

一般化された安藤・日合の定理によるフルタ不等式の一般化

前橋工科大学 亀井栄三郎

1. 安藤・日合の定理からフルタ不等式へ A, B は Hilbert space 上の positive operators とします。まず久保・安藤 [14] によって導入された作用素平均 (α -power mean) の定義を与えておきます。

$$A \sharp_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\alpha}A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

安藤・日合 [1],[10] は次のような定るを示しました [3],[5]。

Ando-Hiai Theorem: For $A, B > 0$,

$$(AH) \quad A \sharp_{\alpha} B \leq I, \Rightarrow A^r \sharp_{\alpha} B^r \leq I \text{ holds for } r \geq 1.$$

私達はこの定理を次のように一般化しました。

Theorem A. For $\alpha \in (0, 1)$ fixed,

$$(GAH) \quad A \sharp_{\alpha} B \leq I \Rightarrow A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)s + \alpha r}} B^s \leq I \text{ for } r, s \geq 1.$$

今回はこの定理の有効性について紹介します。まずフルタ不等式 ([6],[7],[9]) についてです。

Furuta inequality: If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

$$(F) \quad A^{\frac{p+r}{q}} \geq (A^{\frac{1}{2}}B^pA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for p and q such that $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.

これを α -power mean を使って表すと次のようになります [2],[11]。

$$(F) \quad A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A \text{ for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0.$$

私達の結果は次です [11],[12]。

$$(SF) \quad A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B (\leq A) \text{ for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0.$$

前回私達が示した結果は、(AH) から (SF) が導かれ、よって (F) がえられる、更に (F) から (AH) も導くことができる、というものでした。

ここです、(GAH) を使うと (F) は直ちに導かれることを示しておきます。

Proposition.

(GAH) implies (F).

Proof. Since $A \geq B \geq 0$ is equivalent to $A^{-1} \sharp_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, (GAH) leads

$$A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{\frac{r+1}{p}}{(1-\frac{1}{p}) + \frac{r+1}{p}}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I \text{ for } r \geq 0, p \geq 1.$$

This is equivalent to

$$A^{-(r+1)} \#_{\frac{r+1}{p+r}} A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}} \leq I.$$

So we have

$$A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A.$$

2. フルタ不等式の一般化 (AH) から安藤・日合 [1] は次の (AH₀) を示しました。

$$(AH_0) \quad A^{-1} \#_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}} \leq I \Rightarrow A^{-r} \#_{\frac{1}{p}} (A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}})^r \leq I \text{ for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 1.$$

(AH₀) これを受け古田は (AH₀) と (F) を繋ぐ次のようなフルタ不等式の一般化を与えました ([8],[9]).

Grand Furuta inequality : If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$,

$$(GF) \quad A^{-r} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s \leq A^{1-t}$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.

この不等式に関しても私達の得ている結果は次のような形です ([3],[113],[14]).

$$(SGF) \quad A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq B (\leq A)$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.

ここで $\natural$ は α -power mean と区別して次のように定義します。

$$A \natural_r B = A^{\frac{1}{r}} (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{r}} \text{ for } r \notin [0, 1]$$

この不等式 (GF) の重要性は $t=1, r=s$ のとき (AH₀), $t=0, s=1$ のとき (F) となることです。ここでは、(GAH) を使うことで (SF), (AH₀) を繋ぐ不等式として次を与えておきます。

Theorem. If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$,

$$A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A^t \#_{\frac{1-t}{p-t}} B^p$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.

Proof. if $A \geq B \geq 0$, then $A^t \geq B^t$ for $t \in [0, 1]$ by the Löwner-Heinz inequality. For $p \geq t > 0$, $B^t \leq A^t$ which is equivalent to $A^{-t} \#_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}} \leq I$. By (GAH), we have

$$A^{-tr_1} \#_{\frac{\frac{tr_1}{p}}{(1-\frac{t}{p})s+\frac{tr_1}{p}}} (A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}})^s \leq I \text{ for } r_1, s \geq 1$$

Let $r_1 = \frac{r}{t}$, then

$$A^{-r} \#_{\frac{r}{(p-t)s+r}} (A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}})^s = (A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}})^s \#_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r} \leq I.$$

This is equivalent to

$$(A^t \natural_s B^p) \#_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r+t} \leq A^t.$$

Hence we have the conclusion by the following calculations.

$$\begin{aligned}
 A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) &= (A^t \natural_s B^p) \#_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r}} A^{-r+t} \\
 &= (A^t \natural_s B^p) \#_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s}} ((A^t \natural_s B^p) \#_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r+t}) \\
 &\leq (A^t \natural_s B^p) \#_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s}} A^t \\
 &= A^t \#_{\frac{1-t}{(p-t)s}} (A^t \natural_s B^p) = A^t \#_{\frac{1-t}{p-t}} B^p.
 \end{aligned}$$

References

- [1] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, *Linear Alg. and Its Appl.*, 197(1994), 113-131.
- [2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, *J.Operator Theory*, 23(1990), 67-72.
- [3] M.Fujii and E.Kamei, Ando-Hiai inequality and Furuta inequality, *Linear Algebra Appl.*, 416(2006), 541-545.
- [4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, *Linear Algebra Appl.*, 179(1993), 161-169.
- [5] M.Fujii, E.Kamei and R.Nakamoto, An analysis on the internal structure of the celebrated Furuta inequality, preprint.
- [6] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101(1987), 85-88.
- [7] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, *Proc. Japan Acad.*, 65(1989), 126.
- [8] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, *Linear Alg. and Its Appl.*, 219(1995), 139-155.
- [9] T.Furuta, *Invitation to Linear Operators*, Taylor & Francis, London and New York, (2001).
- [10] F.Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, *Linear Operators Banach Center Publications*, vol.38, 1997.
- [11] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, *Math. Japon.*, 33(1988), 883-886.
- [12] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, *Math. Japon.*, 49(1999), 65-71.
- [13] E.Kamei, Parametrized grand Furuta inequality, *Math. Japon.*, 50(1999), 79-83.
- [14] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, 246(1980), 205-224.

Maebashi Institute of Technology, Kamisadori, Maebashi, Gunma, 371-0816, Japan
 e-mail: kamei@maebashi-it.ac.jp