

2次元乱流のシミュレーションの数値

名工大・生産システム 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1.1 はじめに

3次元乱流における小さなスケールの統計についてはこれまで慣性領域及び遠散逸領域のスペクトルについて多くの研究がなされてきている。そのうち、両者を滑らかにつなぐスペクトルの形については, Batchelor(1951), Effinger and Grossman (1987), Shirovich et al.(1994) らが速度差の3次モーメントと2次モーメントをつなぐ Karman-Howarth の式と, 速度勾配の Skewness を用いて closure を行い, その近似形を求めている。それによれば, x_1 方向の速度を u とすると, その2次モーメント $S_2(x) = \langle [u(x + re_1) - u(x)]^2 \rangle$ は Kolmogorov 長さ $l_d = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$ で規格化された距離を $\bar{x} = x/l_d$ として,

$$\frac{15}{(\bar{\epsilon}\nu)^{1/2}} S_2(\bar{x}) \approx \frac{\bar{x}^2}{[1 + (\bar{x}/b)^2]^{2/3}}, \quad b^2 = \frac{S_v}{8} \frac{5}{15^{3/2}}, \quad S_v = \frac{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^3 \rangle}{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \rangle^{3/2}} \quad (1.1)$$

である。これに対応する3次元エネルギースペクトル $E(k)$ は $k \ll k_d = 1/l_d$ において $E(k) \propto k^{-5/3}$ であり, $k \gg k_d$ では $E(k) \propto \exp(-c(k/k_d))$ となることが知られている。ここで c は無次元の定数である。

2次元乱流において, エンストロフィーカスケードの慣性領域から遠散逸領域にわたる上述のエネルギースペクトルについてはこれまであまり議論されてこなかった。一つには, エンストロフィーカスケード慣性領域におけるエネルギースペクトルのべき法則についていまだ確定した結果が得られていないことにもよると思われる。遠散逸領域におけるスペクトルについては3次元乱流からの類推とスペクトル理論からの結果 (Tatsumi & Yanase 1980) があるのみで十分に検討されたとは言えないのが現状である。一方, 最近の2次元乱流の大規模 DNS によって, 慣性領域から遠散逸領域にわたるエネルギースペクトルの形が得られるようになってきた (Borue 1994, 日々野と後藤 1995, 高橋と後藤 1996)。そこで, 上記の3次元においてなされた解析を2次元乱流に応用し, DNS データとの比較を行いながら, 2つの領域をつなぐスペクトル形を検討することは重要でかつ興味のある問題である。

さらにスペクトルがべき法則の形を取ると期待される慣性領域では, エンストロフィーカスケードにともなう, スケールの減少とともに成長する間欠性の問題も興味を持たれている。この場合, r だけ離れた2点における渦度場の構造関数

$$K_{2n}(r) \equiv \langle [\omega(x+r) - \omega(x)]^{2n} \rangle \quad (1.2)$$

の r についてのスケールリングが重要である。3次元乱流では Anselmet et al.(1984) をはじめとする多くの実験 (あるいは DNS) によるスケールリング指数についての報告があるが, 2次元乱流においては, その報告はほとんど見受けられない。ここでは DNS において測定された $K_{2n}(r)$ を報告し, 併せて, 最近の Passive scalar における anomalous scaling に関する議論との関連について考察する。

1.2 エネルギースペクトル

3次元乱流の時と同様にして, 一様等方性2次元乱流のエンストロフィカスケード領域 (以下, 慣性領域と呼ぶ) における Karman-Howarth の式を導く。 $S_2(r, t)$ についての方程式を書き下すと

$$\frac{\partial S_2(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial S_{3i}(r, t)}{\partial r_i} = -4\bar{\eta} + 2\nu \nabla^2 S_2(r, t), \quad (1.3)$$

となる。ここに $\bar{\eta} = \nu \langle (\partial \omega / \partial x_1)^2 \rangle$ は単位質量あたりのエンストロフィ散逸率であり,

$$S_{3i}(r) = \langle \delta u_i(r) [\delta \omega(r)]^2 \rangle, \quad \delta u_i = u_i(x+r) - u_i(x) \quad (1.4)$$

である。スケール $|r| = r \ll L$ についてみると、乱流場は準定常的とみなせるので $\partial/\partial t = 0$ とおき、さらに等方性を仮定しているから $S_3(r)$ を任意関数として $S_{3i}(r) = S_3(r)r_i/r$ と表す。これを方程式 (1.3) に使い、 r について積分し積分定数を 0 にとって

$$S_3(r) = -2\bar{\eta}r + 2\nu \frac{dS_2(r)}{dr}, \quad (1.5)$$

を得る。 $r \gg l_d = (\nu^3/\bar{\eta})^{1/6}$ ならば粘性項は無視でき、慣性領域では

$$S_{3i}(r)r_i/r = -2\bar{\eta}r \quad (1.6)$$

となる。これは 3 次元の慣性領域における、Kolmogorov の $S_{3i}^{3D}(r)(r_i/r) = \langle \delta u_i(r)[\delta u(r)]^2 \rangle (r_i/r) = -4\bar{\epsilon}r/5$ に相当する。

次に、粘性項が無視できない r の領域でのスペクトル形を考える。便宜上、(1.5) の両辺にそれぞれ r_1/r をかけて得られる $r_1 = x$ 軸方向に射影した式を用いる、

$$S_{31}(x) = -2\bar{\eta}x + 2\nu \frac{dS_2}{dx}. \quad (1.7)$$

この閉じていない式を、十分に合理的な方法で閉じたものにする理論はまだない。しかし、 $x \ll l_d$ の場合にはある程度近似的に閉じたものにする事が出来る。すなわち、 $x \ll l_d$ の時、2 次元乱流における skewness S_ω を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_{31}(x)}{x^3} = -\frac{S_\omega}{8} \frac{\bar{\eta}}{\nu} \Omega^{1/2}, \quad (1.8)$$

と表す。ここで

$$S_\omega = -2 \frac{\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right\rangle}, \quad \Omega = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle \quad (1.9)$$

である。(1.9) を (1.7) に代入し、 x について 1 回積分して

$$F(\bar{x}) \equiv 2\bar{\eta}^{-2/3} S_2(\bar{x}) = \bar{x}^2 - \frac{S_\omega}{32} \mathcal{R}_\lambda^{1/3} \bar{x}^4, \quad \mathcal{R}_\lambda = \frac{\Omega^{3/2}}{\bar{\eta}} \quad (1.10)$$

を得る。この式は見かけ上 S_2 について閉じた格好になっているが、 $\mathcal{R}_\lambda$ を問題のパラメーターとすると $S_\omega(\mathcal{R}_\lambda)$ があらかじめ分かっているわけではないから、この分の不定性が残る。また、(1.10) は 3 次元の式 (1.1) と比べると、 $\mathcal{R}_\lambda$ に対する依存性が陽に現われている。これは 3 次元における 3 次相関 $S_{3i}^{3D}(r) = \langle \delta u_i(r)[\delta u(r)]^2 \rangle$ はすべて速度差 $\delta u(r)$ で表されているのにたいし、2 次元では速度差と渦度差の 2 乗の積として表されていることによる。

さて、(1.10) の右辺を $F(\bar{x})$ の $\bar{x}^2$ についての冪級数展開の最初の 2 項として見做して、その右辺を Páde 近似により

$$F(\bar{x}) \approx \frac{a^2 \bar{x}^2}{a^2 + \bar{x}^2}, \quad a^2 = \frac{32}{S_\omega \mathcal{R}_\lambda^{1/3}} \quad (1.11)$$

と近似する。これは $\bar{x} \ll 1$ での $F(\bar{x})$ の表現である。慣性領域においては $E(k) \propto k^{-(3+\delta)}$, ($\delta \geq 0$) であるとする、 $S_2(x) \sim \bar{\eta}^{2/3} x^\delta$ である。従って $\bar{x} \gg 1$ においては、

$$F(\bar{x}) \sim \bar{x}^\delta \quad (1.12)$$

である。漸近的境界条件 (1.11) と (1.12) を満たす $F(\bar{x})$ は

$$F(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^2}{[1 + (\bar{x}/b)^2]^{2-\delta/2}}, \quad b^2 = \frac{16(2-\delta)}{S_\omega \mathcal{R}_\lambda^{1/3}} \quad (1.13)$$

の漸近形をしている。この $F(\bar{x})$ を用いると、渦度場の 1 次元相関関数は

$$C(\bar{x}) \equiv \frac{\langle \omega(x+x)\omega(x) \rangle}{\langle \omega^2 \rangle} = 1 - \beta^2 F(\bar{x}), \quad \beta^2 = \frac{1}{8\mathcal{R}_\lambda^{2/3}} \quad (1.14)$$

で与えられる。1次元スペクトルは

$$C(\bar{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\bar{x}) e^{-i\bar{k}\bar{x}} d\bar{x},$$

$$\approx A \frac{\partial^2}{\partial \bar{k}^2} \left[\left(\frac{\bar{k}}{2b} \right)^{\sigma} K_{\sigma}(b\bar{k}) \right], \quad (1.15)$$

$$A = \frac{\beta^2}{\pi^{1/2}} \frac{b^{2-\delta}}{\Gamma(\sigma+1/2)}, \quad \bar{k} = kl_d, \quad \sigma = \frac{1-\delta}{2} \quad (1.16)$$

となる。ここで $K_{\nu}(z)$ は ν 次の変形ベッセル関数である。この1次元スペクトルから2次元乱流のエネルギースペクトル $E(k)$ は (Tsuiji 1955)

$$\bar{E}(\bar{k}) \equiv \bar{\eta}^{-2/3} E(k)$$

$$= \frac{Ab}{(2b^2)^{\sigma}} \bar{k}^{-3} \int_K^{\infty} [(z^2 + 4\sigma(\sigma-1) + 1) K_{\sigma-1}(z) - 2\sigma z K_{\sigma}(z)] \frac{z^{\sigma}}{\sqrt{z^2 - K^2}} dz, \quad K = b\bar{k} \quad (1.17)$$

と求められる。この漸近形は

$$\bar{E}(\bar{k}) \sim \frac{A}{2^{\sigma}} \bar{k}^{-(3+\delta)}, \quad \text{for } \bar{k} \ll 1,$$

$$\sim \frac{A\pi b^{2-\sigma}}{2^{1+\sigma}} \bar{k}^{\sigma-2} e^{-b\bar{k}}, \quad \text{for } \bar{k} \gg 1 \quad (1.18)$$

となる。慣性領域では確かに $-(3+\delta)$ の指数に一致し、また遠散逸領域では指数関数的に減衰することを示している。この場合の減衰率は b で与えられるので、具体的に書き下すと、

$$b_{2D} = \left(\frac{16(2-\delta)}{S_{\omega}} \right)^{1/2} \mathcal{R}_{\lambda}^{-1/6} \quad (1.19)$$

となる。大きな特長は、 b_{2D} が $\mathcal{R}_{\lambda}^{-1/6}$ の依存性を持つことである。これは、遠散逸領域といえども、そのエネルギースペクトルは巨視的なスケールに依存することを示しており、従って普遍的ではないことを示唆している。一方、3次元の場合 (Shroovich et al. 1994) には

$$b_{3D} = \left(\frac{16\sqrt{15}}{S_v} \right)^{1/2}, \quad (1.20)$$

で与えられるので、 S_v の $\mathcal{R}_{\lambda}$ に対する依存性がないとするならば、遠散逸領域のエネルギースペクトルは普遍的であると考えることが出来る。

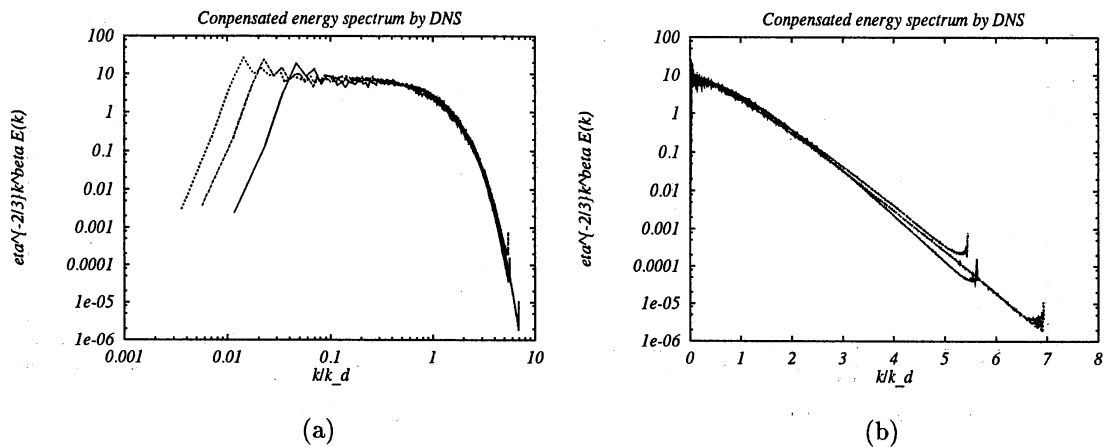


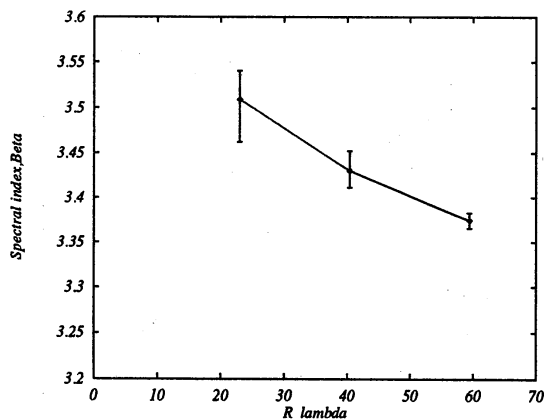
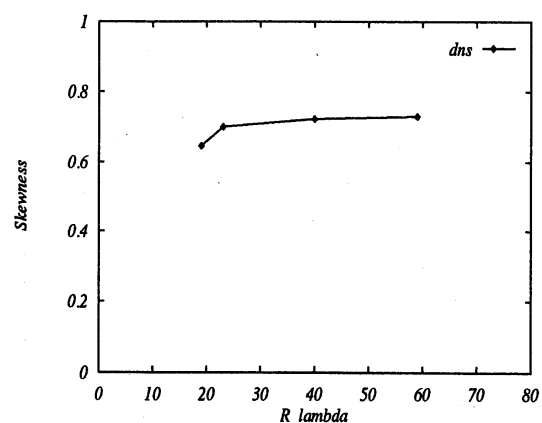
Fig.1. スケーリングされたエネルギースペクトル $\eta^{-2/3} k^{3+\delta} E(k)$, (a) 慣性領域, (b) 散逸領域.

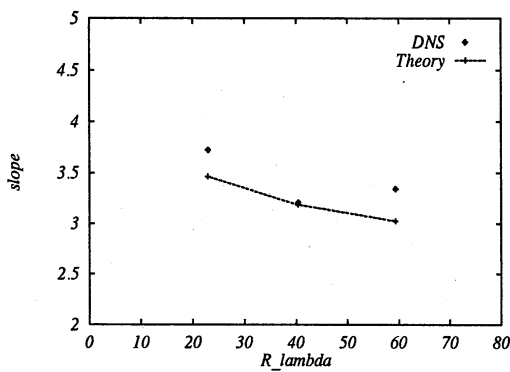
表 1: DNS パラメータ

 N : resolution, ν : kinematic viscosity, k_{max} : maximum wavenumber.

Parameters	Labels			
	run1	run2	run3	run4
N	1024^2	1024^2	2048^2	4096^2
ν	5×10^{-4}	1×10^{-4}	2×10^{-5}	7×10^{-6}
Δt	5.859×10^{-4}	5.859×10^{-4}	2.930×10^{-4}	7.324×10^{-4}
k_{max}	483	483	965	1931
R_λ	19	23	40	59
η	0.27	0.40	0.25	0.16
k_d	36.0	85.7	177	279
δ	-	0.509	0.430	0.374
b_{2D}	-	3.463	3.181	3.023

ここで得られた結果を, DNS による定常乱流における測定結果と比べてみよう. DNS は $N = 1024^2, 2048^2, 4096^2$ の3種類の解像度でスペクトル法を用いて行なった. 低波数領域で Gaussian white noise のランダム外力を加え, かつエネルギーの逆カスケードを抑制するために, 低波数にのみ働く抵抗を入れてある(日々野と後藤 1995, 高橋と後藤 1996). Fig.1 には $\bar{\eta}^{-2/3} k^{3+\delta} E(k)$ をプロットしてあり, 慣性領域において水平なグラフが得られるようにした. 測定する波数領域を変更しながらスペクトルの冪(δ)を求めた. 得られた δ の値は表 1 に示してある. 図 2 より, R_λ の増加と共に δ は次第に減少する傾向にあることが分かる. 一方, S_ω は $R_\lambda > 20$ では極めてゆっくりとしか増加しない(図 3). したがって, S_ω はほぼ定数と見做してもかまわないであろう. この結果, b_{2D} における R_λ 依存性は $R_\lambda^{-1/6}$ のみに絞られる. 図 4 には DNS と (1.19) との比較を示してある. DNS データにはばらつきがあるが, 理論値は DNS の値よりやや小さい傾向を示す. また R_λ と共に理論値は減少するが, DNS のデータからは必ずしもそのような傾向があるとは断言できない. 以上の解析の結果は DNS と矛盾しない程度に, 遠散逸領域におけるエネルギー・スペクトルの形を記述していることが出来る. しかし, 理論的な観点からは, (1.19) とその導出においていくつかの問題点を含んでいる. まず, (1.10) から (1.11) への過程において 2 項からなる $\bar{x}^2$ のべきを Padé 近似により表すことの妥当性についての問題がある. (1.11) の形で $F(\bar{x})$ の極を近似しているのであるが, (1.10) の高次までとった級数を考えるならば, $F(\bar{x})$ の極の位置は変化することは十分考えられる. 現在のところ $O(\bar{x}^6)$ までの計算は出来ていないので具体的なことは何も言えない.

Fig.2. δ の R_λ 依存性.Fig.3. S_ω の R_λ 依存性.

Fig.4. 傾き b_{2D} の比較.

また, (1.19) は $\mathcal{R}_\lambda^{-1/6}$ に比例することを示している (Tatsumi & Yanase(1981) によると $b_{2D} \propto R_L^{-1/2}$ ($R_L \equiv u_0/(\nu k_0)$). これは $\mathcal{R}_\lambda \rightarrow \infty$ で b_{2D} が 0 になることを意味し物理的ではなくなる. これに対する, 著者の答えはいまのところない. S_2 の冪展開から $F(\bar{x})$ の極を予想する方法が有限の $\mathcal{R}_\lambda$ においてまがりなりにも DNS と矛盾しない b_{2D} を出してくることを考えると, この困難を免れるひとつの可能性は, 極のより正確な特定により, $E(k) \propto \exp(-b_{2D}(k/k_d))$ とするよりも, むしろ $E(k) \propto \exp(-\phi(k/k_d))$ と考えて, $\phi(x)$ を考えることにあるのかも知れない.

1.3 慣性領域における渦度場の統計

次に, 慣性領域における渦度場の統計, 特に距離 $r(l_d \ll r \ll L)$ 離れた 2 点間の渦度場の差 $\delta\omega(r)$ について考える. エンストロフィーがカスケードする慣性領域において, $\delta\omega(r)$ の高次モーメント

$$K_p = \frac{\langle (\delta\omega(r))^p \rangle}{\langle (\delta\omega(r))^2 \rangle^{p/2}} \quad (1.21)$$

が, r についてどのようにスケールされるかは, 間欠性がスケールの減少と共にどのように成長するのかを知るうえで重要である. もちろん, これだけで慣性領域の統計がすべて特長づけられる訳ではない. たとえば, エンストロフィーの輸送率なども慣性領域における乱流場の動的特性を知るうえで欠かせない物理量である. しかしここでは, DNS データから最も簡単に得ることの出来る統計量として, (1.21) を取り上げる.

モーメントは

$$f_p(r) \equiv \langle |\delta\omega(r)|^p \rangle = 2 \int_0^\infty |\delta\omega(r)|^p P(\delta\omega(r)) d\delta\omega(r) \quad (1.22)$$

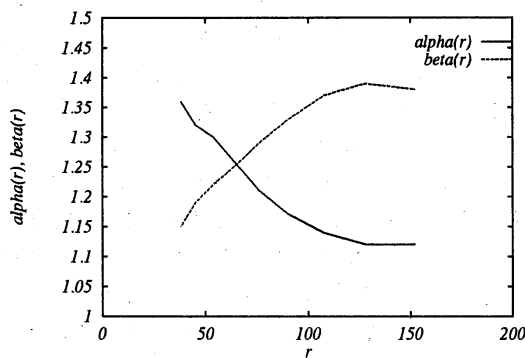
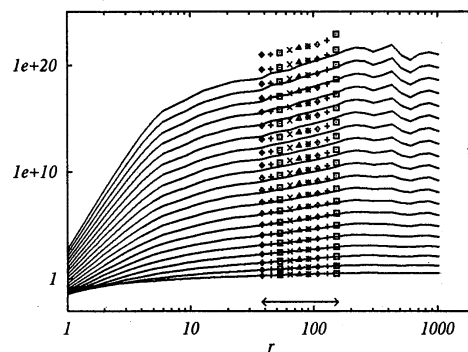
で計算される. しかし, DNS において実際に $P(\delta\omega(r))$ を求めてみると, サンプル数の不足から通常, 分布関数の裾野の部分に欠損が見られる. p が大きくなると共に, 被積分関数の極大値は次第に原点から遠ざかるから, 分布関数の欠損は高次モーメントを低く見積ることにつながる. そこで, ここでは DNS により求めた分布関数を, 裾野の部分について滑らかに補外することにより (1.22) の被積分関数を補正し, 積分を行なった. この分布関数の補外は, 原点よりさらに離れた振幅の領域で真の分布関数よりも大きく評価する危険性を伴うが, 極端に大きな p でなければ, 補外をしない場合の高次モーメントの過小評価の危険性よりも小さい.

実際には $P(\delta\omega(r))$ を以下のような形で fitting を行なった.

$$P(X_r) \propto \exp(-\alpha_r X_r^{\beta_r}), \quad X_r = \frac{\delta\omega(r)}{\langle (\delta\omega(r))^2 \rangle^{1/2}} \gtrsim 1. \quad (1.23)$$

図 5 はこのようにして得られた α_r, β_r を $\mathcal{R}_\lambda = 40$ の場合の r について示したものである. r の減少と共に β_r は減少し 1 に近づいている. この補正により得られたモーメント $f_p(r)$ を図 6 に示す. 実線は, 補正をせずに DNS からのデータに基づいて直接 $f_p(r)$ を計算したものであり, シンボルは分布関数の補正を行なった後にモーメントを計算したものである. $p \geq 9$ では補正されたモーメントのほうが何もしないデータよりも大きくなっていることが確かめられる. この補正したデータをもとに, 慣性領域における指数 $f_p(r) \propto r^{\zeta_p}$ を測定した. それを図 7 に示す. 以下に解説する理論と DNS のデータの一致は良いと考えられる. しかし, この比較は注意を要する. 慣性領域の広がり十分でないことや, サンプル数の不十分さによって高次モーメントでは指数の揺らぎが大きい. 実際 $\mathcal{R}_\lambda = 59$ の場合には, 理論と DNS のデータは高次モーメントにおいて食い違いが大きくなる.

一方, ζ_p についての基礎方程式に基づいた合理的な理論は, 今のところ見あたらない. しかし, 最近, べき法則に従うスペクトルを持ち時間的にホワイトノイズに従う速度場によって輸送される passive scalar について, その高次

Fig.5. α_r, β_r の r 依存性. $\mathcal{R}_\lambda = 40$.Fig.6. $f_p(r) = \langle |\delta\omega(r)|^p \rangle$, ($p = 1, 2, \dots, 20$), $\longleftrightarrow$ は慣性領域. $\mathcal{R}_\lambda = 40$.

モーメントを理論的に求めようとする研究がなされている (Kraichnan et al. 1994, Gawezki & Kupiainen 1995, Fairhall et al. 1996). 2次元においては、渦度場と passive scalar 場は見かけ上、同じ形の方程式に従う。その一方、渦度場と速度場とは $(\text{rot} \mathbf{u})_3 = \omega$ により互いに結びついており、両者は全く独立ではない。しかし速度場のエネルギースペクトルと渦度場のスペクトルとは k^2 のぶんだけ異なるから、慣性領域では大まかにいって渦度場と速度場とは独立であると期待できる。そこで、 $\delta\omega(\mathbf{r})$ の統計を $\delta T(\mathbf{r})$ のそれと置き換えて見ることで、 $\delta\omega(\mathbf{r})$ の高次モーメントを調べる手掛かりになると期待できる。そこで、まずは passive scalar の理論のあらすじを述べる。

T の従う方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (1.24)$$

で与えられる。ここで κ は T の拡散係数である。通常、左辺の第2項は速度場とスカラー場との統計的相関をつくりだし、スカラー場の揺らぎを大きなスケールから小さなスケールに輸送する。この問題は、Navier-Stokes における速度場のように $\langle T(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}', t) \rangle$ についての方程式が閉じない完結問題を含んでいる。しかし、いま速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が統計的に定常でかつ時間に関してホワイトノイズ

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', s) \rangle = P_{ij}(\nabla) F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - s), \quad (1.25)$$

のように振る舞うとすると、この完結問題は生じない (Kraichnan 1968)。詳しい解説は省くが、実際 T の2点での差 $\delta T(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - T(\mathbf{x}, t)$ の $2n$ 次モーメント

$$S_{2n}(\mathbf{r}, t) = \langle [\delta T(\mathbf{r}, t)]^{2n} \rangle, \quad (1.26)$$

の式は d 次元において

$$\frac{\partial S_{2n}}{\partial t} - \frac{2}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} h(r) \frac{\partial S_{2n}}{\partial r} \right) = \kappa J_{2n}(\mathbf{r}, t), \quad (1.27)$$

$$J_{2n}(\mathbf{r}, t) = 2n \langle [\delta T(\mathbf{r}, t)]^{2n-1} (\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \nabla_{\mathbf{x}'}^2) \delta T(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1.28)$$

で与えられる。ここに $h(r)$ は統計的に定常な速度場による拡散係数

$$h(r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \langle \delta u_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \delta u_{\parallel}(\mathbf{r}, s) \rangle ds \propto r^{\zeta(h)}, \quad (1.29)$$

$$\delta u_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{u}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{r}/r \quad (1.30)$$

である。この式には、 $2n$ 次より大きい次数のモーメントはでてこないし、速度場の2次モーメントは与えられている。この方程式は $n = 1$ のときには閉じている。 $n > 1$ のときには右辺の拡散項の扱いが難しい。

J_{2n} は $[\delta T(\mathbf{r}, t)]^{2n-1}$ と $(\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \nabla_{\mathbf{x}'}^2)\delta T(\mathbf{r}, t)$ の積の平均値であるから、平均をとる場合、 $\delta T(\mathbf{r}, t)$ を与えたときの後者の条件付き平均を求め、その後 $\delta T(\mathbf{r}, t)$ のについての平均をとるという2段階にわけて考える事ができる。そこでこの条件付き平均を

$$H(\delta T(\mathbf{r})) \equiv \langle (\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \nabla_{\mathbf{x}'}^2)\delta T(\mathbf{r}) | \delta T(\mathbf{r}) \rangle \quad (1.31)$$

と表す。Kraichnan (1994, Kraichnan et al.1995) は

$$H(\delta T(\mathbf{r})) = f_1(r)\delta T(\mathbf{r}) + f_3(r)[\delta T(\mathbf{r})]^3 + \dots, \quad (1.32)$$

として、第1項だけをとる近似を考えた。すると、 J_{2n} は S_{2n} に比例することになるので方程式は $S_{2n}(r)$ についての斉次方程式となる。そして $S_{2n}(r) \propto r^{\zeta_{2n}}$ とすると指数 ζ_{2n} は

$$\zeta_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{4nd\zeta_2 + (d - \zeta_2)^2} - \frac{1}{2}(d - \zeta_2), \quad \zeta_2 = 2 - \zeta(h) \quad (1.33)$$

と与えられる。

以上が、passive scalar の anomalous scaling のあらすじである。ここで、 $\delta T(\mathbf{r})$ のかわりに $\delta\omega(\mathbf{r})$ を当てはめてその高次モーメントの指数を求めて DNS の結果と比較を行なう。2次元乱流の慣性領域における拡散係数は

$$h(r) \propto \bar{\eta}^{1/3} r^{2-\delta}, \quad \zeta_2 = \delta \quad (1.34)$$

で与えられる。これを (1.33) に代入して求めたものが図7に示してある。ただし、 ζ_2 については、 $E(k)$ の測定から

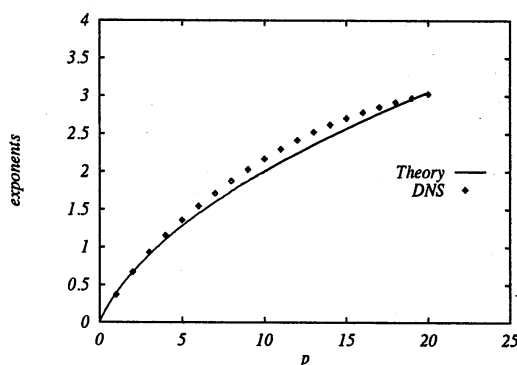


Fig.7. ζ_p . 記号は DNS, 実線は DNS. $\mathcal{R}_\lambda = 40$.

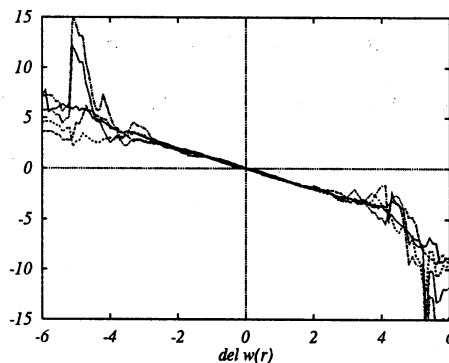


Fig.8. $\langle \nabla^2 \delta\omega_r | \delta\omega_r \rangle$, $r = 2^l$, ($l = 4, \dots, 8$). 慣性領域は $38 \leq r \leq 157$. $\mathcal{R}_\lambda = 40$.

得られる δ よりも図6から直接測定される傾き ζ_2 を使ってある。両者は若干異なる。図より、理論値と DNS の一致は良い。また (1.32) において $H(\delta T) = f_1 \delta T$ としたが、これについて、DNS によるデータで見てみよう。慣性領域 ($38 \leq r \leq 157$) を含む範囲の $r = 2^l$, $l = 4, \dots, 8$ について $H(\delta\omega(r))$ をプロットしたのが図8である。上記の r のすべての値において $X_r \lesssim 5$ では $H(\delta\omega(r))$ は直線的に変化しているの、(1.32) を第1項で近似するのは妥当なものであるといえる。 $X_r > 5$ の大きい振幅のところでは直線からずれてくる。この直線からのずれがサンプル数の不十分さによるものなのか、あるいは慣性領域におけるスケーリングとの密接な関係によるのか、いまのところ明らかではない。しかし、高次モーメント $p > 2$ を考える場合、慣性領域において (1.27) の両辺がべき法則に従うと仮定すると、非線形項と釣り合う粘性項の形は (1.32) において第1項のみで与えられるとするのは、ありそうな話ではある (Kraichnan 1996)。

δT と $\delta\omega$ との対応がどの程度まで成り立つかをあらかじめ評価することは今のところできない。しかし、速度場と渦度場との相関は詳しく見れば必ず存在するから、全く両者は統計的に独立であるとはいえない。この両者の相関は高次モーメントでは強くなると期待されるから、(1.27) のように表されるのは低次モーメントに限られるだろうと考えられる。したがって、図8に示した理論との結果はごく参考程度のもので理解されるべきであろう。今後、 $H(\delta\omega(r))$ についてのさらに詳しい解析が必要である。

参考文献

- [1] G.K.Batchelor: Camb.Philo.Soc. **47** (1951) 359.
- [2] Borue: Phys.Rev.Lett. **71** (1994) 3967.
- [3] H.Effinger & S.Grossman, Z.Phys. **66**, (1987) 289.
- [4] A.L.Fairhall, O.Gat, V.S.L'vov and I.Procaccia: Phys.Rev.E. **53** (1996) 3518.
- [5] K. Gawedzki & A.Kupiainen: Phys.Rev.Lett. **75** (1995) 3834.
- [6] 日比野 豊 と 後藤 俊幸, 京都大学数理解析研究所講究録 **921** (1995) 110.
- [7] R.H.Kraichnan: Phys.Fluids. **11** (1968) 945.
- [8] R.H.Kraichnan: Phys.Rev.Lett. **72** (1994) 1016.
- [9] R.H.Kraichnan, V.Yakhot & S.Chen: Phys.Rev.Lett. **75** (1995) 240.
- [10] R.H.Kraichnan: *submitted to* Phys.Rev.Lett.
- [11] L.Shirovich, L.Smith & V.Yakhot: Phys.Rev.Lett. **17** (1994) 344. (Errata, Phys.Rev.Lett. **20** (1995) 1492).
- [12] G.Stolovitzky & K.R.Sreenivasan: Phys.Rev.E. **52** (1995) 3242.
- [13] 高橋 博文 と 後藤 俊幸, 京都大学数理解析研究所講究録 (1996).
- [14] T.Tatsumi & S.Yanase: J.Fluid Mech. **110** (1981) 475.