

閉測地線の無限存在について

石大理数 四方義隆 (YOSHIHIRO SHIKATA)

I 球面上の種々の計量に対して、一般には変化するであろう閉測地線のカズをカゾえるという問題はすでにポアンカレによって意識されていたと言われる。モースはこの問題のために有るはモース理論を展開し、有限次元の場合にかぎって多様体^{ではあるが}に対する特異点をタイプナンバーとの関係を確立することになった。もとよりモース自身はその理論と球面上の閉曲線全体のなす無限次元空間と、その上に定義された長さによる関数に対して応用することとを考えていたのだ。これはモース自身にとっては本意な結果であつたかもしれない。しかし、後に無限次元の場合にその理論が拡張されていたとしても、当時の技術をもつてはその応用は不可能であつたろう。というのは、球面上の閉曲線の全体のなす空間のホモロジーが有効な形で計算されるためには、尚 セール、サリバンを待たねばならなかつたかい

である。一方無限次元の困難を逃れるために閉曲線の空間を有限近似することからサイフェルト、アルバー、フィエト等によって行なわれ、少なくとも一個の測地線にコンパクトリーマン多様体上に存在するという形の結果が得られ始めた。しかしこの方向で、一個以上の測地線の存在を示すのは至難であった。実は以下すべての方法についての交通の困難となるのである。それはホモロジー等の位相的な手段によつて如何にして多重測地線を除外してカゾえるかという事である。すなわち、ある測地線 $\alpha = \alpha(t)$ に対して同じ測地線を n 倍の速度で走つたもの $\alpha^n(t) = \alpha(nt)$ はまた測地線であり、長さ関数の特異点になる。従つて特異点のカズだけをカゾえるときは幾何的に同一であるけれども多重測地線は何度もカゾえられて測地線の正しいカズがカゾえられないのである。

扱。スミイル等によつてモースの理論の無限次元化の因すれ、エリアソン等は X 上の道の空間 ΛX (とホモトピー的には同一とみなせる空間) とその上で定義されたある関数 E とに対してそれが適当であることを見出した。この関数 E はエネルギー関数と呼ばれ、その特異点が測地線に一致し、又、 k 回まわりの道に対し $E(\alpha^k) = kE(\alpha)$ となるという性質を有している。これによつて k 次元ホモロジー

元に対し、指数 n に対応するような測地線に対応することにより測地線論は一つの転回点を迎えた。^(注) とはいえ、多重測地線の困難は依然残っていたので、ボット及びグロモルとマイヤーは測地線 α と α^n との指数の関係に注目した。そして α^n ($n=2, 3, 4, \dots$) の指数に対応して来るはずの次元のホモロジー元を除外していけば、その残りのホモロジーには幾何学的に本質に異った測地線に対応するであろうと考えたのである。ボットはむしろ指数関係そのものを整えることに重点を置き、すべての測地線が双曲型であるという強い仮定の下に理論をすゝめた。一方、グロモルとマイヤーはきれいな指数関係を導き、その代りに一般の測地線についても成立するような形でそれを拡張した。こうして上のアイデアに従って真に異なる測地線を得ようとするとき、実に多くのおモロジエ元が必要になることに気づく。これとおモロジエ元の形のまっである種の対称空間の上の道の空間に依りて解決できたのは、サリバンの方法によってこの種の道の空間のおモロジエが有効に計算できるようになったからであった。一方ボットは、ホモロジーより同変 K 理論の方が双曲型測地線の場合には有利なことに気づき、その方向の理論構成を行った。

しかしながら、以上どの方法もこの時点では本来の問題

である球面の場合には有効に作用せず、この場合は依然、問題として残された。

そこでクリンゲンベルグは、あるホモロジー元の閉測地線に対して特別な働きをもつことに気づき、それによってこの困難を打開しようとした。そして一連の著書や論文の中で、球面上には無限個の真に異なる測地線が存在すると主張した。しかしながら、理論の展開に非常に無理や多くの疑問点が存在していた。それどころか、カトックによって、クリンゲンベルグの理論によれば、は無数に閉測地線が、^{存在するはずの} n 次元球面上に、フィンスラー計量と呼ばれるある種の計量が存在し、その測地線が有限個でしかあり得ないことが示されたのである。(但しこれは計量の種類が異なるので正確な意味での反例ではない)

これと相前後して、ボロトの方法にも存在した、疑問点のヒンクステンによって解消され、すべての測地線が双曲型であるという仮定と付けば、それと球面上に無限個存在するという形での一つの弱い解が導かれた。

Ⅱ このような状況ではあったが、クリンゲンベルグのアイデアには真の閉測地線問題解決への一つの重要な鍵が含まれていたことは見逃せない。それも可除性補題で

ある。この補題の証明は、実は与えられなかったため、クリンゲンベルグの予想というべきでもある。その主張するところは、 m 重の(ある)測地線 α^m の指数 k の特異点になっているとき、指数 $k+1$ を有する l 重の測地線 β^l が存在して $l \equiv m$ と整除するというものである。以下便宜上 m 重測地線になるような特異点と多重度 m の頂点型特異点ということにする。これだけではクリンゲンベルグの意図は必ずしも明らかではない。この補題が正しいものとして、提出された測地線の無限存在の証明の手続きをみると、従来のように特異点とその指数とエネルギーのみによって分類するのではなく、それにもう一つの特異点を併せて考え、それらの指数及びエネルギーによって特異点を分類しようというアイデアが明らかになる。すなわち、^{適当な}ホモロジー条件によって各 $a_i + b$ 次元 (a, b は定数, $i = 0, 1, 2, \dots$) にその指数を持つ頂点型特異点 C_i がとれるものとする。^{このとき}この特異点に対して、新しい頂点型特異点 C_i' の整除性をみたすようにとれるというのが、可除性補題である。今後に C_i, C_i' が不等式

$$E(C_0) < E(C_0') < E(C_1) < E(C_1') < \dots$$

をみたしていたとすれば、グロモルとマイヤーの指数定理より直に、1重の測地線が無限個存在すること示される。

実際 仮に之れが有限個しかないとして. それを $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ とおき

$$C_i = \alpha_l^{m_i} \quad (\alpha_l \text{ は 1 重測地線})$$

$$C_{i'} = \alpha_{l'}^{m_{i'}}$$

とすると. $N+1$ 個の特異点 $C_{k'}, \dots, C_{k'+N+1}$ に対しては
ある $C_{i'}, C_{j'}$ ($i' < j'$) は同じ 1 重測地線 α の $m_{i'}, m_{j'}$ 重
である. よって

$$E(\alpha^{m_{i'}}) < E(\beta^{m_{j'}}) < E(\alpha^{m_{j'}}), \quad \therefore$$

α, β は $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ のうちどれかであり. 可除性補題より

$$m_{j'} = q m_{i'} \quad (q \in \mathbb{Z}) \quad \text{である.}$$

書き直せば

$$(m_{i'})^2 E(\alpha) < q^2 (m_{i'})^2 E(\beta) < (m_{j'})^2 E(\alpha)$$

$$\therefore \left(\frac{m_{i'}}{m_{j'}} \right)^2 < q^2 \frac{E(\beta)}{E(\alpha)} < 1$$

初め q を大きくすれば グロモル・マイヤーの指数定理より $m_{j'}/m_{i'}$ は 1 に収束し. $E(\beta)/E(\alpha)$ の可能性は高々有限個であるから q が整数ではありえなくなつて矛盾というわけである. 従つて. ポアンカレ以来の測地線無限存在問題は可除性補題にすべて帰着されるわけであるか. この証明に関して クリンゲンベルグは少々素朴でありすぎたようである.

に(1)に、頂点型特異点 C の、ホモロジー類 w に対応するとき w の同次元の非零境界に埋めこめるものなれば、すなわち、

$$w \in \partial w' \quad (w' \neq 0)$$

ならば、 w' の中に C' が含まれるであろうことはすぐに予想できる。し、道の空間では道の反転に対してサリバン類はホモロジーとして

$$w + \mathcal{J}w = 0, \text{ 即ち } w + \mathcal{J}w = \partial w'$$

であることがわかってゐる。また、更に、一般に特異点に対して境界の定義をして、特に頂点型特異点 C, C' に対して

$$C \in \partial C'$$

ならば C' の多重度 m' は C のそれを割り切るということも見易い。ところで、この型のモース理論では、すべての特異点の頂点型であることはありえないし、その上

$$\begin{array}{ccc} w & \in & \partial w' \\ \cup & & \cup \\ C & & \partial C' \end{array}$$

から $C \in \partial C'$ は一般には成り立たない。けれども、こうまく成立しているならば、可除性補題は困難なしに証明できるはずではある。現実には、カトウクウ創にみまように、そうはいかないし、更に悪いことには、可除性補題で作られ

る特異点 C' のエネルギーの状態を先に示した無限存在の証明に便する程には明らかではない。

すなわち、先の不等式

$$- E(C_i) < E(C'_i) < E(C_{i+1}) < E(C'_{i+1}) \dots$$

通常にみたすように 頂点型特異点 C_i, C'_i の列を作るのは実は容易ではないのである。それゆえ、不可能に近づく。この欠陥の比重は可除性補題の証明の欠陥に比して軽いものである。

III

可除性補題の修正証明、というより、クリンゲンベルグの予想の証明は、文献 [S-K] にみえるようにある部分では クリンゲンベルグ自身の、この可除性補題より強い主張に對しある部分ではそれより弱い主張に對して行われた。強化した部分、元の主張である特別な系列の頂点型特異点 C に対してのみ行われていたのに対して、あるモロジ条件の下にはある。勝手な頂点型特異点 C に対して C' をとるとしたものである。このモロジ条件は、例へば

$$\dim H_k(\wedge X, \mathbb{Z}) = 0 \text{ or } 1$$

であり、 X の球面の場合には、シュヴァルツによってこうな

ることになっている。一方、弱くなった場合は、フリンゲンバルクのその中で、新しい特異点 C' の指数は必ず C のそれより一つ多いとしたのに比べて、一つ多いか、一つ少ない。又は、二つ少ないのどこかにしかたないという点であり、又、考えている空間 ΛX の単連結でなければならぬとする点である。実は、カトワフの例は ΛX が 1 次元ホモトピーを持つ場合に作られており、フリンゲンバルクの言うようにそのフィニッシュ性ばかりによって無限測地線を排除しているのではまいと考えられる。

修正した可解性補題の証明の詳細は文献 [S-K] に由ずる。大筋は次のようである： まず、ここで使用するモース理論の S^1 作用を許すという特殊化を使って、頂点型特異点 C に対してサイクル $Z(C)$ を構成する。(注)

$Z(C)$ が 0 になる場合、新しく得られる特異点 C' の指数が一つ又は二つ減少してしまう場合である。 $Z(C)$ が 0 でなければ、それをホモロジーで考える。すると前記ホモロジー条件より、それ自身又は、それに随伴するホモロジーの境界になる。この境界を変形して、それが頂点型特異点のみを含むようにしてしまえば、そのどこかで、指数が一つ多い特異点と与えるわけである。この変形にあたって、どうしても $\pi_1(\Lambda X) = 0$ が効いて来てしまうのである。

実は文献[S-K]はⅠ部であって、そこではある種の仮定の下に上の作業を行った。この仮定を除くのはⅡ部(以降)になるが、細心にさへ行えばよく、本質的な問題が新たに発生するおそれはない。従って(修正された)可除性補題は充分一般の場合に成立すると思えてよい。かくして最後に、この種の可除性補題の下に真の無限存在を得る部分が残されるわけであるが、この部分は比較的容易であるといえ、正式な論文としては未発表なので、念のために現在準備中のものを次に掲げさせて頂く。

なお、この証明は前に引用したクリンゲンベルグの原証明とは全く異っているが、これは可除性補題によって C に対して与える C' の指数が、三つの可能性をもつことにまず起因する。実は、同義表現によって結局はクリンゲンベルグのいうように C' としては指数が一つ高い場合だけと与えられることも証明できるのである(oneway train)。クリンゲンベルグは更にこの C' のとり方に暗黙にはある非常に強い条件をつけており、それによってエネルギー不等式を得ているので、すべてカバーし切れなかった。そこで全く異なる行き方をとっているが、この方法は、任意の特異点から出発できるという強みをもっている。注意してみると、クリンゲンベルグの方法では得られなかった特

異質の分布状態に因する示唆までを含む形で.. (2次元と際
ど)非退化リーマン計量を有する球面上の閉測地線の無限存
在を明らかにすることおぼえた。もとより、ホモロジー条
件を細かく検討すれば、球面と一般の多様体にまで拡張する
ことも可能である。これについては[S-K]の第II部(以
降)に取扱う予定である。

[S-K] Y. Shikata - W. Klingenberg. On a proof
of Divisibility Lemma I. Nagoya. J.
Vol. 100. ('85) 65-81.

(その他 文献は クリンゲンベルグの黄表紙
Lectures on closed geodesics に詳しい)

注

ホモロジ-から特異点を得ただけではよく、特異点から
 ホモロジ-を得ようとした場合は、それは故郷周
 辺の一つの夢であつた。その一半が実現でき、更にこの
 事が、測地線問題解決の大きな鍵となつた。今、謹しんで、
 此幸福を祈る。