

Stochastic UV renormalization of a scalar model with a non-local kinetic term

Fumio Hiroshima (廣島 文生)*

九大・数理

概要

We are concerned with an ultraviolet renormalization of a scalar quantum field model with a non-local kinetic term by means of stochastic analysis.

1 はじめに

Nelson 模型は Edward Nelson により 1964 年 [Nel64a] に厳密に数学的な解析が行われた toy 模型である. Nelson 模型はシュレディンガー作用素が量子自由場と線形に相互作用している模型で, 強い相互作用をあらわす湯川型相互作用項をもったスカラー場の模型であり, 形式的には

$$\int \psi^*(x) \left(-\frac{1}{2m} \Delta_x + V(x) \right) \psi(x) dx + \int \psi^*(x) \phi(x) \psi(x) dx + \int |k| a^*(k) a(k) dk \quad (1.1)$$

と表現される. この Hamiltonian は, はじめに相互作用項 $\phi(x)$ に紫外 (UV) 切断関数を導入して自己共役作用素として定義され, しかるべき方法で, UV 切断を外して, UV 切断のない自己共役作用素が定義される. 今回は運動項 $-\frac{1}{2m} \Delta_x + V(x)$ を準相対論的シュレディンガー作用素 $\sqrt{-\Delta_x + m^2} - m + V(x)$ に置換えた Nelson 模型を考えて, その UV くりこみに向けてのアイデアを説明する. ここで紹介する手法は一般に $\Psi(-\Delta/2m) + V$ という形の作用素まで拡張できると信じている. ここで $\Psi(x)$ は $\Psi(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0+)$ となる Bernstein 関数である. $\Psi(-\Delta/2)$ は非局所的 (non-local) な作用素とよばれていて, 対応するマルコフ過程はレビー過程 X_t^Ψ で, そのパス $t \mapsto X_t^\Psi$ はジャンプをもち連続ではない.

*hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

- 伊藤の公式によるくりこみ項の導出,
- Girsanov の定理による一径数熱半群の評価,
- ハミルトニアンの下からの一様有界性の証明

をもちいて, くりこみ理論が完成すると信じている. 今回の報告は伊藤の公式までである.

2 厳密な UV 切断のくりこみ理論

(1.1) でフェルミオン ψ を 1 粒子に制限したものを考える. Fock 表現で, Nelson 模型の Hamiltonian は Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$ 上の自己共役作用素で,

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \phi(x) dx \quad (2.1)$$

で与えられる. Fock 空間とは $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}$ で定義される. ただし $\mathcal{F}^{(n)} = \otimes_{\text{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^3)$ は n -粒子部分空間を表し, $\mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}$ である. $\mathcal{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2$ で与えられる. 準相対論的 Schrödinger 作用素は

$$H_p = \sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$$

で与えられる. $a^*(f)$ と $a(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, は生成作用素と消滅作用素を表し, 正準交換関係

$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)\mathbb{1}, \quad [a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$$

を満たす. 形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k)f(k)dk$ と書く. $\omega(k) = |k|$ は dispersion relation を表す. Fock 真空を $\mathbb{1}_{\mathcal{F}} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \in \mathcal{F}$ で表し, 場の自由 Hamiltonian を H_f とかき, これは ω の第 2 量子化作用素で定義される:

$$H_f \prod_{j=1}^n a^*(f_j)\mathbb{1}_{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^n a^*(f_1) \cdots a^*(\omega f_j) \cdots a^*(f_n)\mathbb{1}_{\mathcal{F}}, \quad H_f \mathbb{1}_{\mathcal{F}} = 0.$$

形式的に

$$H_f = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$$

と表される. 相互作用は

$$\phi(x) = g \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\phi}(k) e^{ikx} a^*(k) + \hat{\phi}(-k) e^{-ikx} a(k)) dk \quad (2.2)$$

で与えられる. ここで, $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F})$ の同一視をする. この同一視の下で相互作用は

$$(\phi F)(x) = \phi(x)F(x)$$

と作用する. 関数 ϕ は Hamiltonian が作用素として well defined になるために必要であり UV 切断関数といわれる. 典型的な例として $\hat{\phi}(k) = \mathbb{1}_{|k| < \Lambda}(k)$ がある. $g \in \mathbb{R}$ は結合定数である.

命題 2.1 $\hat{\phi}/\omega^{1/2}$, $\hat{\phi}/\omega(k) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\overline{\hat{\phi}(k)} = \hat{\phi}(-k)$ を仮定する. このときハミルトニアン H は $D(H_p \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_f)$ 上で下から有界な自己共役作用素になる.

H の 1 点極限を考える. つまり $\phi(x) \rightarrow (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\hat{\phi}(k) \rightarrow \mathbb{1}$. この極限の存在は $H_p = -\frac{1}{2m}\Delta + V$ の場合に [Nel64a] で作用素論的な手法で示されているが, これは汎関数積分でも証明できる [Nel64b, GHL13]. 汎関数積分を使うことの利点は, 模型の形に依らずにくりこみ理論が展開できるところにある. 簡単のために $V = 0$ とする. $\hat{\phi}_\epsilon$ を

$$\hat{\phi}_\epsilon \rightarrow \mathbb{1} \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

という関数とする. 正則化された Hamiltonian を

$$H_\epsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \phi^\epsilon(x) dx, \quad \epsilon > 0,$$

で定義する. ここで

$$\phi^\epsilon(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\phi}_\epsilon(k)e^{-ikx}a^*(k) + \hat{\phi}_\epsilon(-k)e^{ikx}a(k)) \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) dk$$

で, 赤外切断 $\mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) \geq \lambda \\ 0, & \omega(k) < \lambda \end{cases}$ を導入した.

3 相互作用項

熱半群 e^{-TH} からきまるペア相互作用の対角線部分を求める. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ はレビー過程で, その生成子が非局所的な作用素 $\sqrt{-\Delta + m^2} - m$ となるものとする. つまり

$$(f, e^{-2T(\sqrt{-\Delta + m^2} - m)} g) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [\overline{f(X_{-T})} g(X_T)]. \quad (3.1)$$

これから Feynman-Kac 公式

$$(f, e^{-2TH_p} g) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(X_{-T})} g(X_T) e^{-\int_{-T}^T V(X_s) ds} \right] \quad (3.2)$$

が従う. さらに, 量子場と結合させた場合には次が従う.

定理 3.1 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH} f \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(X_{-T})} g(X_T) e^{\frac{\epsilon^2}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(X_t - X_s, t-s)} e^{-\int_{-T}^T V(X_s) ds} \right]. \quad (3.3)$$

ここでペア相互作用は

$$W(t, X) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\varphi}_\epsilon(k)|^2}{\omega(k)} e^{-t|\omega(k)|} e^{ikX} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) dk \quad (3.4)$$

で与えられる.

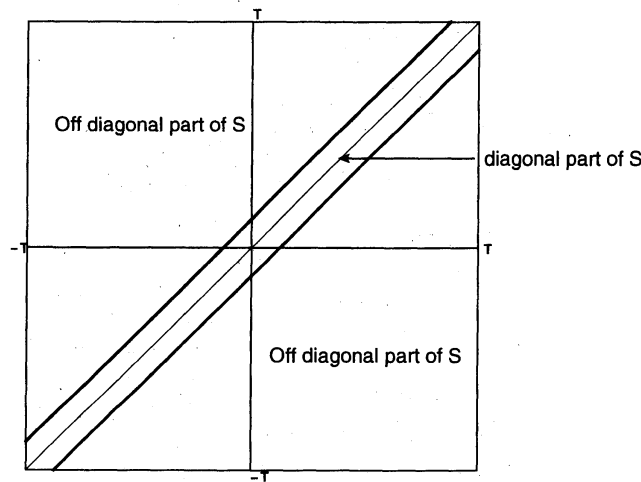


図 1: $S = \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W$ の対角線部分と非対角部分

このノートでは簡単のために以下で $V = 0$ とおく. さて, $\epsilon \downarrow 0$ の極限を考えるために UV 切断関数として

$$\hat{\varphi}_\epsilon(k) = e^{-\epsilon|k|^2/2}$$

を導入する. もちろん (3.4) で $t = 0$ のとき, つまり (3.3) で $t = s$ のときに積分に特異性があらわれる. 2重積分の正方形の積分領域でちょうど対角線部分に特異性が現れる. 2重積分を対角線部分の近傍とそれ以外の部分に分ける.

$$\int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds = 2 \int_{-T}^T dt \int_t^T ds = 2 \int_{-T}^T dt \left(\int_t^{(t+\tau) \wedge T} ds + \int_{(t+\tau) \wedge T}^T ds \right) = S^D + S^{OD} \quad (3.5)$$

とおくと, 対角線付近の積分 S^D が特異な部分である. これを確率解析的に取り除くことを考える. 簡単のため, $(t + \tau) \wedge T = u$ とおく. 対角線部分の近傍付近の積分 $\int_t^u ds W$ について考えよう. 一般にレビー過程 X_t は次のような積分表現をもつ.

$$dX_t = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} z \mathbb{1}_{|z| < 1} \tilde{N}(dtdz) + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} z \mathbb{1}_{|z| \geq 1} N(dtdz). \quad (3.6)$$

ここで $\tilde{N}(dsdz) = N(dsdz) - ds\nu(dz)$ である. $N(dsdz)$ はポアソンランダム測度で $N([0, t] \times A)$ は, X_s が時刻 t までにジャンプが $A \subset \mathbb{R}^3$ だった回数を表す. つまり $N([0, t] \times A) = \#\{s \in [0, t]; X_{s+} - X_s \in A\}$. $\nu(dz)$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上のレビー測度で, 具体的には

$$\nu(dz) = \frac{c}{|z|^4} \quad (3.7)$$

という形をしていて

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} (e^{ikz} - 1 - ikz \mathbb{1}_{|z| < 1}) \nu(dz) = -\sqrt{|k|^2 + m^2} + m \quad (3.8)$$

を満たす. $\Psi(t, X_t) = e^{-t\omega(k)} e^{ikX_t}$ に対して $d\Psi(t, X_t) = \Psi(t, X_t) - \Psi(0, 0)$ を半マルチンゲールに対する伊藤の公式を用いて計算する.

$$\eta_\epsilon(k) = \frac{e^{-\epsilon|k|^2}}{\omega(k)} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda(k)} \quad (3.9)$$

とおく.

補題 3.2 $\Psi(t, X_t) = e^{-t\omega(k)} e^{ikX_t}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \Psi(u - t, X_u - X_t) dk - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \Psi(0, 0) dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dk \eta_\epsilon(k) \int_t^u \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \Psi(s - t, X_s - X_t) (e^{ikz} - 1) \tilde{N}(dsdz) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} dk \eta_\epsilon(k) \left[\int_t^u \Psi(s - t, X_s - X_t) \left(-\omega(k) - \sqrt{|k|^2 + m^2} + m \right) ds \right]. \end{aligned}$$

証明: 半マルチンゲールに対する伊藤の公式から

$$\begin{aligned}
& \Psi(t, X_t) - \Psi(0, 0) \\
&= \int_0^t -\omega(k) e^{ikX_s} e^{-s\omega(k)} ds + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} e^{ikX_s} (e^{ikz} - 1) e^{-s\omega(k)} N(ds dz) \\
&\quad + \int_0^t \int_{0 < |z| < 1} e^{ikX_s} (e^{ikz} - 1) e^{-s\omega(k)} \tilde{N}(ds dz) + \int_0^t \int_{|z| < 1} e^{ikX_s} (e^{ikz} - 1 - ikz) e^{-s\omega(k)} ds \nu(dz) \\
&= \int_0^t -\omega(k) e^{ikX_s} e^{-s\omega(k)} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} e^{ikX_s} (e^{ikz} - 1) e^{-s\omega(k)} \tilde{N}(ds dz) \\
&\quad + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} e^{ikX_s} (e^{ikz} - 1 - ikz \mathbb{1}_{|z| < 1}) e^{-s\omega(k)} \nu(dz).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \Psi(u - t, X_u - X_t) dk - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \Psi(0, 0) dk \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} dk \eta_\epsilon(k) \left[\int_t^u -\omega(k) \Psi(s - t, X_s - X_t) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^u \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \Psi(s - t, X_s - X_t) (e^{ikz} - 1) \tilde{N}(ds dz) \right. \\
&\quad \left. + \int_t^u \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \Psi(s - t, X_s - X_t) (e^{ikz} - 1 - ikz \mathbb{1}_{|z| < 1}) ds \nu(dz) \right].
\end{aligned}$$

また

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} (e^{ikz} - 1 - ikz \mathbb{1}_{|z| < 1}) \nu(dz) = -\sqrt{|k|^2 + m^2} + m$$

だったので補題が従う. □

$\beta(k)$ を

$$\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + \sqrt{|k|^2 + m^2} - m}$$

とし,

$$\rho(t, X) = \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) e^{ikX} e^{-t\omega(k)} \beta(k) dk \tag{3.10}$$

とおく.

補題 3.3 ペア相互作用は次のように表される.

$$\begin{aligned} & \int_t^u W(s-t, X_s - X_t) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \beta(k) dk \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \int_t^u \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} e^{ik(X_s - X_t)} (e^{ikz} - 1) e^{-(s-t)\omega(k)} \beta(k) \tilde{N}(dsdz) \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) e^{ik(X_u - X_t)} e^{-(u-t)\omega(k)} \beta(k) dk. \end{aligned}$$

証明: 補題 3.2 より

$$\begin{aligned} & \rho(u-t, X_u - X_t) - \rho(0, 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \int_t^u \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} e^{ik(X_s - X_t)} (e^{ikz} - 1) e^{-(s-t)\omega(k)} \tilde{N}(dsdz) \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) e^{ik(X_u - X_t)} e^{-(u-t)\omega(k)} dk \end{aligned}$$

なので補題が従う. □

$$E = -\rho(0, 0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \beta(k) dk \quad (3.11)$$

と定める. くりこまれたハミルトニアンを

$$H_{\text{ren}} = H_\epsilon - \frac{g^2}{2} E \quad (3.12)$$

とする. 次が主定理である.

定理 3.4 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[f(X_{-T}) h(X_T) \frac{g^2}{2} e^{S_{\text{ren}}} \right]. \quad (3.13)$$

ここで

$$S_{\text{ren}} = \int_{-T}^T dt \left(\int_{-T}^t ds W(t-s, X_t - X_s) - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) \beta(k) dk \right)$$

であり,

$$\begin{aligned} S_{\text{ren}} &= \int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dk \eta_\epsilon(k) \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} e^{ik(X_s - X_t)} (e^{ikz} - 1) e^{-(s-t)\omega(k)} \beta(k) \tilde{N}(dsdz) \\ & - \int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dk \eta_\epsilon(k) e^{ik(X_T - X_t)} e^{-(T-t)\omega(k)} \beta(k) \end{aligned}$$

と表せる.

証明: 補題 3.3 と (3.5) で $\tau = T$ とおけばいい. □

すぐに計算できて

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(k) e^{ikX} e^{-|t|\omega(k)} \beta(k) dk = \frac{4\pi}{|X|} \int_\lambda^\infty \frac{e^{-\epsilon r^2} e^{-|t|r} \sin(r|X|)}{r + \sqrt{r^2 + m^2} - m} dr = \frac{a_\epsilon(t, |X|)}{|X|}$$

なので S_{ren} は

$$S_{\text{ren}} = \int_{-T}^T dt \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \left(\frac{a_\epsilon(s-t, |X_s - X_t + z|)}{|X_s - X_t + z|} - \frac{a_\epsilon(s-t, |X_s - X_t|)}{|X_s - X_t|} \right) \tilde{N}(dsdz) \\ - \int_{-T}^T dt \frac{a_\epsilon(T-t, |X_T - X_t|)}{|X_T - X_t|}.$$

ここで $\epsilon = 0$ として $\int_{-T}^T dt \frac{a_0(T-t, |X_T - X_t|)}{|X_T - X_t|}$ を計算してみよう. 簡単のために $\epsilon = m = \lambda = 0$, $|X| \neq 0$ とする. このとき $a = |t|/|X|$ とおけば,

$$a_\epsilon(t, |X|) = \frac{4\pi}{|X|} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} e^{-\frac{|t|}{|X|}u} du = \frac{4\pi}{|X|} \int_0^1 dx \int_0^\infty \cos(xy) e^{-ay} dy. \\ \int_0^\infty \cos(xy) e^{-ay} dy = \frac{1}{2} \Re \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-ay} dy = \frac{a}{4\pi} \frac{1}{x^2 + a^2}$$

なので

$$a_\epsilon(t, |X|) = \frac{1}{|X|} \int_0^1 \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{|X|} \arctan \frac{1}{a}.$$

よって

$$\frac{1}{|X|} \int_{-T}^T dt a_\epsilon(t, |X|) dt = 2|X| \int_{|X|/|T|}^\infty \frac{\arctan u}{u^2} du$$

となる. よって $|X_T - X_t| \neq 0$ のとき $\int_{-T}^T dt \frac{a_0(T-t, |X_T - X_t|)}{|X_T - X_t|}$ は収束する.

我々は次のように予想する.

- 1 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}})$ は存在する.
- 2 $|(f \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}})| \leq e^c$ となる ϵ に無関係な c が存在する.
- 3 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-2TH_{\text{ren}}}$ が存在する.

4 おわりに

H に関する模型に対するコメントと予想 1-3 の背景を述べる. UV のくりこみが厳密にできる模型はほとんど存在しない. Nelson 自身 [Nel64a] がやった方法では, ここで紹介した運動項が H_p のような準相対論的 Schrödinger 作用素になると直感的には上手くいかない. またその一般化である, 以下で紹介する H^Ψ のくりこみは, 物理を離れて確率解析的にも興味があるが, 今のところ完成していない.

Nelson 模型を時間不変なローレンツ多様体上に定義した模型のスペクトル解析をすることが出来る. この場合は運動項が non-local にはならず Nelson のやり方でうまくいき, UV くりこみが可能である [GHPS12]. また, ポーラロン模型に対しても UV くりこみが出来ることが知られている. この場合は以下で見るようにくりこみ項が不必要である. つまり, ペア相互作用の対角線部分が特異ではない. ただし, その極限に現れる自己共役作用素の具体的な形を知ることが出来ない.

4.1 ポーラロン模型

ポーラロン模型は $P \in \mathbb{R}^3$ をパラメータ (全運動量) として, $\mathcal{F}$ 上の自己共役作用素

$$H_P = \frac{1}{2} \left(P - \int k a^*(k) a(k) dk \right)^2 + \phi(0) + N, \quad P \in \mathbb{R}^3,$$

で定義される. ここで

$$N = \int a^*(k) a(k) dk$$

は個数作用素, 相互作用項は

$$\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) \frac{\hat{\varphi}(k)}{|k|} + a(k) \frac{\hat{\varphi}(-k)}{|k|} \right) dk$$

である. ここで $\hat{\varphi}(k)/|k|$ に注意. $P = 0$ とすれば, 熱半群の真空期待値は

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH_P} \mathbb{1}_{\mathcal{F}}) = \mathbb{E}^0 \left[e^{\frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(t-s, B_t - B_s)} \right]$$

となる. ここで

$$W(t, X) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2|k|^2} e^{-t} e^{ikX} dk$$

である. $\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}_\epsilon$ として, くりこみ項を計算すれば

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|^2}}{|k|^2} \frac{1}{1 + |k|^2/2} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) dk$$

になり, これは $\epsilon \downarrow 0$ で $\int_{\lambda}^{\infty} \frac{4\pi}{1+r^2/2} dr$ に収束する. つまりポーラロン模型ではくりこみ項は必要ない. 実際

$$\frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(B_t - B_s, t - s) \rightarrow S_{\infty} = \frac{\pi^{3/2}}{4} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds \frac{e^{-|t-s|}}{|B_t - B_s|}$$

に収束する. つまり

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} (\mathbb{1}_{\mathcal{F}}, e^{-2TH} \mathbb{1}_{\mathcal{F}}) = \mathbb{E}^0 [e^{S_{\infty}}]$$

となる. 実際には, $e^{-2TH_P} \rightarrow e^{-2TH_{\infty}}$ ($\epsilon \downarrow 0$) となる H_{∞} の存在が示せる [HM14].

4.2 Nelson 模型

Nelson 模型で知られていることをまとめる. ここで紹介するのは [GHL13] の結果である. Nelson 模型の Hamiltonian は

$$H_N = -\frac{1}{2} \Delta \otimes \mathbb{1} + H_f \otimes \mathbb{1} + \phi$$

で与えられる. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は 3 次元のブラウン運動を表すとする.

命題 4.1 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_N} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{\epsilon^2}{2} S} \right].$$

ここでペア相互作用は

$$S = \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W(t - s, B_t - B_s)$$

でペアポテンシャルは

$$W(t, X) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|^2}}{2\omega(k)} e^{ikX} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) dk \quad (4.1)$$

で与えられる.

次の関数を考えよう.

$$\rho_N(t, X) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|^2}}{\omega(k)} e^{ikX} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda}(k) \beta_N(k) dk, \quad \epsilon \geq 0.$$

ここで

$$\beta_N(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}.$$

補題 4.2 (1) 関数 S_{ren} で次を満たすものが存在する.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^x \left[e^{\frac{g^2}{2}(S-2T\rho_N(0,0))} \right] = \mathbb{E}^x \left[e^{\frac{g^2}{2}S_{\text{ren}}} \right].$$

(2) 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, と $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [f(B_{-T})h(B_T)e^{\alpha(S-2T\rho_N(0,0))}] \leq \|f\| \|h\| e^{c_{\text{ren}}(\alpha^2 T + \alpha T + \alpha)}$$

を満たす定数 c_{ren} が存在する.

Nelson Hamiltonian の UV 切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_N + \frac{g^2}{2}\rho_N(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

補題 4.3 定数 $C \in \mathbb{R}$ があって $H_N + \frac{g^2}{2}\rho_N(0,0) > C$ が $\epsilon > 0$ に一様に成り立つ.

$$E_N = -\rho_N(0,0) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|^2}}{\omega(k)} \mathbb{1}_{|k| \geq \lambda} \beta_N(k) dk$$

としよう.

定理 4.4 次を満たす下から有界な自己共役作用素 H_N^{ren} が存在する.

$$\text{s-}\lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-t(H_N - \frac{g^2}{2}E_N)} = e^{-tH_N^{\text{ren}}}, \quad t \geq 0.$$

証明: $F, G \in \mathcal{H}$ として, $C_\epsilon(F, G) = (F, e^{-t(H_N + (g^2/2)\rho_N(0,0))}G)$ としよう. ある稠密な $D \subset \mathcal{H}$ があって $F, G \in D$ に対して $C_\epsilon(F, G)$ が $\epsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる. 一様な不等式

$$\|e^{-t(H_N + (g^2/2)\rho_N(0,0))}\| < e^{-tC}$$

と D が $\mathcal{H}$ で稠密ということから $\{C_\epsilon(F, G)\}_\epsilon$ がコーシー列となることがわかる. その収束先を $C_0(F, G) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} C_\epsilon(F, G)$ とする. そうすれば $|C_0(F, G)| \leq e^{-tC} \|F\| \|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で $C_0(F, G) = (F, T_t G)$, $F, G \in \mathcal{H}$, となるものが存在する. よって $\text{s-}\lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-t(H_N + (g^2/2)\rho_N(0,0))} = T_t$. さらに $T_t T_s = T_{t+s}$ が簡単に従う. $e^{-t(H_N + (g^2/2)\rho_N(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称. また $(F, T_t G)$ は $t=0$ で $F, G \in D$ に対して連続になることもわかる. D は $\mathcal{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t=0$ で強連続になる. 故に下から有界な自己共役作用素 H_N^{ren} で $T_t = e^{-tH_N^{\text{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる. $\square$

4.3 Bernstein 関数と Nelson 模型の一般化

以上述べたことは、もっと一般に $\Psi(-\Delta/2) + V$ という運動項をもった模型でも同様に示すことが出来る。ここで $\Psi \in C^\infty((0, \infty))$ は Bernstein 関数といわれる関数で、 f が Bernstein 関数とは $f \in C^\infty((0, \infty))$ で $(-1)^n f^{(n)}(x) \leq 0$, $n \geq 1$, を満たすものである。典型的な例は $\Psi(u) = u^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $\psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - M$, $\Psi(u) = 1 - e^{-\beta u}$, $\beta > 0$, である。そこで

$$H^\Psi = (\Psi(-\Delta/2) + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \phi$$

という作用素を考えてくりこみをおこなう。Bernstein 関数とレビー過程の密接な関係は非常によく知られている。

$$\Psi(k) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} (e^{ikz} - 1 - (ikz)\mathbb{1}_{|z|<1}) \nu(dz)$$

と表せる、レビー測度 $\nu(dz)$ が存在することが知られているからである。また $\Psi(-\Delta)$ を生成子にもつレビー過程 X_t^Ψ が存在する。それはもちろん

$$dX_t^\Psi = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} z \mathbb{1}_{|z|<1} \tilde{N}(dsdz) + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} z \mathbb{1}_{|z|\geq 1} N(dsdz)$$

と積分表示される。 H^Ψ に付随したペア相互作用も

$$\int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(t-s, X_t^\Psi - X_s^\Psi),$$

そして、ペアポテンシャルは

$$W(t, X) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{ikX} e^{-|t|\omega(k)} dk$$

と表すことが出来る。あとは、 $H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus \phi(x) dx$ のくりこみと同じ議論をする。

参考文献

- [GHPS12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012), 305–322.
- [GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, preprint 2013.

- [HM14] F. Hiroshima and T. Miyao, Ultraviolet renormalization of the translation invariant Nelson Hamiltonian through functional integration, preprint 2014.
- [Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.
- [Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), page 87. MIT Press, 1964.