

Semi-Sibonacci Programming

— from Sibonacci to Silver —

岩本誠一（九州大学・名誉教授）

Seichi Iwamoto

Professor emeritus, Kyushu University

木村寛（秋田県立大学 システム科学技術学部）

Yutaka Kimura

Department of Management Science and Engineering

Faculty of Systems Science and Technology

Akita Prefectural University

概 要

本報告では、セミシボナッチ制約下で2次計画の最小化問題と最大化問題の対を2つ考え、それぞれの対が互いに双対であることを示す。さらに、一方の対では Sibonacci identical duality が成り立ち、他では reversed-Silver identical duality が成り立つことを示す。特に一方の対では、主問題と双対問題の最適点がともにシボナッチ数列を成している。双対性および最適解は相加相乗平均不等式を用いて導く。本報告では8変数を対象に述べるが、一般の $2n$ 変数問題についても成り立つ。

1 2つの数列

一般に、2つの数列 フィボナッチ (Fibonacci) $\{F_n\}$ および シボナッチ (Sibonacci) $\{S_n\}$ は、共通の初期条件

$$x_1 = 1, x_0 = 0 \quad (1)$$

の下での2階線形差分方程式（3項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \quad (2)$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0 \quad (3)$$

の解としてそれぞれ定義される（表1）。シボナッチ は第2フィボナッチ (the second Fibonacci) ともよばれる。

表1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$, シボナッチ数列 $\{S_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
S_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	...

第 n フィボナッチ数は

$$F_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\phi - \bar{\phi}} \left(\bar{\phi} := 1 - \phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0.6182 \dots \right)$$

になる。ここに $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180 \dots$ は黄金数 (Golden number) である。黄金数 ϕ と共役 (conjugate) $\bar{\phi}$ は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

の解である。フィボナッチ数の相隣る比は黄金数に近づく：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

シボナッチとはフィボナッチに次ぐという意味で、白銀数 (Silver number) $\tau = 1 + \sqrt{2} = 2.4142 \dots$ に由来する。第 n シボナッチ数は

$$S_n = \frac{\tau^n - \bar{\tau}^n}{\tau - \bar{\tau}} \left(\bar{\tau} := 2 - \tau = 1 - \sqrt{2} = -0.4142 \dots \right)$$

である。白銀数 τ と共役 $\bar{\tau}$ は 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

の解である。シボナッチ数列は 2 倍速より少し速く無限大に増える。3 倍速まで行かないが、比は白銀数に近づく：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \tau.$$

2 セミシボナッチ計画

まず、8 変数の条件付き最小化問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + y_8^2 \\ & \text{subject to} \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad y_1 + 2y_2 = y_3 \\ & \text{(ii)} \quad y_3 + 2y_4 = y_5 \\ & \text{(iii)} \quad y_5 + 2y_6 = y_7 \\ & \text{(iv)} \quad y_7 + 2y_8 = c \\ & \text{(v)} \quad y \in R^8 \end{aligned} \end{aligned} \quad (P_1)$$

を考える。ただし $c \in R^1$ 。ここで (P_1) は 4 線形制約下の 8 平方和最小化問題であり、制約はシボナッチ数列の定義式の跳び跳びになっている。この制約をセミシボナッチ (semi-Sibonacci) という。セミシボナッチ制約下の数理計画をセミシボナッチ計画 (semi-Sibonacci)

programming) という。ここでは 2 次関数を目的式にしているので、このセミシボナッチ計画は 2 次計画である。(P₁) は

$$\begin{aligned} y = (y_1, y_2, \dots, y_8) &= \frac{c}{S_9}(S_1, S_2, \dots, S_8) \\ &= \frac{c}{985}(1, 2, \dots, 408) \end{aligned}$$

のとき、最小値 $m = \frac{1}{2} \frac{S_8}{S_9} c^2 = \frac{1}{2} \frac{408}{985} c^2 = \frac{204}{985} c^2$ をもつ。

他方、8 変数の条件付き最大化問題

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 + \mu_5^2 + \mu_6^2 + \mu_7^2 + \mu_8^2) + c\mu_8 \\ \text{subject to} \quad & \text{(i)'} \quad 2\mu_1 = \mu_2 \\ & \text{(ii)'} \quad \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\ \text{(D}_1\text{)} \quad & \text{(iii)'} \quad \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\ & \text{(iv)'} \quad \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8 \\ & \text{(v)'} \quad \mu \in R^8 \end{aligned}$$

を考える。これもセミシボナッチ計画であり、

$$\begin{aligned} \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) &= \frac{c}{S_9}(S_1, S_2, \dots, S_8) \\ &= \frac{c}{985}(1, 2, \dots, 408) \end{aligned}$$

のとき、最大値 $M = \frac{1}{2} \frac{S_8}{S_9} c^2 = \frac{1}{2} \frac{408}{985} c^2 = \frac{204}{985} c^2$ をもつ。

(P₁) と (D₁) の間には以下の **Sibonacci identical duality** (SID) が成り立つ：

1. (duality) (P₁) と (D₁) は互いに双対である。
2. (identical) (P₁) と (D₁) のそれぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Sibonacci) (P₁) は

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_8) = \frac{c}{S_9}(S_1, S_2, \dots, S_8) \quad (4)$$

のとき、最小値 $m = \frac{S_8}{2S_9} c^2$ をもつ。(D₁) も

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) = \frac{c}{S_9}(S_1, S_2, \dots, S_8) \quad (5)$$

のとき、最大値 $M = \frac{S_8}{2S_9} c^2$ をもつ。

ここに $S_1, S_2, \dots, S_9$ はシボナッチ数列の第 1 項から第 9 項である (表 1)。両問題の最適解 (点と値) は共にシボナッチ数列で表されている。特に、 $c = S_9$ のときは、最小点と最大点は共に

$$(S_1, S_2, \dots, S_8)$$

になり、最小値と最大値は $m = M = \frac{1}{2}S_8S_9$ になる。

次に、8 変数の条件付き最小化問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2}\tau y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_8^2 \\ & \text{subject to} \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad y_1 + 2y_2 = y_3 \\ & \text{(ii)} \quad y_3 + 2y_4 = y_5 \\ & \text{(iii)} \quad y_5 + 2y_6 = y_7 \\ & \text{(iv)} \quad y_7 + 2y_8 = c \\ & \text{(v)} \quad y \in R^8 \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{P}_2)$$

と、8 変数の条件付き最大化問題

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad -\left(\frac{1}{2}\tau\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \dots + \mu_8^2\right) + c\mu_8 \\ & \text{subject to} \quad \begin{aligned} & \text{(i)'} \quad \tau\mu_1 = \mu_2 \\ & \text{(ii)'} \quad \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\ & \text{(iii)'} \quad \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\ & \text{(iv)'} \quad \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8 \\ & \text{(v)'} \quad \mu \in R^8 \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{D}_2)$$

を考える。(P₂) と (D₂) も共にセミシボナッチ計画であり、(P₂) は

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1})$$

のとき、最小値 $m = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。(D₂) は

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1})$$

のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。

(P₂) と (D₂) はそれぞれ最小値 $m = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ と最大値 $M = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。すなわち最適値は一致している。また両問題は白銀数 τ で特徴づけられる同一最適点 (*identical optimal point*) をもつ。よって、次の **reversed-Silver identical duality** (r-SID) が成り立つ：

1. (duality) (P₂) と (D₂) は互いに双対である。
2. (identical) (P₂) と (D₂) の最適点と最適値は共に一致する。

3. (reversed-Silver) (P₂) は

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1}) \quad (6)$$

のとき、最小値 $m = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。(D₂) も

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1}) \quad (7)$$

のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。両問題の最適点は共に白銀数で表されている。

尚、最適点が共に $c(\tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots, \tau^{-8})$ のとき、Silver identical duality (SID) という。

3 不等式アプローチ

定理 1 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (8)$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (8) は相加相乗平均不等式 (arithmetic-geometric mean inequality, AG) ともよばれる。

補題 1 (Equality) $y = (y_1, y_2, \dots, y_8)$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8)$ が条件 (i) ~ (iv) と (i)' ~ (iv)'

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 \\ \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 \\ \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 \\ \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(i)'} & 2\mu_1 = \mu_2 \\ \text{(ii)'} & \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\ \text{(iii)'} & \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\ \text{(iv)'} & \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8 \end{array}$$

を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$2 \sum_{k=1}^8 y_k \mu_k = c\mu_8. \quad (9)$$

Proof. 条件 (i)~(iv) と (i)'~(iv)' をそれぞれ満たす任意の y と μ に対して

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^8 y_k \mu_k &= y_1 \mu_2 + (y_3 - y_1) \mu_2 + y_3 (\mu_4 - \mu_2) + (y_5 - y_3) \mu_4 \\ &\quad + y_5 (\mu_6 - \mu_4) + (y_7 - y_5) \mu_6 + y_7 (\mu_8 - \mu_6) + (c - y_7) \mu_8 \\ &= c\mu_8. \end{aligned}$$

□

(P₁) と (D₁) が互いに双対であることを、不等式 (8) に基づいて示す。

まず $y = (y_1, \dots, y_8) \in R^8$ を (P₁) の実行可能解、 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_8) \in R^8$ を (D₁) の実行可能解とする。すなわち、 y と μ は次を満たしている。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y_1 + 2y_2 &= y_3 & \text{(i)'} \quad 2\mu_1 &= \mu_2 \\ \text{(ii)} \quad y_3 + 2y_4 &= y_5 & \text{(ii)'} \quad \mu_2 + 2\mu_3 &= \mu_4 \\ \text{(iii)} \quad y_5 + 2y_6 &= y_7 & \text{(iii)'} \quad \mu_4 + 2\mu_5 &= \mu_6 \\ \text{(iv)} \quad y_7 + 2y_8 &= c & \text{(iv)'} \quad \mu_6 + 2\mu_7 &= \mu_8. \end{aligned}$$

ここで、AG 不等式 (8) を y_k, μ_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) として用いて、辺々加えると

$$2 \sum_{k=1}^8 y_k \mu_k \leq \sum_{k=1}^8 y_k^2 + \sum_{k=1}^8 \mu_k^2; \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8 \quad (10)$$

が得られる。補題 1 より不等式 (10) は

$$c\mu_8 \leq \sum_{k=1}^8 y_k^2 + \sum_{k=1}^8 \mu_k^2$$

になる。等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

のときのみ成立する。すなわち、(i)~(iv) を満たす y と (i)'~(iv)' を満たす μ に対して、不等式

$$-\sum_{k=1}^8 \mu_k^2 + c\mu_8 \leq \sum_{k=1}^8 y_k^2 \quad (11)$$

が成り立つ。等号は条件 (i)~(iv), (e), (i)'~(iv)' が成り立つときに限り成立する：

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y_1 + 2y_2 &= y_3 & \text{(i)'} \quad 2\mu_1 &= \mu_2 \\ \text{(ii)} \quad y_3 + 2y_4 &= y_5 & \text{(ii)'} \quad \mu_2 + 2\mu_3 &= \mu_4 \\ \text{(iii)} \quad y_5 + 2y_6 &= y_7 & \text{(iii)'} \quad \mu_4 + 2\mu_5 &= \mu_6 \\ \text{(iv)} \quad y_7 + 2y_8 &= c & \text{(iv)'} \quad \mu_6 + 2\mu_7 &= \mu_8 \\ \text{(e)} \quad y_k &= \mu_k & 1 \leq k \leq 8. \end{aligned}$$

ここに、(11) の左辺は $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_8)$ のみの関数である。したがって、(D₁) と (P₁) は互いに双対である。

因みに、左辺は (P₁) の目的 (主) 関数 (primal function) に対する双対関数 (dual function) を表わしている。

補題 2 (Sibonacci solution) 8 元 8 連立線形方程式

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)''} & 2y_1 = y_2 \\
 \text{(ii)''} & y_2 + 2y_3 = y_4 \\
 \text{(iii)''} & y_4 + 2y_5 = y_6 \\
 \text{(iv)''} & y_6 + 2y_7 = y_8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 \\
 \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 \\
 \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 \\
 \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c
 \end{array}$$

は、唯一の解をもつ：

$$y_1 = \frac{S_1}{S_9}c, \quad y_2 = \frac{S_2}{S_9}c, \quad y_3 = \frac{S_3}{S_9}c, \quad y_4 = \frac{S_4}{S_9}c, \\
 y_5 = \frac{S_5}{S_9}c, \quad y_6 = \frac{S_6}{S_9}c, \quad y_7 = \frac{S_7}{S_9}c, \quad y_8 = \frac{S_8}{S_9}c.$$

Proof. この 1 次方程式系は

$$Ay = b$$

で表される。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

ここで、行列 A は以下の逆行列を持つ：

$$A^{-1} = \frac{1}{985} \begin{pmatrix} 408 & 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 \\ -169 & 338 & 140 & 58 & 24 & 10 & 4 & 2 \\ 70 & -140 & 350 & 145 & 60 & 25 & 10 & 5 \\ -29 & 58 & -145 & 348 & 144 & 60 & 24 & 12 \\ 12 & -24 & 60 & -144 & 348 & 145 & 58 & 29 \\ -5 & 10 & -25 & 60 & -145 & 350 & 140 & 70 \\ 2 & -4 & 10 & -24 & 58 & -140 & 338 & 169 \\ -1 & 2 & -5 & 12 & -29 & 70 & -169 & 408 \end{pmatrix}.$$

よって、系は唯一の解

$$\begin{aligned} y = A^{-1}b &= \frac{c}{985} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 5, & 12, & 29, & 70, & 169, & 408 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c}{S_9} \begin{pmatrix} S_1, & S_2, & S_3, & S_4, & S_5, & S_6, & S_7, & S_8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

をもつ。

□

補題 3 (平方和)

$$\begin{aligned} \text{(Lucas)} \quad \sum_{k=1}^n F_k^2 &= F_n F_{n+1} \\ \sum_{k=1}^n S_k^2 &= \frac{1}{2} S_n S_{n+1}. \end{aligned}$$

補題 2, 3 より、次の定理が得られる。

定理 2 最小化問題 (P₁) は

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_8) = \frac{c}{S_9} (S_1, S_2, \dots, S_8) \quad (12)$$

のとき、最小値 $m = \frac{S_8}{2S_9} c^2$ をもつ。最大化問題 (D₁) も

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) = \frac{c}{S_9} (S_1, S_2, \dots, S_8) \quad (13)$$

のとき、最大値 $M = \frac{S_8}{2S_9} c^2$ をもつ。

□

最小化問題 (P₂) と最大化問題 (D₂) に対しても同様にすると、以下の補題 4, 補題 5 が成り立つ。

補題 4 (Equality) $(y_1, \dots, y_8)$ と $(\mu_1, \dots, \mu_8)$ が条件 (i)~(iv) と (i)'~(iv)'

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y_1 + 2y_2 &= y_3 & \text{(i)'} \quad \tau\mu_1 &= \mu_2 \\ \text{(ii)} \quad y_3 + 2y_4 &= y_5 & \text{(ii)'} \quad \mu_2 + 2\mu_3 &= \mu_4 \\ \text{(iii)} \quad y_5 + 2y_6 &= y_7 & \text{(iii)'} \quad \mu_4 + 2\mu_5 &= \mu_6 \\ \text{(iv)} \quad y_7 + 2y_8 &= c & \text{(iv)'} \quad \mu_6 + 2\mu_7 &= \mu_8 \end{aligned}$$

を満たすとき、次の等式が成り立つ：

$$\tau y_1 \mu_1 + 2 \sum_{k=2}^8 y_k \mu_k = c \mu_8. \quad (14)$$

補題 5 (Silver solution) 8 元 8 連立線形方程式

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)''} & \tau y_1 = y_2 \\
 \text{(ii)''} & y_2 + 2y_3 = y_4 \\
 \text{(iii)''} & y_4 + 2y_5 = y_6 \\
 \text{(iv)''} & y_6 + 2y_7 = y_8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 \\
 \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 \\
 \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 \\
 \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c
 \end{array}$$

は、唯一の解をもつ：

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \tau^{-8}c, \quad y_2 = \tau^{-7}c, \quad y_3 = \tau^{-6}c, \quad y_4 = \tau^{-5}c, \\
 y_5 &= \tau^{-4}c, \quad y_6 = \tau^{-3}c, \quad y_7 = \tau^{-2}c, \quad y_8 = \tau^{-1}c.
 \end{aligned}$$

補題 5 より次の定理が得られる。

定理 3 最小化問題 (P₂) は

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1}) \quad (15)$$

のとき、最小値 $m = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。最大化問題 (D₂) も

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8) = c(\tau^{-8}, \tau^{-7}, \dots, \tau^{-1}) \quad (16)$$

のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。

参考文献

- [1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).
- [2] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.
- [3] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.
- [4] 岩本 誠一, 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード (VI) —, 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.
- [5] 岩本 誠一, ダ・ヴィンチ・コードは最適か?, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年 9 月, pp.1–9.
- [6] 岩本誠一, 最適経路 — フィボナッチから黄金へ —, 「不確実性下における意思決定問題」, 京大数理研講究録 1734, 2011 年 3 月, pp.196–204.
- [7] 岩本 誠一, 最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization I I – Bellman Equation –), 数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

- [8] 岩本誠一・木村寛, セミフィボナッチ計画法 — 不等式によるアプローチ —, 「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」, 京大数理研講究録, 2044, 2017 年 9 月, pp.112–119.
- [9] 岩本誠一・木村寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming — Identical Duality —, 「不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開」, 京大数理研講究録, 2078, 2018 年 7 月, pp.114–120.
- [10] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 卷 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.