

On the classification of dihedral axial algebras with flips

東京大学大学院数理科学研究科 矢部 貴大

Takahiro Yabe

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 はじめに

axial algebra は、Greiss algebra や Majorana algebra を一般化するように [1] において定義された代数の一種であり、fusion rule によって定義される。2 元生成の Greiss algebra については [5]、Majorana algebra については [3] がその分類を行い、この結果は同じ fusion rule を持つ axial algebra についても成立することが [1] において示された。今回の成果は、fusion rule をより一般化した場合の分類を一定の条件下で行ったことである。

2 準備

以下 $\mathbb{F}$ は標数が 2 でない体とする。fusion rule とは、 $\mathbb{F}$ の部分集合 S と写像 $\star : S \times S \mapsto 2^S$ の組 $\mathcal{F} = (S, \star)$ である。

$\mathbb{F}$ 上の可換非結合的代数 M の元 a が $\mathcal{F}$ -axis であるとは、以下の 3 条件を満たすことを言う。

- (1) $M = \bigoplus_{\alpha \in \{1, 0, \xi, \eta\}} M(a, \alpha)$ である。ここで $M(a, \alpha) = \{w \in M \mid aw = \alpha w\}$ for all $a \in M$ and $\alpha \in \mathbb{F}$ とする。
- (2) $M(a, 1) = \mathbb{F}a$ である。
- (3) $M(a, \alpha)M(a, \beta) \subset \bigoplus_{\gamma \in \alpha \star \beta} M(a, \gamma)$ が任意の $\alpha, \beta \in S$ について成立する。

M とその部分集合 A の組が $\mathcal{F}$ -axial algebra であるとは、 A が M を生成し、 A の元

が全て $\mathcal{F}$ -axial algebra であることを言う。

以下 $\mathcal{F}$ は表 1 に従う fusion rule とし、 M は二元 a_0, a_1 の生成する $\mathcal{F}$ -axial algebra とする。

$\star$	0	1	ξ	η
0	0	0	ξ	η
1	0	0	ξ	η
ξ	ξ	ξ	$\{0, 1\}$	η
η	η	η	η	$\{0, 1, \xi\}$

表 1 fusion rule $\mathcal{F}(\xi, \eta)$

$(\xi, \eta) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{32})$ の時、Frobenius $\mathcal{F}$ -axial algebra は Majorana algebra となる。

a_0 と a_1 を入れ替えるような M の代数としての同型が存在すれば、これを flip と呼んで θ と書く。また、 $i = 0, 1$ について a_i の $1, 0, \xi$ -固有空間上では 1 倍、 η -固有空間上では -1 倍として働く同型が存在し、これを Miyamoto involution と呼んで τ_i と書く。

このとき、 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $a_i = (\theta \circ \tau_0)^i(a_0)$ とおくと、これらはすべて axis であり、これらの張る M の部分空間の次元を axial dimension と呼んで以下単に D と書き、 M の次元を単に d と書く。

3 主結果

主結果は次のようになる。

定理. M が flip を持ち、 $\mathcal{F}$ の標数が 5 でないか、 $D \leq 5$ であるとき、 M は表 2 の代数のいずれかと同型になる。

この表において、 $D \leq 3, d \leq 3$ である 5 個の代数は [2] において primitive axial algebra of Jordan type として定義、分類されたものであり、1A、2A、3C 等の Norton-Sakuma algebra を含むような 9 個の代数は [4] において最初に定義された。

この定理は、 D の値と axis の線型関係式により場合分けして fusion rule から積を定めることで証明できる。

D	d	Universal types M	Quotients $\bar{M}$ of M	$\bar{D}$	$\bar{d}$
1	1	$\mathbb{F}$ i.e. 1A			
2	2	$\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$ i.e. 2B			
3	3	$3C(\eta)$ cf. isomorphic to 2A when $\eta = \frac{1}{4}$ isomorphic to 3C when $\eta = \frac{1}{32}$	$3C(-1)^\times$	2	2
		$Cl^{00}(\mathbb{F}^2, b_2)$	$Cl^0(\mathbb{F}^2, b_2)$		
		$Cl^J(\mathbb{F}^2, b_\delta)$ with $\delta \neq 2$			
3	4	$III(\xi, \eta, 0)$ with $\xi \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ and $\eta \notin \{0, 1, \xi\}$ cf. isomorphic to 3A when $(\xi, \eta) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{32})$	$III(\xi, \frac{1-3\xi^2}{3\xi-1}, 0)^\times$ with $\xi \notin \{\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$	3	3
		$III(\xi, \frac{1}{2}, \alpha)$ with $\xi \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$	$III(\xi, \frac{1}{2}, -3)^\times$ $III(-1, \frac{1}{2}, \alpha)^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3$		
4	5	$IV_1(\frac{1}{4}, \eta)$ with $\eta \notin \{0, 1, \frac{1}{4}\}$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3$ cf. isomorphic to 4A when $\eta = \frac{1}{32}$	$IV_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})^\times$	4	4
		$IV_1(\xi, \frac{\xi}{2})$ with $\xi \notin \{0, 1, 2\}$	$IV_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3, 5$		
		$IV_2(\frac{1}{2}, \eta, \frac{1-4\eta}{2\eta})$ with $\eta \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$			
		$IV_2(\xi, \frac{\xi^2}{2}, \frac{1}{\xi})$ with $\xi \notin \{0, 1, 2, \pm\sqrt{2}\}$ cf. isomorphic to 4B when $\xi = \frac{1}{4}$	$IV_2(-1, \frac{1}{2}, -1)^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3$	4	4
		$IV_2(\xi, \frac{1-\xi^2}{2}, \frac{-1}{\xi+1})$ with $\xi \notin \{0, \pm 1, \pm\sqrt{-1}, -1 \pm \sqrt{2}\}$			
		$IV_3(\frac{1}{2}, 2)$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3$	$IV_3(\frac{1}{2}, 2)^\times$	4	4
5	6	$V_1(\xi, \frac{5\xi-1}{8})$ with $\xi \notin \{0, 1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{9}{5}\}$ cf. isomorphic to 5A when $\xi = \frac{1}{4}$			
		$V_2(\xi, \frac{1}{2})$ with $\xi \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$	$V_2(\xi, \frac{1}{2})^\times$	4	5
6	8	$VI_1(\xi, \frac{\xi}{2})$ with $\xi \notin \{0, 1, 2\}$	$VI_1(\frac{-2}{7}, \frac{-1}{7})^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 7$	6	7
		$VI_2(\xi, \frac{-\xi^2}{4(2\xi-1)})$ with $\xi \notin \{0, 1, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}, -4 \pm 2\sqrt{5}\}$ cf. isomorphic to 6A when $\xi = \frac{1}{4}$	$VI_2(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3$ $VI_2(\frac{1 \pm \sqrt{97}}{24}, \frac{53 \pm 5\sqrt{97}}{192})^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} \neq 3, 11$ and $\mathbb{F} \ni \sqrt{97}$ $VI_2(2, -4)^\times$ when $\text{ch}\mathbb{F} = 11$		
∞	∞	$Z(2, \frac{1}{2})$	many quotients		

表2 flipを持つ dihedral (ξ, η) -axial algebras. ただし、 $\bar{D}$ 及び $\bar{d}$ はそれぞれ $\bar{M}$ の axial dimension と次元である。

参考文献

- [1] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma, *J. Algebra* 421, (2015), 394-424.
- [2] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, *J. Algebra* 437 (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.
- [3] A. A. Ivanov, D. V. Pasechnik, Á. Seress, S. Shpectorov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4, *J. Algebra* 324 (2010), 2432-2463
- [4] F. Rehren, Generalized dihedral subalgebras from the Monster, *Trans. Amer. Math. Soc.* 369, (2017), no. 10, 6953-6986.
- [5] S. Sakuma, 6-Transposition Property of τ -involutions of Vertex Operator Algebras, *Int. Math. Res. Not.* 2007, no. 9, Art. ID mm 030, 19pp.