

N 体散乱とカオス—古典論と量子論*

東京大学数理科学研究科

北田 均

本稿では chaos の定義を次のようなものとする。(いわゆる deterministic chaos)
微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in X = \text{differentiable manifold with a metric,} \\ F = \text{a vector field on } X$$

で定義された dynamical system が chaotic とは次の意味で初期データに対し sensitive dependence を持つこととする。(system が安定 (stable) とは chaotic でないこととする。)

Lebesgue measure について正の測度を持つ集合 $\tilde{X} \subset X$ があって、 $\tilde{X}$ から出発した運動 $x(t)$ で、集合 $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ の閉包が compact なものはすべて $\tilde{X}$ にとどまっていて、次を満たす:

- (S) $\exists A > 0$ such that $\forall x_0 \in \tilde{X}, \forall \epsilon > 0,$
 $\exists y_0$ in an ϵ neighborhood of x_0 , such that at some positive time
the evolutions starting in x_0 and y_0 are more than A apart.

この講演を戸田幹人氏から頼まれたのち戸田氏との通信によってどのようなことについて話をすればよいかがわかってきた。その通信に対する答という形で話を進めてみたい。

戸田氏より出された問題

- (1) 古典的な漸近完全性 (asymptotic completeness) とカオスの関係
- (2) 古典的な漸近完全性と量子的な漸近完全性との関係
- (3) 量子古典対応を考えた時、古典系のカオスは量子論の漸近完全性にどういう役割を果たすか?
- (4) 量子的あるいは古典的に漸近完全性が期待できそうにない系の例
- (5) 漸近完全性の破綻の中に、カオスと関係する新しい量子現象を見つけられないか?
- (6) 物理の立場で N 体の散乱の量子論をすぐに扱うのは難しそうなので、もし漸近完全性に対応する性質が古典系にあったなら、まずそれから調べられないか?
- (7) 古典系で難しいことがどうして量子系で証明できてしまうのか?
- (8) 漸近完全性が成立しないかも知れない量子系の可能性があるのなら、その時、古典系のカオスに関する知識が役に立つのだろうか?

*基研研究集会「保存力学系のカオスにおける量子論と古典論」1992 年 10 月 30 日の講演.

答（標語的に）

(1) $\neg$ as. compl. $\Leftrightarrow$ chaotic. (大体) (ここで chaotic とは上で述べた意味)

(2) 論理的な関係がある: 「問題の設定」を平行的に行える。証明も少なくとも論理的には平行的に構成できる。ただし実際の評価のところでこの平行性は失われ、量子系では完全性が証明できるのに古典系では難しく現在でも解決されていないようである。

(3) stable (unchaotic) $\Rightarrow$ 古典量子対応が成り立つ (in a certain sense)。古典系のカオスは量子系のそれと関係しているかも知れないが現時点ではその関係は不明。

(4) pair potential が $V_{ij}(x_{ij}) = \frac{c_{ij}}{|x_{ij}|^\mu}$ with $0 < \mu \leq \sqrt{3} - 1$ のときは完全性は成り立たないかも知れない (Derezinski)。この場合古典論の chaos と量子論の関係は有り得る。

(5) as. compl. でなく as. clustering のみが成り立つときは、量子的カオスと解釈できるだろう。($t \rightarrow \pm\infty$ で系が unstable となる可能性がある。)

(6) 古典系の散乱理論の方が困難であり、かつ、古典系と量子系の dynamics が異なるため、古典系の性質を量子系の散乱の性質に移すことはできない。ただし量子系でカオスが起る可能性が残されている long-range force の場合必然的に古典軌道の解析が必要。

(7) 古典系 (Newton 力学系) では原子の安定性も成り立たない。このような理論で chaotic な現象が出てきても、それが実際の物理現象として現れるかどうかは不明。(原子の安定性を成り立たせるのは量子系の Hamiltonian が下に有界であるという事実である。この有界性は、以下で、散乱状態の定義と、完全性の証明において、量子系と古典系での根本的な違いとなって現れる。)

問題 (7) に対するもう少し具体的な理由をあげると、

理由 I: 古典系と量子系の dynamics が異なるため、古典系では波動作用素の存在証明の段階で既に chaotic phenomena のないことを仮定する必要があるようである。この意味で古典系の散乱問題の方が量子系より格段に困難に見える。

理由 II: 量子論は本質的に L^2 理論であるが古典論は pointwise な理論であるので、量子論の方が簡単。

(8) (1) の関係により、古典論では

$$\text{stable (unchaotic)} \Leftrightarrow \text{as. compl.}$$

なので '古典系では' chaotic でなければ as. compl. が得られ、chaotic なら as. compl. は成り立たない。これはあくまでも古典論での関係である。量子系では、dynamics の違いにより、chaotic な effect は $\mu > \sqrt{3} - 1$ の場合は消えてしまう。しかし $0 < \mu \leq \sqrt{3} - 1$ の場合は関係があるかもしれない。

以下古典系と量子系について平行してみよう。

1 Dynamics

Hamiltonian は古典系でも量子系でも同じで

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < k} V_{ik}(x_i - x_k) = H_0 + V, \quad x_i \in R^3 \quad (1)$$

で与えられる。ただし量子系では $p_i = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$. 系の states は以下の Hilbert space に属する[†].

$$\mathcal{H} = L^2(\Gamma), \quad \Gamma = \text{phase space} = R^{6N}, \quad \text{古典系}, \quad (2)$$

$$\mathcal{H} = L^2(R^{3N}), \quad \text{量子系}. \quad (3)$$

ここで pair potential $V_{ik}(x)$ ($x \in R^3$) に対して次の仮定を置く。

仮定. $V_{ik}(x)$ は R^3 上有界、2 回連続的微分可能で、その微分は R^3 で一様有界。さらに $V_{ik}(x) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$.

I. 古典系の dynamics は方程式

$$\frac{d\psi}{dt} = \{H, \psi\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\} \equiv L\psi \quad (4)$$

で与えられる。ただし $\{, \}$ は Poisson bracket で Liouville operator L を定義する:

$$L = L_0 + L_V, \quad (5)$$

$$L_0 = - \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (6)$$

$$L_V = \sum_{i < k} \nabla V_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \quad (7)$$

Liouville operator L の domain は $C_0^1(\Gamma)$ でありその上で L は skew-symmetric である。従って dynamics は

$$e^{Lt} \quad \text{on } L^2(\Gamma) \quad (8)$$

で与えられる。

実際に dynamics を得るには Hamilton の正準方程式

$$\frac{dz_i}{dt} = \epsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad z = (z_1, \dots, z_{6N}) = (x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) \quad (9)$$

を解く方が便利である。ただしここで $\epsilon = (\epsilon_{ik})$ は $(x_i, p_i) \rightarrow (p_i, -x_i)$ なる線形変換。

正準方程式の右辺はエネルギーが有界な任意の領域で一様 Lipschitz 連続。この系ではエネルギーは保存するので正準方程式は任意の初期値 $z_0 \in \Gamma$ に対し一意な大域解 $z(t, z_0)$ を持つ。この解 $S^t : z_0 \rightarrow z(t, z_0)$ を使うと dynamics e^{Lt} は

$$(e^{Lt}\psi)(z) = \psi(S^{-t}z) \quad (10)$$

[†]講演中、高橋陽一郎氏より、古典系で L^2 理論を使うのは不適当ではないかという主旨の指摘があった。これに対しては第一に、後にもふれるが、ここで考える L^2 space は phase space 上の L^2 space であり、従って量子論のような不確定性関係は成立せず、古典系の L^2 理論は結局 pointwise な理論であることをあげよう。第二に、物理としては何らかの定式化により何らかの意味あること (今の場合後述の古典系の unstability) が得られれば目的は達成されるのであり、理論形式の主観的好みによってその定式化の価値を云々すべきではないということを述べておきたい。

で与えられる。 K を領域 $\{z|H(z) < H(z_0) + 1\}$ の Lipschitz constant とすると評価

$$\left| \frac{dz}{dz_0} \right| \leq e^{K|t|} \quad (11)$$

がいえるので

$$\|e^{Lt}\|_{H^1(\Gamma)} \leq e^{K|t|} \|\psi\|_{H^1(\Gamma)} \quad (12)$$

がえられる。ただし $H^1(\Gamma)$ は norm

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^{6N} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\|^2 \quad (13)$$

を持つ Sobolev space.

以下 (量子系も込めて) N 体系の CM (= center of mass) を分離し、 Γ を

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 0 \quad (14)$$

を満たすようにする。この場合古典系では $\Gamma = R^{6(N-1)}$ となる。

II. 量子系では H は $\mathcal{H} = L^2(R^{3(N-1)})$ (with CM removed) 上の selfadjoint operator となる。dynamics は Schrödinger equation

$$\frac{1}{i} \frac{d\varphi}{dt} + H\varphi = 0 \quad (h/2\pi = 1 \text{ とした}) \quad (15)$$

を解いて

$$U(t) = e^{-itH} \quad (16)$$

であたえられる。

2 Bound States

Bound states は座標空間の有界性の概念と関係している。

I. 古典系.

Configuration space $\{(x_1, \dots, x_N) | \sum m_i x_i = 0\}$ のノルムを

$$N(z) = \left(\frac{1}{2} \sum m_i x_i^2 \right)^{1/2} \quad (17)$$

で定義する。このとき

$$\overline{N}(z) = \sup_{-\infty < t < \infty} N(S^t z), \quad (18)$$

$$B^n = \{z | \overline{N}(z) \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

とおく。 $N(S^t z)$ は連続なので B^n は閉集合。従って

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^n = \{z | \overline{N}(z) < \infty\} \quad (20)$$

は可測集合。Bound states は

$$\mathcal{H}^B \equiv L^2(B) \subset \mathcal{H} \quad (21)$$

の元として定義される。 $L^2(B^n)$ の元は compact bound states と呼ばれる。これらは $\mathcal{H}^B$ で dense. B, B^n は group S^t で不変なので $L^2(B), L^2(B^n)$ は e^{Lt} で不変。

II. 量子系.

φ が量子系の bound state とは任意の $\epsilon > 0$ に対しある $R > 0$ があって

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \int_{|x| \geq R} |e^{-itH} \varphi(x)|^2 dx < \epsilon \quad (22)$$

であること。つまり平均の意味で座標空間の有界領域に留まっていること。このような φ の全体を $\mathcal{H}_Q^B$ と書く。

3 Scattering States

ここから量子系と古典系の違いが現れる。今度はまず量子系から始める。

II. 量子系.

量子系の scattering states は $\mathcal{H}_Q^S \equiv \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_Q^B$ の元として定義される。これは次の条件で特徴づけられる (Ruelle)。

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{H}_Q^S &\Leftrightarrow \\ \forall R > 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{|x| \leq R} |e^{-itH} \varphi(x)|^2 dx &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

つまり φ が scattering state であるとはその時間発展が任意の有界領域を自乗平均の意味で離れていくことであり、自然な結果である。しかし量子系でのこの証明は free Hamiltonian H_0 が下に有界であること:

$$H_0 \geq 0$$

を本質的に使っている。古典論では、古典的 free Hamiltonian L_0 が下に有界でないためこれに対応する結果が得られない。また、量子系では scattering state space $\mathcal{H}_Q^S = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_Q^B$ は H の連続スペクトル空間と一致するが、古典系では L は一般に $\mathcal{H}^B$ で既に continuous spectrum を持つ。従って古典系では $\mathcal{H}^B$ の元で量子的意味では scattering state つまり continuous state に当たる物が一般に存在する。(この意味で古典系の bound state の定義は微妙である。)

量子系で H_0 が下に有界ということから、普通考えられるポテンシャル V に対しては Hamiltonian $H = H_0 + V$ が下に有界ということが出る。量子系の Hamiltonian が下に有界ということは原子ないし物質の安定性 (原子が崩壊しないこと) を保証する条件である。

以上の意味で、

古典系で Liouville operator が下に有界でないということが bound state と scattering state との区別を難しくし、散乱問題の扱いを困難にしていること

と、

古典論で原子の安定性が言えないこと

とは、関連がある。(古典論で散乱を考える意味?)

I. 古典系.

以上の理由で、古典系では散乱状態 (scattering state) の存在自体が問題となる。

多体系固有の Notation を導入する。channel α とは $\{1, \dots, N\}$ の分割 $\{C_1, \dots, C_n\}$ のことである。channel Hamiltonian H_α とは H から異なるすべての clusters C_i, C_j ($i \neq j$) 間の相互作用を落としたものである。 H_α より生成される Liouville operator を L_α とする。

X_k = coordinates of the CM of C_k ,

P_k = total momentum of the cluster C_k ,

z_k = coordinates and momenta of the particles constituting C_k (in the CM system of C_k),

$\phi \in L^2(\Gamma_\alpha)$, where Γ_α is the space of n particles with masses $M_1, \dots, M_n$ (M_k = the mass of C_k) with CM removed,

$\varphi_k \in \mathcal{H}_k^B$ = space of bound states of the system C_k . ($\phi = 1$ if $n = 1$ and $\varphi_k = 1$ if $\sharp(C_k) = 1$.)

Then we define

$$\psi_\alpha(z) = \phi(X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n) \prod_{k=1}^n \varphi_k(z_k). \quad (24)$$

ψ_α span a subspace $D_\alpha \subset \mathcal{H}$, which can be written as

$$\begin{aligned} D_\alpha &= L^2(\delta_\alpha) = L^2(\Gamma_\alpha) \otimes L^2(B_1) \otimes \dots \otimes L^2(B_n), \\ \delta_\alpha &= \Gamma_\alpha \times B_1 \times \dots \times B_n, \end{aligned} \quad (25)$$

where B_k is the bound state region in the phase space of C_k . δ_α は H_α によって生成される group S_α^t に関し不変なので、 D_α は $e^{L_\alpha t}$ によって不変。実際

$$\begin{aligned} (e^{L_\alpha t} \psi_\alpha)(z) &= \phi(X_1 - \frac{P_1}{M_1} t, \dots, X_n - \frac{P_n}{M_n} t, P_1, \dots, P_n) \prod_{k=1}^n (e^{\ell_k t} \varphi_k)(z_k) \\ &= \text{free state} \otimes \text{bound state}. \end{aligned} \quad (26)$$

ただし ℓ_k = Liouville operator describing the internal motion of C_k .

こうした上で $\psi_\alpha \in D_\alpha$ に対し scattering state $\psi_\alpha^\pm$ を $t \rightarrow \pm\infty$ のとき

$$e^{L t} \psi_\alpha^\pm \rightsquigarrow e^{L_\alpha t} \psi_\alpha = \text{free state} \otimes \text{bound state} \quad (27)$$

と漸近的に収束する元として定義する。 $\psi_\alpha^\pm$ の全体を $\mathcal{H}_\pm^S$ と書き散乱状態の空間という。この散乱状態 $\psi_\alpha^\pm$ の存在は次の極限 (波動作用素, wave operator) の存在と同値である。

$$\psi_\alpha^\pm = \Omega_\alpha^\pm \psi_\alpha \equiv \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-L t} e^{L_\alpha t} \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha \in D_\alpha. \quad (28)$$

この極限はたとえば pair potential $V_{ik}(x)$ が compact support を持てば存在する (Hunziker). 一般には次のように考える。微分積分学の基本定理により (Cook's method)

$$e^{-Lt}e^{L_\alpha t}\psi_\alpha = \psi_\alpha - \int_0^t e^{-L\tau}(L - L_\alpha)e^{L_\alpha\tau}\psi_\alpha d\tau. \quad (29)$$

ただし

$$L - L_\alpha = \sum' \nabla V_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \quad (30)$$

ここで和 $\sum'$ は channel α の相異なる二つの clusters をつなぐ pair に制限される。従って上の極限は D_α で dense な ψ_α に対し

$$\int_0^{\pm\infty} \|(L - L_\alpha)e^{L_\alpha t}\psi_\alpha\| dt < \infty \quad (31)$$

が成り立てば存在する。この評価が成り立つためには (30) の $L - L_\alpha$ の形と (26) の $e^{L_\alpha t}\psi_\alpha$ の形から、少なくとも φ_k が内部運動量 π_j に関して L^2 -sense で一回微分可能でなければならない。つまり (31) が $D_\alpha = L^2(\Gamma_\alpha) \otimes L^2(B_1) \otimes \cdots \otimes L^2(B_n)$ の dense set 上で成り立つためには、このような微分可能な ϕ と φ_k の積は D_α で dense でなければならない。従って各 k に対し $B_k - B_k^\circ$ が測度 0 でなくてはならない。大ざっぱにまとめれば

$$\text{wave operator が存在} \Rightarrow \forall k: \mu(B_k - B_k^\circ) = 0. \quad (32)$$

実際には

$$\mu(\tilde{B}_k) = 0, \quad \tilde{B}_k \equiv B_k - \bigcup_n (B_k^n)^\circ \quad (33)$$

を仮定する。そのほかに potential の decay と $e^{L_\alpha t}\varphi_j$ の $e^{L_\alpha t}$ という因子を考慮せねばならない。これらを考慮して (33) を仮定しても一般には、一部の α に対してしか scattering state $\psi_\alpha^\pm$ の存在が言えない。一応これで満足するとすれば

$$(33) \text{ の意味で } \text{stable} \Rightarrow \text{wave operator が存在}. \quad (34)$$

さて (33) の意味を考えてみると次のようになる。 $B = B_k$ と書く。 $z \in \bigcup_n (B^n)^\circ$ なら

$$\begin{aligned} &\exists n, \exists \epsilon > 0 \text{ such that} \\ &\forall z' \in B: |z' - z| < \epsilon \Rightarrow \bar{N}(z') \leq n. \end{aligned} \quad (35)$$

つまり測度 0 の集合をのぞいて bound orbits は安定であるということである。(33) の否定は $\mu(\tilde{B}) > 0$ である。 $z \in \tilde{B}$ なら

$$\begin{aligned} &\forall n > 1, \forall \epsilon > 0, \exists z' \in B \text{ such that} \\ &|z' - z| < \epsilon \text{ and } \bar{N}(z') > n \end{aligned} \quad (36)$$

である。 $n \gg \bar{N}(z)$ ととれば、(33) の否定は測度が正の集合 $\tilde{B}$ の sensitive dependence on initial conditions を意味する。つまりいま考えている古典力学系が 本稿の最初に述べた意味 で chaotic であることを意味する。

(32), (34) をまとめれば古典力学系に対して散乱状態が存在する (ほぼ) 必要十分条件はその力学系が unchaotic (stable) であることとなる。つまり

$$\text{ある } \alpha \text{ に対し波動作用素 } \Omega_{\alpha}^{\pm} \text{ が存在しない} \Leftrightarrow \text{chaotic.} \quad (37)$$

波動作用素が存在して漸近完全性が成り立たない場合を除けば (こういう場合は ‘少ない’ だろう) 答 (1) がいえる。(前述の Hunziker の例は stable な場合になる: 前述の (21) の下より

$$\psi_{\alpha} = \phi \otimes \prod_k \varphi_k \quad (\varphi_k : \text{compact bound state})$$

は D_{α} で dense. Hunziker の仮定 (potential が compact support) のもとではこのことから

$$\exists T > 0, \forall t \geq T : e^{L_{\alpha} t} \psi_{\alpha} = e^{L(t-T)} e^{L_{\alpha} T} \psi_{\alpha}$$

が出る。つまり $t \geq T$ に対して

$$e^{-Lt} e^{L_{\alpha} t} \psi_{\alpha} = e^{-LT} e^{L_{\alpha} T} \psi_{\alpha}.$$

よって $(d/dt)e^{-Lt} e^{L_{\alpha} t} \psi_{\alpha} = 0$ for $t \geq T$. つまり $t \geq T$ のとき $(L - L_{\alpha})e^{L_{\alpha} t} \psi_{\alpha} \equiv 0$. 従って φ_k は measure 0 の集合をのぞいて微分可能となる。)

次に漸近完全性を定義するために形式的直和として

$$\mathcal{H}' = \bigoplus_{\alpha} D_{\alpha} (\not\subset \mathcal{H}) \quad (38)$$

と定義する。そして $\Omega^{\pm}$ を

$$\Omega^{\pm} \Psi = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{\pm} \psi_{\alpha}, \quad \Psi = \{\psi_{\alpha}\} \in \mathcal{H}' \quad (39)$$

と定義する。 $\Omega^{\pm}$ は isometry: $\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ になり、 $\Omega_{\alpha}^{\pm}$ の range $R_{\alpha}^{\pm}$ は互いに直交することがいえる。

$$R^{\pm} = \bigoplus_{\alpha} R_{\alpha}^{\pm} \quad (40)$$

とおく。 $\Omega^{\pm*}$ は $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ なる作用素である。そこで

$$s = \Omega^{+*} \Omega^{-} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}' \quad (41)$$

とおき、S-operator (Scattering operator) と呼ぶ。 s は

$$R^{+} = R^{-} \quad (42)$$

のとき unitary となる。

s の意味: 波動作用素の存在により given $\Phi = \{\varphi_{\alpha}\} \in \mathcal{H}'$ に対し、 $\exists \psi \in R^{-}$ (i.e. $\psi = \Omega^{-} \Phi$) such that

$$e^{Lt} \psi \rightsquigarrow \sum_{\alpha} e^{L_{\alpha} t} \varphi_{\alpha} \quad (t \rightarrow -\infty). \quad (43)$$

また (42) により $\psi \in R^+$ ゆえ、 $\exists \Psi = \{\psi_\alpha\} \in \mathcal{H}'$ such that $\Psi = \Omega^{+*}\psi$, i.e.

$$e^{Lt}\psi \rightsquigarrow \sum_{\alpha} e^{L_{\alpha}t}\psi_{\alpha} \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (44)$$

従って $t \rightarrow \pm\infty$ の漸近挙動が s によって表現される: $\Psi = s\Phi$.

as. compl. とは $R^+ = R^- = \mathcal{H}$ のこと。これは漸近挙動を完全に分類する。従って、 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}^B$ と $\mathcal{H}^S = \mathcal{H}_+^S = \mathcal{H}_-^S$ との直和に分解される。しかしこれは一般には L のスペクトルによる分解とは異なる。古典論の散乱はこの意味で量子論のそれとは異なる。

もう一度量子論に戻る。

II. 量子論でも古典論に対応する問題がある。

wave operator (波動作用素) $W_{\alpha}^{\pm}$ を

$$W_{\alpha}^{\pm}\psi = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_{\alpha}} P_{\alpha}, \quad W^{\pm} = \bigoplus_{\alpha} W_{\alpha}^{\pm}, \quad S = W^{+*}W^{-} \quad (45)$$

と定義する。ただし、 P_{α} は channel α の internal Hamiltonian $H^{\alpha} = H_{\alpha} - T_{\alpha}$ (T_{α} は inter-cluster free energy) の bound state space への projection で、 $P_{\alpha} = I \otimes P_{\alpha}$ と略記した。

$W_{\alpha}^{\pm}$ の存在は I と同様

$$e^{itH} e^{-itH_{\alpha}} P_{\alpha} = P_{\alpha} + i \int_0^t e^{i\tau H} I_{\alpha} e^{-i\tau H_{\alpha}} P_{\alpha} d\tau, \quad (46)$$

$$I_{\alpha} \equiv H - H_{\alpha} = \sum_k V_{ik} \quad (47)$$

による。つまり、

$$\int_0^{\pm\infty} \|V_{ik} e^{-i\tau H_{\alpha}} P_{\alpha}\| d\tau < \infty \quad (48)$$

と評価したい。この場合は V_{ik} には微分作用素が入っていないので、stability の仮定はいらない。あるいは L^2 -norm の意味で量子系は常に stable である: $\|\varphi - \varphi'\| < \epsilon \Rightarrow \sup_t \|e^{-itH}(\varphi - \varphi')\| \leq \epsilon$. 従って L^2 の意味での安定性は trivial で意味がない。potential の decay と固有関数 (bound state) の decay を仮定すると (48) がいえて、 $W_{\alpha}^{\pm}$ の存在がいえる。

値域 $\mathcal{R}(W_{\alpha}^{\pm})$ は互いに直交する。

$$\mathcal{R}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{R}(W_{\alpha}^{\pm}) \quad (49)$$

とおくと、 S に対し I と同様の解釈ができる。

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^- = \mathcal{H} \quad (50)$$

を as. compl. という。

古典系では「波動作用素が存在 $\Leftrightarrow$ 系が stable」であった。量子系では L^2 -norm の意味では常に安定である。従ってこの意味では chaotic でない。しかし wave operator が存

在して完全であるなら系の $t \rightarrow \pm\infty$ での状態は完全に定まる。この意味で古典系・量子系とも

提唱: 力学系が安定 $\Leftrightarrow$ 漸近完全性成立

と定義してよいのではないだろうか。

この提唱に従えば問題 (4)、(5) を考えるには as. compl. を考えればよい。

Remark. (3) について: 古典論で system が stable なら、 $\Omega^\pm$ と $W^\pm$, s と S とはそれぞれ unitary, canonical transformation とできる。(measure 0 の set 上で修正することによって、canonical transformation にできる。) この意味で、つまり、unitary operator in QM $\Leftrightarrow$ canonical transformation in classical mechanics, という意味で、答 (3) がでる。

4 Asymptotic Completeness(漸近完全性)

as. compl. が成り立つとは wave operator の range による total space $\mathcal{H}$ の分解ができるということである。これは、 $t \rightarrow \pm\infty$ での系の漸近挙動が

$$\text{asymptotically free state} \otimes \text{bound state} \quad (51)$$

の形に分類できるという意味を持つ。

量子論では Hamiltonian (1) の free energy part H_0 が $H_0 \geq 0$ と下に有界であることが完全性の証明で重要な役割を果たす。古典論では L_0 は下に有界ではない。つまり dynamics の違いのため、完全性の証明も量子論と古典論では平行には行えない。実際には古典論の方が証明は一般に困難になる。これが (7) に対する答を与える。(理由 I)

またいま我々のとっている formulation では古典論も L^2 theory 化してあるので前にあげた理由の II は本質的な困難ではなくなっているように見える。しかし量子論では base Hilbert space が $\mathcal{H} = L^2(R_x^{3(N-1)})$ と configuration space 上の L^2 理論としているのに対し、古典論では base Hilbert space は $\mathcal{H} = L^2(R_z^{6(N-1)})$ と phase space 上の L^2 理論となっている。これは量子論では不確定性関係のために位置と運動量の不確定度の積が一定の限界以下にはなり得ないのに対し、古典論では誤差に下の限界がないことに対応する。つまり L^2 理論であっても古典論は結局 pointwise な理論に帰着してしまうことを意味する。これが (7) の理由 II である。

証明の詳細にはいるともものすごく大変なのであらましかけ述べる。

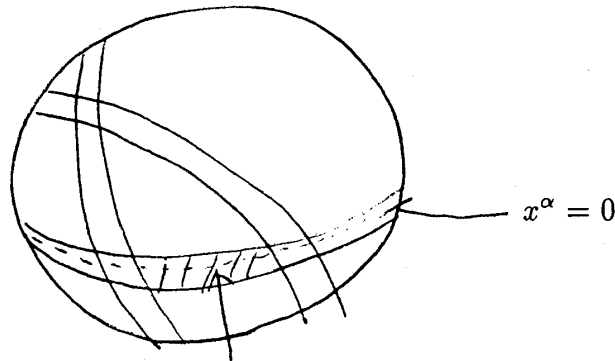
I. 古典論. pair potential $V_{ik}(x)$ の support が compact な場合に対して Hunziker が与えた証明: 時間 t が正の方向に大きくなるとき任意の compact set から離れていく state $e^{Lt}\psi$ は、漸近的に $\sum_\alpha e^{L\alpha t}\psi_\alpha$ の形に分解されることを示す。

実際には ψ のうち scattering state space $\mathcal{H}_+^S = \bigoplus_{\alpha \neq 0} R_\alpha^+$ への projection を ψ^+ とすると、 $\psi - \psi^+$ が bound state になってしまうことを示す。この証明は state e^{Lt} が potential

が利かない領域にはいると直線に沿って進むことを用いて、potential の support が compact なことが本質的に用いられている。もう一つの根拠として configuration space $R^{3(N-1)}$ の N -体系に特有な分解を用いている。(下図)

II. 量子論での証明でも configuration space $R^{3(N-1)}$ の分解が重要な役割をする。

$S^{3(N-1)-1}$



$$G: |z_\ell| \gg |x^\alpha| \approx 0: e^{-itH_\alpha}$$

この図で $|x^\alpha|$ が小さく $|z_\ell|$ ($\ell = 1, \dots, \binom{n}{2}$) が大きい部分 G では intercluster interaction が小さくなり系はほぼ $e^{-itH_\alpha}\psi$ に従って発展すると予想される。この予想は実際正しいことが H_0 が下に有界であること $H_0 \geq 0$ を用いて示される。この事実を系は asymptotically clustering であるという。領域 G が細くなるとき、対応する系の dynamics は直感的には $e^{-itH_\alpha}P_\alpha$ に従うと期待される。

実際 potential が Coulomb potential より速く減衰する場合 short-range と呼ぶが、この場合はこの asymptotic clustering から asymptotic completeness が induction によって導かれる。

Coulomb か Coulomb より遅く減衰する long-range potential の場合は、一般に古典軌道の挙動が悪くなる。つまりたとえば運動量 $p(t)$ の漸近運動量 $p(\infty)$ への収束の程度が t について積分可能でなくなる: 2 体でいえば

$$p(\infty) - p(t) = - \int_t^\infty \nabla V(x(\tau)) d\tau = O(t^{-\mu}), \quad (= O(\log t) \text{ if } \mu = 1).$$

ここで

$$V(x) = O(|x|^{-\mu}), \quad \nabla V(x) = O(|x|^{-1-\mu}), \quad 0 < \mu \leq 1$$

とした。long-range の場合、このことを考慮して、古典軌道に応じて H_α を修正してやらないと波動作用素自体の存在がいえなくなる。そしてこの修正のために short-range のときのような induction が使えなくなる。従って直接的に完全性を証明しなければならない。その証明では、上の図で $|x^\alpha| \approx 0$, $|z_\ell| \gg |x^\alpha|$ のところ G が point になる。つまり momentum 0 の粒子の運動を解析しなければならなくなる。式で書くと $x = x^\alpha$ と書いて

$$P^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* \frac{x}{t} U(t) \quad (52)$$

とおくとき、 $P^+\phi = 0$ なる state ϕ に対し、極限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_D(t)^* U(t) \phi \quad (53)$$

の存在を証明しなくてはならない。ここで $U_D(t)$ は、プランク定数が 0 に行くとき $U_D(t)$ で表される量子系が古典軌道を再現するように修正した e^{-itH_a} と思ってよい。これは上に述べた運動量 $p(t)$ の漸近運動量 $p(\infty)$ への収束の程度が t について積分可能でなくなるといった古典力学的なことを考慮しないと波動作用素が存在しないためである。こうした上で long-range の場合に対し、(53) の存在を Cook's method で証明しようとする、short-range のときは問題にならなかった channel α の internal coordinates が邪魔をするようになる。

実際には $P^+\phi = 0$ のときは任意の $c > 0$ に対し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi \left(\frac{|x|}{t} > c \right) U(t)\phi = 0 \quad (54)$$

となるが、これは次のように改良できることが Dereziński によって示された。 $1 > \mu > 0$ を potential の decay order とするとき $\delta > 2(2 + \mu)^{-1}$ なら

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi \left(\frac{|x|}{t^\delta} > c \right) U(t)\phi = 0. \quad (55)$$

Cook's method を適用するとき問題となる factor は intercluster potential を $I(x)$ とするとき

$$\begin{aligned} (I(t, x) - I(t, 0))U(t)\phi &= \int_0^1 \nabla I(t, \theta x) \cdot x d\theta U(t)\phi \\ &\sim \nabla I(t, x) \cdot x \chi \left(\frac{|x|}{t^\delta} < c \right) U(t)\phi \end{aligned} \quad (56)$$

である。ただし $I(t, x)$ は $I(x)$ を時間空間に関して適当に cut off して

$$|\nabla I(t, x)| \leq \text{const.} t^{-1-\mu} \quad (57)$$

を満たすようにしたものである。これを上の式に代入すると

$$\|(I(t, x) - I(t, 0))U(t)\phi\| \leq \text{const.} t^{-1-\mu} t^\delta \quad (58)$$

となるから

$$-(1 + \mu) + \delta < -1,$$

すなわち

$$\begin{aligned} 0 > \delta - \mu &\approx \frac{2}{\mu + 2} - \mu = -\frac{\mu^2 + 2\mu - 2}{\mu + 2}, \\ \text{i.e.} \quad \mu^2 + 2\mu - 2 &> 0. \end{aligned}$$

従って $\mu > \sqrt{3} - 1$ なら (58) は t について積分可能となり、Cook's method が完結し、波動作用素の完全性が証明される。

この $\mu > \sqrt{3} - 1$ は改善されないだろうというのが Dereziński の予想である。その理由として彼は 2 体古典的 Hamiltonian

$$h(x, p) = \frac{1}{2}p^2 - |x|^{-\mu} \quad (\forall \mu > 0, \text{ fixed}) \quad (59)$$

の運動量 0 の解は

$$x(t) = ct^{2(2+\mu)^{-1}}, \quad c \neq 0 \quad (60)$$

となることをあげている。実際 1 次元では

$$\begin{aligned} p(t) &= dx/dt = c2(2+\mu)^{-1}t^{2(2+\mu)^{-1}-1}, \\ \Rightarrow dp/dt &= c2(2+\mu)^{-1}(2(2+\mu)^{-1}-1)t^{2(2+\mu)^{-1}-2} \end{aligned}$$

であるが、これは Hamilton 方程式より出る

$$dp/dt = -\nabla(-|x(t)|^{-\mu}) = -\mu|x(t)|^{-\mu-2}x(t) = -\mu c|c|t^{-2}t^{2(2+\mu)^{-1}}$$

と、ある c に対しては一致する。 $(2(2+\mu)^{-1}-1 < 0$ だから。)

以上が完全性が成り立たないかも知れない (4) の例である。(古典論については次節でもう少し詳しく述べる。)

Remark. Dereziński の議論を拡張すると long-range case $\mu > \sqrt{3} - 1$ に対しては結局

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\chi_{\{|x^\alpha| \in [R, \infty)\}} e^{-itH} P^+ \psi\| = 0 \quad (61)$$

が成り立ち、古典系では $t^{2(2+\mu)^{-1}}$ のオーダーで増大したものが、量子系では実は本当の bound state であることが示される。これが量子系で完全性の証明ができる一つの理由である。言い替えれば次節で述べる、古典系での almost bounded solutions が、 $\mu > \sqrt{3} - 1$ の量子系では存在しないということが漸近完全性の証明が量子系でできる一つの理由である。これは量子系では確率密度だけが問題になり、波動関数の位相は絶対値をとるため問題にならないためである。実際には増大する因子が位相に繰り込まれてしまう。しかも位相因子は pointwise に収束しさえすれば波動関数は収束するからである。

以上より $0 < \mu \leq \sqrt{3} - 1$ の場合、as. compl. でなく as. clust. のみが成り立つ系が存在するということが Dereziński の予想から出るわけである。(すべての量子系は as. clust. である。) このような系に対しては上の図の領域 G の部分にある状態は $t \rightarrow \pm\infty$ ではどんどんひろがっていくが互いには重ならない。しかし量子系は確率的にしか存在しないからこれら異なる領域の間で存在が移り合うことが有り得る。この意味でも unstable であるがこの cone 領域 G 自身が広がっていくということはその中だけでも unstable でありうることを示唆している。

予想 (4)、(5) のような、完全性が成立せずカオスと関係する現象が現れ得る量子系は、

$$\text{potential の減少度が } 0 < \mu \leq \sqrt{3} - 1 \quad (62)$$

で、

$$\text{almost bounded state } \psi = P^+ \psi \text{ が存在} \quad (63)$$

して、たとえば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{t_n^{2(2+\mu)-1}} e^{-it_n H} \psi \neq 0 \quad (64)$$

のような関係が成り立つときであろう。このような量子系は量子的に chaotic な系と考えることができるだろう。これがカオスと関係する量子系 (4), (5) の可能性である。

(6)、(8) については、dynamics の違いにより、散乱でいう完全性の証明は古典力学の方が困難である。しかし逆にいえば chaotic な現象は古典系の方が解析しやすいといえよう。long-range では古典的な運動が量子系での運動に直接関係するという意味で、古典的カオスの研究から量子系のカオスがわかる可能性はある。

5 More on Classical Scattering

一般の 2 体の Hamilton 方程式あるいは Newton 方程式

$$\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t)) \quad (65)$$

の解 $x(t)$ の $t \rightarrow \infty$ での挙動は次の 3 個のタイプに分類される。ただし次の仮定をおく。

仮定 (2 体). $|\partial_x^\alpha V(x)| \leq c_\alpha (1 + |x|)^{-\mu-|\alpha|}$ for some $\mu > 0$.

この仮定のもとに $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} x(t)$ が存在することがいえる。そして解は次の 3 つの場合のいずれかを満たす。

Type I. bounded solutions: $\sup_{t>0} |x(t)| < \infty$.

Type II. almost bounded solutions: unbounded solutions with $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} x(t) = 0$.

この場合さらに $|x(t)| \leq \text{const.} t^{2(2+\mu)-1}$ が成り立つ。(この case は 2 体の場合 ‘measure’ 0 (i.e. $p(\infty) = 0$) でしか存在しない。従って 2 体では完全性が成り立つ。3 体以上では一般の potential の場合の完全性は open problem.)

Type III. scattering states: $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} x(t) \neq 0$. Then this limit equals $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ (=asymptotic velocity).

証明は 2 体の場合容易である。

多体の場合でも同様のことが成り立つ。

pair potentials $V_{ij}(x_{ij})$ は 2 体と同じうえの仮定を満たすとする。

$\alpha = \{C_1, \dots, C_k\}$ を cluster decomposition とし Z_α を

$$Z_\alpha = \{x \in X \equiv R^{3(N-1)} | x_{ij} = 0 \text{ if } i, j \in \exists C_\ell, x_{ij} \neq 0 \text{ if } i \in C_\ell, j \in C_m \text{ for } \exists \ell \neq m\} \quad (66)$$

とおく。すると

$$X = \bigcup_{\alpha} Z_{\alpha} \quad (\text{disjoint sum}). \quad (67)$$

N 体のときも $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}x(t)$ が存在することがいえる。(Dereziński) さらにこの極限が Z_α に入っていればそれは $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_\alpha(t)$ に等しいことがいえる。ただし $x_\alpha(t)$ は $H_\alpha = H^\alpha + T_\alpha$ によって生成される古典軌道。 Z_α の定義からこのとき $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}x^\alpha(t) = 0$ 。ただし $x^\alpha(t)$ は H^α による internal motion. (65) から $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}x(t) \in Z_\alpha$ によって古典軌道が完全に分類される。

さらに $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}x^\alpha(t) = 0$ のとき次がいえる。

a) $|x^\alpha(t)| < ct^{2(2+\mu)^{-1}}$.

b) If for any i, j , there exists $\theta > 0$ such that $|\nabla V_{ij}(x_{ij})| < ce^{-\theta(1+|x_{ij}|)}$, then

$$|x^\alpha(t)| < (c + \ln t). \quad (68)$$

c) If for all i, j , $V_{ij}(x_{ij})$ is of compact support, then $x^\alpha(t)$ is bounded.

Dereziński は c) より Hunziker の結果が再現されることを示した。その証明では potential の 'perturbation' に対する古典軌道の弱い意味の安定性が使われた。(これより初期値に関する弱い意味での安定性が出る。) これを用いて Dereziński は exponential decay をする potential に対して弱い意味の存在と完全性を示した。しかし上の b) の評価より、exponential decaying potentials の場合は almost bounded solution が残る可能性があり、Hunziker の結果のような強い意味の存在と完全性の証明は得られていない。

古典系と量子系の違いをまとめれば

(A) dynamics e^{Lt} と e^{-itH} の違いにより波動作用素の存在と完全性は量子系と古典系では平行に論じられない。とくに L の perturbation L_V が微分作用素を含んでいるため、古典系では強い意味の存在と完全性を得るためには、力学系の安定性を仮定する必要があるようである。

(B) さらに力学系が何らかの意味で安定 (たとえば exponentially decaying potentials のような安定性) であっても bound states, almost bounded solutions, scattering solutions の 3 種の解がありえて、存在と完全性は古典論では potential の decay に応じた弱い形でしか証明されていない。

(C) almost bounded solutions が存在すればそれが古典系の unstability or chaos の原因であろう。量子系では $\mu > \sqrt{3} - 1$ では almost bounded solution は前節の Remark のように存在しないが、これより decay の悪い場合は almost bounded solutions が量子 N 体系 ($N \geq 3$) でも存在する可能性がある。従って量子系でも chaotic な現象が起こる可能性がある。(この解析に古典論が役立つ可能性はあるだろう。) ただしこのようなポテンシャルが物理的に存在するのかわからない。

以上より conjectures を述べれば

(I) 古典系では potential が compact support でなければ一般に chaotic ないし unstable であろう。従って特に古典力学に従えば、たとえば太陽系は安定ではなくいつかは崩壊してしまうだろう。

(II) $0 < \mu \leq \sqrt{3} - 1$ のとき量子系は chaotic ないし unstable であろう。しかしこのような potential が物理的に存在するかは不問にした上での話。

(III) それでは実際に物理に chaotic な現象は存在しないのか。これに対しては、chaotic な現象を包含し得、かつ、太陽系等のある程度の時間間隔の安定性を説明し得る、古典論と量子論との統合法がある。機会があれば稿を改めて論じるだろう。

6 References

- [1] W. Hunziker, *The S-matrix in classical mechanics*, Commun. Math. Phys., 8 (1968), 282-299.
- [2] J. Dereziński, *Asymptotic completeness of long-range N-body quantum systems*, preprint (Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, U.R.A. 169 du C.N.R.S.), No.1023, 1992.
- [3] J. Dereziński, *Large time behavior of classical N-body systems*, preprint (Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, U.R.A. 169 du C.N.R.S.), No.1021, 1992.