n(\mathcal{O}^+)$, $K = \mathbb{Q}(\mathcal{O}^+)$, $K^n \subseteq M_n(K) - K$ bimodule とおき。適当に e_i とし, $e_i, pe_i, pe_i^2, \dots$

の $\mathcal{O}^+$ における relation を $P^{r_1} e_1 + P^{r_1-1} e_1 a_1' + \dots + P e_1 a_1^{r_1-1} + e_1 a_1^{r_1} = 0$

とし, $\{e_i\}$ が span (右 subspace として) $\mathcal{O}^+$ を

(direct summand として) $\mathcal{O}^+$ と e_i とし $e_i, pe_i, \dots$

の relation をとり, 全部すんだら

$$(t^{r_1} + t^{r_1-1} a_1' + \dots + a_1^{r_1})(t^{r_2} + t^{r_2-1} a_2' + \dots + a_2^{r_2})(t^{r_3} + \dots)$$

を λ で割ると, λ は $\mathcal{O}^+$ の素数。これは $\mathcal{O}^+$ の

行の標準化でもつかう。

§3. 行列の標準化. Cayley-Kowalevskaja system.

紙数残り少ない。つめこむ。

1) 標準化.

$K = \mathbb{Q}(\partial^2)$ とする. *char. poly* は $M_n(K)$ について
作れる. 単因子論の存在に前記がよってたが (cf. T. Yano [])
一意性が(ず)か. 多少の条件をきいて, $\begin{pmatrix} P & 1 \\ & \ddots \\ & & P \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} P & \\ & \ddots \\ & & P \end{pmatrix}$
の単因子とよぶべきものが一致して(する). (e.g. $P = \frac{d}{dx}$)

よける, *char. poly* の $\mathbb{Q}(\partial^2)$ における *inner auto* 7
いうわけであるが, ∂ は ∂^2 である. $\begin{pmatrix} D & \\ & 1-D+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & \\ & 1-D \end{pmatrix}$
などでは, いろいろある. この例は 0 階の $\partial^2 + (-1)\partial$
イも ∂ 各 ∂^2 に対して (もともとは *inner* 7 うつす) 2 に起因
しているのかも (かもしれない. (しかしともかく,

Theorem $\forall P \in M_n(K), \exists U \in GL_n(K)$

$$PU = UQ \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_\ell \end{pmatrix}$$

$$Q_i \text{ は } \begin{pmatrix} 1 & & g_{ii}^{r_i} \\ & \ddots & g_{ii} \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ の形.}$$

上で言ったように, Q は *unique* にはきかたず, $\begin{pmatrix} D^2 & \\ & 1-2D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix}$ は互いにうつたりする. したがって標準化が他にあるとはおきえないが.

2) Cauchy-Koalevskaja system.

$j, k=1, \dots, m$

$P = (p_{ij}(x, D'))$ is $\delta + 1$, order $p_{ij} \leq m_j - m_k + 1$ の

とき $D' = (D_1, \dots, D_{n-1})$ に対して $x_n = 0$ の initial data として,

$D_n - P(x, D')$ によって $C-K$ の可逆性 (7) = 217 4 (

知られている。普通、 $\det$ をとりかえて (7) 4, -43 1 = 17,

P が x_n を含んでいないとしても,

$\det(t - P(x, D'))$ が C_K 1 = λ 2 = 22, $D_n - P(x, D')$

1 = 217 $C-K$ の可逆性 (7) = 217 全 (1) (2) (3) = 22

知られている。しかし、我々の主張では $\det \lambda$ をとくは、

より注意深く注意を要する。 (証明あり)

I will not fail to prove the

Theorem.

$D_n - P(x, D')$ 1 = 217 $C-K$ の可逆性

$\Leftrightarrow \det(t - P(x, D')) \in C_K$ (at least when $P(x', D')$)

) or $\det(D_n - P(x, D'))$ を ξ_n 1 = 217 見た $j \in C_K$.

それ $\in C_K$ 17.

M. Kashiwara. 偏微分方程式の代数的研究. 東京大学出版会.

T. Yano. Analytic hyperfunction $m=1$. 数学 16-1.

証明など補足し, IT正を加えたりする時間がなくなったので, 溝畑先生の仕事に専念したことを書き加えるにとめる. 溝畑先生の, Systemに属する C-K の成立についての必要条件, 十分条件については, いずれ発表される予定である. 私の方には, 進行中.

$$1. \quad P = \begin{pmatrix} D^3 & -(1-x)D^3 \\ \frac{1}{1-x}D^3 & -D^3 \end{pmatrix} \quad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

$D_t - P(x, D)$ については, $\lambda=2$ C-K が成立していることが実例で示せる. しかし char. poly を普通に考えると,

$$p(\lambda, \xi) = \lambda^2 \quad \text{で "Kowalevskian" に当てはまる.} \quad \text{ところが}$$

$$\det(\lambda I - P(x, D)) = \lambda^2 + \frac{3}{1-x} \xi^2 \lambda \quad \text{で, 我々の意味}$$

では Kowalevskian ではない.

$$2. \quad P = \begin{pmatrix} D^2 + a_{11}D & (1-x)D^3 \\ -\frac{1}{1-x}D + c_0 & -D^2 + a_{22}D \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{3}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{p}{2} (1-x)^{1/2} \\ a_{22} &= \frac{p}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{p}{2} (1-x)^{1/2} \end{aligned}$$

$D_t - P(x, D)$ については C-K が成立するのを証明したい. (しかし)

$$p(\lambda, \xi) = \lambda^2 - \frac{2}{1-x} \xi \lambda - \frac{1}{1-x} \xi^2 + \dots \quad \text{となり,}$$

Kowalevskian に当てはまらない. 我々のやり方で IT ではないと,

$$\det(\lambda I - P(x, D)) = \lambda^2 + 0 + \varphi \xi^2 \quad \varphi \text{ is a function}$$

となり, Kowalevskian の条件に当てはまらない.