

Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution for generalized Kac-Moody algebras

京大・理 内藤 聡 (Satoshi Naito)

1. Notation

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を次の条件 (1)-(3) を満たす n 次正方行列 (GGCM) とする。

(C1) $a_{ii} = 2$, or $a_{ii} \leq 0$;

(C2) $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$), $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ if $a_{ii} = 2$;

(C3) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$.

そして、 $\mathfrak{g}(A)$ を、この GGCM A に付随する generalized Kac-Moody algebra (= GKM algebra)、 $\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra、 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ を simple root の全体、 $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}$ を simple coroot の全体とする。このとき、 $\mathfrak{g}(A)$ は、root space 分解 : $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ を持つ。ここで、 $\mathfrak{g}_\alpha$ はルート $\alpha \in \Delta^\pm \subset \mathfrak{h}^*$ に対応する root space である。

今、 J を、添字集合 I の部分集合で有限型のもの、即ち対応する A の部分行列 $A_J := (a_{ij})_{i,j \in J}$ が (古典的な) 有限型の Cartan 行列になる様なものとし、これに対して次の $\mathfrak{g}(A)$ の部分環と、Weyl 群 W の部分集合を定義する。

$$\mathfrak{u}^\pm := \sum_{\alpha \in \Delta^+(J)}^\oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \quad \mathfrak{m} := \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_J^+}^\oplus (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}^+,$$

$$W(J) := \{w \in W \mid \Delta^+ \cap w(\Delta^-) \subset \Delta^+(J)\},$$

where $\Delta_J^+ := \Delta^+ \cap (\sum_{i \in J} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i)$, $\Delta^+(J) := \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$.

2. The existence of the BGG resolution for GKM algebras

今、 $P^+ := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 \text{ } (i \in I), \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ if } a_{ii} = 2\}$, $P_J^+ := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \mu, \alpha_j^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ } (j \in J)\}$ とし、 $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P^+$) を、 Λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $\mathfrak{g}(A)$ -加群、又 $\lambda \in P_J^+$ に対して、 $L_m(\lambda)$ を、 λ を最高ウェイトとする既約 $\mathfrak{m}$ -加群、 $V_m(\lambda) = U(\mathfrak{g}(A)) \otimes_{U(\mathfrak{p})} L_m(\lambda)$ を、 λ を最高ウェイトとする generalized Verma module とする。特に、 $J = \emptyset$ の場合には $V_{\mathfrak{h}}(\lambda) = V(\lambda)$ は、Verma module である。

$\mathfrak{g}(A)$ が有限次元半単純リー環の場合の、Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果の拡張として次の Theorem が得られる。

Theorem 2.1. (存在定理) $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能な GGCM とする。このとき、 $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P^+$) に対して、次の、 $\mathfrak{g}(A)$ -加群 $C_p(\Lambda)$ と $\mathfrak{g}(A)$ -準同型 ∂_p から成る完全系列が、存在する。

$$0 \longleftarrow L(\Lambda) \xleftarrow{\partial_0} C_0(\Lambda) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\Lambda) \xleftarrow{\partial_2} C_2(\Lambda) \xleftarrow{\partial_3} \cdots,$$

$$\text{where } C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w \in W(J), \beta \in \mathcal{S}(\Lambda) \\ \ell(w) + ht(\beta) = p}}^{\oplus} V_{\mathfrak{m}}(w(\Lambda + \rho - \beta) - \rho) \quad (p \geq 0).$$

ここで、 $\mathcal{S} := \{\text{sum of distinct pairwise perpendicular simple roots } \alpha_i \text{ with } a_{ii} \leq 0\}$, $\mathcal{S}(\Lambda) := \{\beta \in \mathcal{S} \mid \beta \text{ is perpendicular to } \Lambda\}$ であり、 ρ は、 $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = (1/2) \cdot a_{ii}$ ($i \in I$) なる $\mathfrak{h}^*$ の元である。

Theorem 2.1 の証明に於いては、次の Lemma が重要な役割を果たす。

Lemma 2.2. $\Lambda \in P^+$, $w_i \in W(J)$, $\beta_i \in \mathcal{S}(\Lambda)$ ($i = 1, 2$) とする。このとき、

$$\text{Ext}_{(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m})}^1(V_{\mathfrak{m}}(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho), V_{\mathfrak{m}}(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho)) \neq 0,$$

であれば、 $\ell(w_1) + ht(\beta_1) \not\leq \ell(w_2) + ht(\beta_2)$ 。

3. Homology vanishing theorems

Theorem 2.1 から、以下のホモロジー消滅定理が得られる。

Proposition 3.1. $\Lambda \in P^+$, $\mu \in P_J^+$ とする。このとき、 $\mu \neq w(\Lambda + \rho - \beta) - \rho$ for any $w \in W(J)$, $\beta \in \mathcal{S}(\Lambda)$ であれば、

$$\text{Tor}_n^{\mathfrak{g}(A)}(L^*(\Lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$\text{Tor}_n^{(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m})}(L^*(\Lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

ここで、 $L^*(\Lambda)$ は、 $-\Lambda$ を lowest weight とする既約 lowest weight $\mathfrak{g}(A)$ -加群である。

Theorem 3.2. $\Lambda_1, \Lambda_2 \in P^+$. 今、 $\Lambda_1 - \Lambda_2 \neq \beta_1 - \beta_2$ for any $\beta_i \in \mathcal{S}(\Lambda_i)$ ($i = 1, 2$) とする。このとき、

$$\text{Tor}_n^{\mathfrak{g}(A)}(L^*(\Lambda_1), L(\Lambda_2)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$\text{Tor}_n^{(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m})}(L^*(\Lambda_1), L(\Lambda_2)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

Corollary 3.3. $\Lambda \in P^+$. 今、 $\Lambda \neq \beta_1 - \beta_2$ for any $\beta_1 \in \mathcal{S}(\Lambda), \beta_2 \in \mathcal{S}$ とする。
このとき、

$$H_n(\mathfrak{g}(A), L(\Lambda)) = 0 \quad (n \geq 0),$$

$$H_n(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, L(\Lambda)) = 0 \quad (n \geq 0).$$

又、 $\Lambda = 0$ の場合の relative Lie algebra homology $H_n(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ に関しては、次の Theorem が成り立つ。

Theorem 3.4.

$$H_{2s+1}(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C}) = 0 \quad (s \geq 0),$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{2s}(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}, \mathbb{C})$$

= the number of elements of the set $\{(w, \beta) \in W(J) \times \mathcal{S} \mid \ell(w) + ht(\beta) = s\}$

= the number of $\mathfrak{m}$ -irreducible components

in the Lie algebra homology $H_s(\mathfrak{u}^-, \mathbb{C}) \quad (s \geq 0)$.

4. Verma module embeddings and the strong BGG resolution for GKM algebras

Theorem 2.1 では、map $\partial_p \ (p \geq 0)$ の形については何も述べられていなかった。ここでは、resolution を、 $J = \emptyset$ の場合に explicit に構成し、それが Theorem 2.1 に於けるものと equivalent な事を示す。

$\Pi^{re} := \{\alpha_i \in \Pi \mid a_{ii} = 2\}$, $\Pi^{im} := \{\alpha_i \in \Pi \mid a_{ii} \leq 0\}$ と置き、 $\Delta^{re} := W(\Pi^{re})$ を real root の全体、 $\Delta^{im} := \Delta \setminus \Delta^{re}$ を imaginary root の全体とする。

Definition 4.1. $w_1, w_2 \in W$, $\gamma \in \Delta^{re} \cap \Delta^+$ に対して、 $w_1 = r_\gamma w_2$ (r_γ は γ の定める simple reflection) かつ $\ell(w_1) = \ell(w_2) + 1$ であるとき $w_1 \xleftarrow{\gamma} w_2$ と書き、又このような $\gamma \in \Delta^{re} \cap \Delta^+$ が存在するとき単に $w_1 \leftarrow w_2$ と書く。さらに、 $w, w' \in W$ に対し、 $w = w'$ 又は

$$w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_r \leftarrow w_{r+1} = w'$$

なる $w_1, \dots, w_r \in W$ が存在するとき、 $w \leq w'$ と書く。

Definition 4.2. $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}$, $\alpha_j \in \Pi^{im}$ に対して、 $\beta_1 = \beta_2 + \alpha_j$ なるとき $\beta_1 \xleftarrow{\alpha_j} \beta_2$ と書き、又このような $\alpha_j \in \Pi^{im}$ が存在するとき単に $\beta_1 \leftarrow \beta_2$ と書く。さらに、 $\beta = \sum_{k \in K} \alpha_k$, $\beta' = \sum_{l \in L} \alpha_l \in \mathcal{S}$ に対して、 $K \supset L$ であるとき $\beta \geq \beta'$ と書く。

Definition 4.3. $(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2) \in W \times \mathcal{S}$ に対して、

$$w_1 \leftarrow w_2 \text{ and } \beta_1 = \beta_2 \text{ 又は } w_1 = w_2 \text{ and } \beta_1 \leftarrow \beta_2$$

なるとき $(w_1, \beta_1) \frown (w_2, \beta_2)$ と書く。

Remark 4.4. 各 $(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2) \in W \times \mathcal{S}$ に対して、

$$(w_1, \beta_1) \frown (w, \beta) \frown (w_2, \beta_2)$$

なる $(w, \beta) \in W \times \mathcal{S}$ の数は 0 か 2 である。

Proposition 4.5. $\Lambda \in P^+$, $w_1, w_2 \in W$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}(\Lambda)$ とする。このとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho), V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho)) \leq 1.$$

Remark 4.6. 勝手な $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ について、 $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(\lambda), V(\mu))$ が non-zero であれば、 f は injective である。そこで、このとき $V(\lambda) \subset V(\mu)$ と書く。

Proposition 4.7. $\Lambda \in P^+$, $w_1, w_2 \in W$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{S}(\Lambda)$ とする。このとき、

$$V(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho) \subset V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho)$$

$$\Updownarrow$$

$$w_1 \leq w_2, \beta_1 \geq \beta_2$$

$$\Updownarrow$$

$$[V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho) : L(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho)] \neq 0.$$

ここで、 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して、 $[V(\lambda) : L(\mu)]$ は、 $L(\mu)$ の $V(\lambda)$ における重複度を表す。

Definition 4.8. $\{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2), (w_3, \beta_3), (w_4, \beta_4)\}$ なる $W \times \mathcal{S}$ の元から成る四つ組が “square” であるとは、

$$(w_1, \beta_1) \frown (w_i, \beta_i) \frown (w_4, \beta_4) \quad (i = 2, 3), \quad (w_2, \beta_2) \neq (w_3, \beta_3)$$

なる事である。

Lemma 4.9. 各 curvearrow $(w_1, \beta_1) \curvearrowright (w_2, \beta_2)$ に対して、 $c((w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)) \in \{1, -1\}$ なる数を対応させて、如何なる “square” $\{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2), (w_3, \beta_3), (w_4, \beta_4)\}$ についても、その4つの curvearrow に対応する数の積が -1 となる様にできる。

さて、Theorem 2.1 の resolution で $J = \emptyset$ の場合には、

$$C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w \in W, \beta \in \mathcal{S}(\Lambda) \\ \ell(w) + ht(\beta) = p}}^{\oplus} V(w(\Lambda + \rho - \beta) - \rho) \quad (p \geq 0)$$

であった。今、各 $(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2) \in W \times \mathcal{S}$ such that $w_1 \leq w_2$ and $\beta_1 \geq \beta_2$ に対して、

$$0 \neq \imath_{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)} \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}(A)}(V(w_1(\Lambda + \rho - \beta_1) - \rho), V(w_2(\Lambda + \rho - \beta_2) - \rho))$$

を “compatible” になる様に取り、固定する。このとき、次の Theorem が成り立つ。

Theorem 4.10. $\Lambda \in P^+$ とする。各 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $d_p: C_p(\Lambda) \longrightarrow C_{p-1}(\Lambda)$ を次の様に定める。 $(d_0: V(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda))$ は 標準的商写像である。)

$$d_p := \sum_{\substack{\ell(w_1) + ht(\beta_1) = p \\ \ell(w_2) + ht(\beta_2) = p-1}} d_{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)}^p \imath_{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)},$$

where $d_{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)}^p := c((w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2))$ if $(w_1, \beta_1) \curvearrowright (w_2, \beta_2)$,

and $d_{(w_1, \beta_1), (w_2, \beta_2)}^p := 0$ otherwise.

このとき、次の sequence は exact であり、Theorem 2.1 に於ける exact sequence と equivalent である。

$$0 \longleftarrow L(\Lambda) \xleftarrow{d_0} C_0(\Lambda) \xleftarrow{d_1} C_1(\Lambda) \xleftarrow{d_2} C_2(\Lambda) \xleftarrow{d_3} \cdots,$$

$$\text{where } C_p(\Lambda) = \sum_{\substack{w \in W, \beta \in \mathcal{S}(\Lambda) \\ \ell(w) + ht(\beta) = p}}^{\oplus} V(w(\Lambda + \rho - \beta) - \rho) \quad (p \geq 0).$$

REFERENCES

1. I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$ -modules*, in "Lie groups and their representations," Hilger, London, 1975, pp. 21–64.
2. R. Borcherds, *Generalized Kac-Moody algebras*, J. Algebra, **115** (1988), 501–512.
3. H. Garland and J. Lepowsky, *Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas*, Invent. Math., **34** (1976), 37–76.
4. G. Hochschild and J.-P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math., **57** (1953), 591–603.
5. V. G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras (3rd edition)," Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
6. S. Kumar, *A homology vanishing theorem for Kac-Moody algebras with coefficients in the category O* , J. Algebra, **102** (1986), 444–462.
7. S. Kumar, *Extension of the category O^g and a vanishing theorem for the Ext functor for Kac-Moody algebras*, J. Algebra, **108** (1987), 472–491.
8. A. Rocha-Caridi, *Splitting criteria for $\mathfrak{g}$ -modules induced from a parabolic and the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution of a finite dimensional, irreducible $\mathfrak{g}$ -module*, Trans. Amer. Math. Soc., **262** (1980), 335–366.
9. A. Rocha-Caridi and N. R. Wallach, *Projective modules over graded Lie algebras. I*, Math. Z., **180** (1982), 151–177.