

Combinatorial Problems in Design of Experiments

元日大生産工統計学科 小川 潤太郎

元日大生産工統計学科 池田 貞雄

§1. まえがき

釣合型不完全ブロック配置の作製は正に Combinatorial な問題そのものである。 v 個の処理を各々の大きさなる b 個のブロックに割当るとする。次の三条件が満たされるなら、それは釣合型不完全ブロック配置——英語では *Balanced Incomplete Block Design*, 略して BIBD —— といい。

- (1) 各ブロックは k ($\leq v$) 個の相異なる処理を含む。
- (2) 各処理は r 個のブロックに現われる。
- (3) 任意の二つの処理は丁度 λ 個のブロックで会合する。

BIBD を記述する 5 個のパラメータ v, b, r, k, λ の間には、次の関係があることは見易い。

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

更に又一般に

$$v \leq b \text{ 従って } r \geq k$$

ではけねばならぬことも知られてゐる R. A. Fisher [4].

1930年代の初め, R. A. Fisher と F. Yates [5] は繰返し数 $k \leq 10$ である λ の可能なと思ふべき BIBD をリストした. その中の6個は存在しなうことと後に別々に証明された.

$$(\alpha) \quad v=15, b=21, k=7, r=5, \lambda=2$$

$$(\alpha') \quad v=22, b=22, k=7, r=7, \lambda=2$$

$$(\beta) \quad v=21, b=28, k=8, r=6, \lambda=2$$

$$(\beta') \quad v=22, b=29, k=8, r=8, \lambda=2$$

$$(\gamma) \quad v=36, b=45, k=10, r=8, \lambda=2$$

$$(\gamma') \quad v=46, b=46, k=10, r=10, \lambda=2$$

更に Fisher-Yates の表にある次の二つの BIBD は, 今日に到るもその存在も不存も不明である.

$$(\delta) \quad v=46, b=69, k=9, r=6, \lambda=1$$

$$(\epsilon) \quad v=51, b=85, k=10, r=6, \lambda=1$$

これと同様なことは当然部分釣合型不完全ブロッツ配置——Partially Balanced Incomplete Block Design, 略して PBIBD——についても起る.

このブロッツ配置の不存証明の有力な一手段として Hanse-Minkowski の p -不変量を援用する方法がある. 本稿では主として, 此方法を中心として述べる[8].

§2. Hasse-Minkowski の p -不変量

$A = \|a_{ij}\|$ は n 次の有理対称な正方行列として、その主対角線小行列式を

$$D_0 = 1, D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

として、

$$C_p(A) = (-1, -1)_p \cdot \prod_{i=1}^n (D_i, -D_{i-1})_p$$

とある、これを行列 A の Hasse-Minkowski の p -不変量という。但しここで記号 $(a, b)_p$ は Hilbert 剰餘記号で

$$(a, b)_p = \begin{cases} +1, & ax+by=1 \text{ が } p\text{-進解をもつなら,} \\ -1, & \text{然らざるとき.} \end{cases}$$

二つの有理対称行列 A, B に対して、同次数の有理でシンギュラーならざる行列 C が存在して

$$C'AC = B$$

となるとき A と B とは有理的に対等であるという。ところで、 A, B が有理的に対等である為に必要且充分条件は

$$|A| \sim |B|, \quad A \text{ の指数} = B \text{ の指数}$$

更に凡ての有理量数(形式的量数座標も含めて) p に対して

$$C_p(A) = C_p(B)$$

となることである。これを H. Hasse の定理である[6]。

p -不変量の計算に有用な公式をいくつかリストしておく。

$$(1) \zeta_p(\omega A) = (-1, \omega)_p^{\frac{n(n-1)}{2}} (\omega, |A|)_p^{n-1} \zeta_p(A)$$

$$(2) \zeta_p(A+B) = (-1, -1)_p (|A|, |B|)_p \zeta_p(A) \zeta_p(B)$$

§3. 対称 $B I B D$ の存在の必要条件.

一般に $B I B D$ はその全合行列 $N = \|n_{\alpha\beta}\|$, $\alpha = 1, \dots, v$; $\beta = 1, \dots, b$ によって記述される. 但し

$$n_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \text{若し処理 } \alpha \text{ が } \beta \text{ の } \gamma \text{ であるとき;} \\ 0 & \text{否うであるとき.} \end{cases}$$

よって

$$NN' = (n-1)I_v + \lambda G_v$$

と v 個の右側のスカラー分解をつくると

$$NN' = nk A_0'' + (n-1) A_1''$$

ここで $A_0'' = \frac{1}{v} G_v$, A_1'' は直交する冪等行列 (有理的) である. これら

の一次独立な列ベクトルを $a_1'', a_2'', \dots, a_v''$ として

$$S = \|a_1'' a_2'' \dots a_v''\|$$

とあくと

$$S'NN'S = \begin{vmatrix} \frac{nk}{v} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)a_{11}'' & \dots & (n-1)a_{1v}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)a_{v1}'' & \dots & (n-1)a_{vv}'' \end{vmatrix}$$

よって, $\|a_{ij}''\|_{2 \leq i, j \leq v}$ は行列 NN' の固有値 $(n-1)$ に対応する固有

空間の基底ベクトルのグラミヤンである。従って例えは

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

の基底ベクトルをとれば、そのグラミヤンは

$$Q = \begin{bmatrix} v(v_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_1 v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

であつて、 $|Q| \sim v$, $C_p(Q) = (-1, -1)_p$ であることは見易い。

$$NN' \sim \begin{bmatrix} \frac{2k}{v} & 0 \\ 0 & (n-1)Q \end{bmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} C_p(NN') &= (-1, nk)_p (nk, v, v(n-1)^{v-1})_p (-1, n-1)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} (v, n-1)_p^v C_p(Q) \\ &= (-1, nk)_p (v, n-1)_p (v, nk)_p (nk, n-1)_p^{v-1} (-1, n-1)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} C_p(Q) \\ &= (-1, -1)_p (-1, nk)_p (-1, n-1)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} (v, n-1)_p (v, nk)_p (nk, n-1)_p^{v-1} \end{aligned}$$

若し配置が対称ならば、 $b = \frac{v}{n}$ として N は正方形列であるから

$$(n-1)^{v-1} = \text{完全平方}$$

従つて、 v は偶数ならば、 $n-1$ 自身も完全平方であることがわかる。

更に $C_p(NN') = (-1, -1)_p$ となるべきが、この場合は明らかに成立
 つ。この素数で、 $n-1$ が完全平方でない場合は、すべての素数 p で

$$(-1, n-1)_p \stackrel{v(u-1)}{=} (u, n-1)_p = 1$$

となるのは、[9]。例之は (8) の場合は $u=29$ で奇数 $n-1=6$
 で完全平方でないが、すべての素数 p で

$$(29, 6)_p = 1$$

となるべきが、 $p=3$ に対しては

$$(29, 6)_3 = (29, 2)_3 \cdot (29, 3)_3 = \left(\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$$

となるが、これは不可能である。

4. 対称な $P B I B D$ の存在の必要条件 [10]

部分釣合型不完全アロツク配置 $-P B I B D-$ を述べてく
 る。先づ "アソシエーション" という概念を説明しなければなら
 ない。

1. 1 箇の処理の間、次の三条件を満たす或図便を定義する
 とき、それをアソシエーションという。

(1) 任意の二つの処理をとると、それは互に第 1 種のアソシエ
 ートであるか、第 2 種のアソシエートであるか、……、又は第 m 種
 のアソシエートである。

(2) 各処理は n 箇の第 i 種アソシエートをもつ。

(3) それに第 i 種アソシエートである処理対 α, β に対して α 対
 しては第 j 種アソシエートであるが、 β 対しては第 k 種アソ

シートであるような処理 γ の数 n_γ 対 (α, β) に関係なく $p_{\beta\alpha}^i$ である。

更に各処理は、それ自身の 0 種アソシエートとみえらるる。

$$n_0 = 1, \quad p_{0k}^i = \delta_{ik}, \quad p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}.$$

アソシエーション径数の間には次の関係がある。

$$\sum_{i=0}^m n_i = v,$$

$$p_{ij}^k = p_{ji}^k,$$

$$\sum_{j=0}^m p_{ij}^j = n_i,$$

$$n_i p_{ij}^j = n_j p_{ji}^i = n_k p_{ij}^k.$$

第 i 種アソシエーション行列 A_i は次のように定義する。

$$a_{\alpha\beta}^i = \begin{cases} \text{もし } \alpha, \beta \text{ が第 } i \text{ 種アソシエートなら, } 1 \\ \text{それ以外なら, } 0 \end{cases}$$

といて

$$A_i = \| a_{\alpha\beta}^i \|, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

そうすれば,

$$\sum_{i=0}^m A_i = G$$

で又

$$A_i A_j = A_j A_i = \sum_{k=0}^m p_{ij}^k A_k$$

であることは見易い。つまり $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ は有理数体の上で階

数 $m+1$ の可換な多元環とつくは認である。

さて、その大さな各々のブロックを b 箇あつて、それぞれアソシエーションの定義され b 箇の処理を割当りのに次り条件及添とされて m なる、それ $P B I B D$ とする。

(1) 各ブロック b 箇の相関の処理を含む。

(2) 各処理は T 度 b 箇のブロックに含めらる。

(3) 第 i 種アソシエートである各処理対は T 度 b 箇のブロックに現れらる。

然らば $U_k = b_k$ で、更に $\lambda_0 \equiv 1$ として

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = \lambda_k$$

となる。

$P B I B D$ の命令行列を N とする。

$$N N' = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

となる。つまり $N N'$ はアソシエーション代数に含めらるものである。アソシエーション代数の冪等行列を用いて

$$N N' = p_0 A_0^* + p_1 A_1^* + \dots + p_m A_m^*$$

とすれば、これは $N N'$ のスペクトル分解になつて

$$p_0 = \lambda_k$$

である。 A_i^* の階数 α_i として、 A_i^* の一次独立な列ベクトル ε

$$Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}}^{(i) \pi}, Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, 2}^{(i) \pi}, \dots, Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i}^{(i) \pi}$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

として、これら $\sum_{i=1}^m \alpha_i = v$ 箇の列ベクトルを並べて出来た正方形行列を S とし、 α_i 箇の列ベクトルの α_i 行を Q_i とすれば

$$SS' = \begin{vmatrix} 1/v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q_m \end{vmatrix}$$

以下各々は $p_1, p_2, \dots, p_m$ がすべて有理数である場合を考えておく。

$p_1 p_2 \cdots p_m \neq 0$ の場合に正則であるというこゝとにする。

(i) 正則且対称の PBI BD の場合:

$$S'NN'S = \begin{vmatrix} 1/v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_m Q_m \end{vmatrix} \sim I$$

より、次の条件を得る。

$$\prod_{i=1}^m p_i \sim 1,$$

$$\prod_{u=1}^m (-1, p_u)_p^{\frac{v(\alpha_u)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j})_p \cdot \prod_{u=1}^m (p_u, |Q_u|)_p = 1.$$

特に $m=1$ の場合 BI BD のときは $\alpha_1 = v-1$, $p_1 = (n-1)^{-1} \cdot \frac{|Q_1| \sim v}{k \cdot 25}$

$$(n-1)^{v-1} \sim 1$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} (n-1, v)_p = 1$$

又、 $m=2$ のときは

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \sim 1,$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(q+1)}{2}} \cdot (-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(q+1)}{2}} \cdot (p_1, p_2)_p^{\alpha_1 \alpha_2} \cdot (p_1, |Q_1|)_p \cdot (p_2, |Q_2|)_p = 1$$

とある.[7][8]

(ii) $b < v$ の場合は NN' は正則で、な 1. 簡単 9 為 $\kappa = 2$ と 1 て

$$(v) \quad b = v - \alpha_1, \quad p_1 = 0$$

の場合も考えて見よう.

$$S = \| a_1^{(1)\pi} a_2^{(1)\pi} \cdots a_{1+\alpha_1=b}^{(1)\pi} \|$$

とみると、この場合は

$$NN' = \kappa A_0^\pi + p_1 A_1^\pi$$

から

$$S' N \cdot N S' = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\kappa}{v} & 0 \\ 0 & p_1 Q_1 \end{array} \right\| \sim 1.$$

従って

$$b p_1^{\alpha_1} |Q_1| \sim 1.$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(q+1)}{2}} \cdot (p_1, |Q_1|)_p^{\alpha_1-1} \zeta_p(Q_1) = (-1, -1)_p$$

は必要条件を得る.

$$(v) \quad b = v - \alpha_1, \quad p_1 = 0$$

のときは同様 $\kappa = 1$ て

$$b p_2^{\alpha_2} |Q_2| \sim 1$$

$$(-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(q+1)}{2}} \cdot (p_2, |Q_2|)_p^{\alpha_2-1} \zeta_p(Q_2) = (-1, -1)_p$$

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \sim 1$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} (-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} (p, p)_p^{\alpha_1 \alpha_2} (p, 1Q_1)_p (p, 1Q_2)_p = 1$$

とある。

(ii) $b < v$ の場合は NN' は正則である。簡単の爲に $m=2$ として、

$$b = v - \alpha_1, \quad p_2 = 0$$

の場合を考えて見よう。

$$S = \| \alpha_1^{(v)} \alpha_2^{(v)} \dots \alpha_{1+\alpha_1=b}^{(v)} \|$$

とすれば、この場合

$$NN' = \alpha A_0^T + p_1 A_1^T$$

である。

$$S' N \cdot N S = \begin{vmatrix} \frac{2b}{v} & 0 \\ 0 & p_1 Q_1 \end{vmatrix} \sim 1$$

従つて

$$b p_1^{\alpha_1} |Q_1| \sim 1.$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} (p, 1Q_1)_p^{\alpha_1-1} \zeta_p(Q_1) = (-1, -1)_p$$

は必要条件を得る。

§5. 非対称な BIBD の双対配置。

BIBD であるとき、その径数 v, b, r, k, λ とする。これら 5 つと処理を λ である配置を双対と云う。その径数は $v^* = b, b^* = v, r^* = k, k^* = r, \lambda^*$ とある。

§5. $BIBD$ の双対配置 (Dual Design).

その径数 v, b, r, k, λ の $BIBD$ で "プロット" と処理を λ 個と生ずる配置を双対と云う. 双対配置の径数は

$$v^* = b, \quad b^* = v, \quad r^* = k, \quad k^* = r$$

で必ずしも $BIBD$ にならない. 或場合 $k = m-2$ の $PBIBD$ D になる. 例之は

$$v = b = \binom{n}{2} + 1, \quad r = k = n, \quad \lambda = 2$$

より切捨法で生ずる.

$$v = \binom{n-1}{2}, \quad b = \binom{n}{2}, \quad r = n, \quad k = n-2, \quad \lambda = 2$$

の双対を取ると.

$$v = \binom{n}{2}, \quad b = \binom{n-1}{2}, \quad r = n-2, \quad k = n, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

より $m=2$ の $PBIBD$ となる. $n \neq 8, n > 5$ なる n は 3 向型のアソシエーションをもつことを知つて [3]. この場合に $Shrikhande, Raghavarao, Thanigaru$ [4] を参照.

より

$$v = b = 111, \quad r = k = 11, \quad \lambda = 1$$

より切捨法で生ずる.

$$v = 100, \quad b = 110, \quad r = 11, \quad k = 10, \quad \lambda = 1$$

は λ 径数をもつ $BIBD$ の不存性を証明した [3].

さて, 径数 $v, b, r, k, \lambda=1$ の $BIBD$ では任意の二つのプロットは高々一つしか処理を共有し得ない. 事実この双対配置は m

$=2$ の $PBI BD$ とする。

共有処理のなり二つのブロックを双対配置にあるのは第1種アソシエート処理対 k , 又共有処理を一つの二つのブロックを双対配置にあるのは第2種アソシエート処理対 k 対応である。次のアソシエーション係数を得る。

$$n_1 = b-1-k(n-1), \quad n_2 = k(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-k)^2(n-1) - \frac{2(n-1)}{k} & k(n-k-1) \\ k(n-k-1) & k^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(k-1)(n-k)(2-k)}{k} & (k-1)(n-k) \\ (k-1)(n-k) & n-2+(k-1)^2 \end{vmatrix}.$$

$v=mn$ で、各グループは n 箇の処理より成り、 m 箇のグループに分かれてゐる。同グループに属する n 処理は第1種アソシエート、異なるグループに属する n 処理は第2種アソシエートとなる。Group-Divisible のアソシエーション係数を求め、その係数を

$$n_1 = n-1,$$

$$n_2 = (m-1)n.$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & (m-1)n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & (m-1)n \end{vmatrix}$$

勿論 $n_2 p'_{11} = n_1 p'_{12}$ である。 $p'_{11} = 0$ なら $p'_{12} = 0$ である。 $p'_{11} = 0$ であるから $m=2$ で $p'_{12} = 0$ となるアソシエーションは Group-Divisible 2-PPG であると知られてゐる [2]。さて

$$v=100, b=110, \lambda=11, k=10, \lambda=1$$

の存在を示す

$$v^*=110, b^*=100, \lambda^*=10, k^*=11, \lambda_1=0, \lambda_2=1$$

$$n_1=9, \quad n_2=100$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 90 \end{vmatrix}$$

であるが、 $n=10, m=11$ の Group Divisible 設計が存在しないことは

$$\delta, \lambda \text{ について } \alpha_0=1, \alpha_1=v-1=99, \alpha_2=10$$

$$b^*=100 = v^* - \alpha_2 = 110 - 10.$$

$$N'N = nA_0 + o \cdot A_1 + A_2$$

$$p_1 = k^* - v^* \lambda_2 = k - b \lambda_2 = 0, \quad p_2 = k^* - \lambda_1 = k - \lambda_1 = 10.$$

$$Q \sim (nI_{m-1} - nG_{m-1}) \times I_m \quad [8]$$

$$|Q_2| \sim n^m$$

$$b^* p_2^* |Q_2| \sim 1$$

であるが、 $v \neq k^*$ のとき、 $v p_2^* |Q_2| \sim 100 \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \sim 10^{20}$ であるから、これは充分に大きい値である。したがって、 $v^*=100, b^*=100, \lambda^*=10, k^*=11, \lambda_1=0, \lambda_2=1$ の Group Divisible 設計は存在しない。従って $v=100, b=110, \lambda=11, k=10, \lambda=1$ の設計は存在しない。一方、 m が素数 p のとき、有限体の存在から、 $v = \frac{p^m-1}{p-1}$ 箇の点と、 $b = \frac{p^m-1}{p-1}$ 箇の直線から成る有限射影平面が存在して、各直線は $m+1$ 箇の点を含み、各点は $m+1$ 箇の直線を通る。

2"ある。しかし上記のことは、 $m=10=2.5 \times 2$ 17.2 > 2 BR_{12}
 Configurationは、 BR_{12} であることは、 BR_{12} である。

参考文献

- [1] Bose, R.C. and Connor, W.S., Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, Ann. Math. Statist., 23 (1952), 367-383.
- [2] Connor, W.S. and Clatworthy, W.H., Some theorems for partially balanced designs, Ann. Math. Statist., 25 (1954), 100-112.
- [3] Clatworthy, W. H., The subclass of balanced incomplete block designs with $r=11$ replications, Review of the I.S.I. 26 (1968), 7-11.
- [4] Fisher, R. A., An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, Annals of Eugenics, 10 (1940), 52-75.
- [5] Fisher, R.A. and Yates, F., Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Hafner Publishing Co. New York, 1949
- [6] Hasse, H., Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper rationalen Zahlen, J. Reine Angew. Math. 152 (1923), 205-224.
- [7] Ogawa, J., On a unified method of deriving necessary conditions for existence of symmetrical partially balanced incomplete block designs of certain types, Bull. I.S.I. 38 (1961). Part 10. 43-57.
- [8] Ogawa, J., On the non-existence of certain block designs, Proceedings of the Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications, The University of North Carolina Monograph Series in Probability and Statistics No. 4, 200-230.

- [9] Shrikhande, S.S., The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 21 (1950). 106-111.
- [10] Shrikhande, S.S., Raghavarao, D. and Phartase S.K., Non-existence of some unsymmetrical PBIB designs, Canad. J. Math., 15 (1963). 686-701.