

超関数への数値的接近

日大 理工 竹澤 照

序. 1920年後半に Dirac は連続固有値の直交規格化の関係を離散固有値のそれと全く同様に形式的に扱うために、無限大の量を表わす $\delta(x)$ を導入し、

$$\delta(x)=0 \ (x \neq 0), \ \delta(0)=+\infty, \ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

と定義した。しかしこのような性質をもつ通常の関数は存在しない。にもかかわらず彼は名著「量子力学」の中で数学的には正しいとはいえない演算で、物理的には正しい種々の結果を与えている。Dirac 自身、 $\delta(x)$ は象徴的な意味のものであって、通常の関数のようにおのおのの x の値に対して関数の値が定まるものではなく、積分 $\int_{-\infty}^0 \delta(x) dx = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$ に意味を持たせ、通常の関数と区別し *improper function* と呼んでいる。この奇形な関数が Dirac の delta 関数と呼ばれ導入された最初の超関数である。以来、数学的正当性を与える幾多の研究が多くの数学者によってなされ、超関数の理

論が飛躍的に進歩し、1950年に Schwartz の *distribution*²⁾ で一応の集大成をみた。^{注)} しかし関数空間・位相等の定義や記号の使用が、数学者以外には難解で近き難いものであった。1955年に Mikusinski³⁾ の考へを受けついで Temple⁴⁾ が超関数, *generalized function* を関数列によつて定義するという古典解析学で使われる概念だけを用いて平易な形に表現しなおした。更に Lighthill⁵⁾ や Gel'fand⁶⁾ によつて簡単化され、一層近き易いものとなった。更に一歩進め、筆者は宇野・洪⁷⁾ の考へを受けつぎ、現実の問題の中での超関数を扱い、それらへの数値的接近を試みたものである。即ち超関数は象徴的なものであっておのおのの点での関数の値が定まるものではないとすることに逆らい、超関数といえども関数値が定まり、グラフも描けることを主張する。本論文ではやゝ一種フレドホルム型積分方程式の解に現われる超関数及熱伝導方程式の初期値問題の逆問題として、初期値に現われる超関数を扱う。特に衝撃・パルス、一点集中応力・トルクなどとしていたるところで登場するデルタ関数及その導超関数について例示し、その直観を与へ、より一層超関数を身近なものとする。

注) その後の発展に佐藤の *hyper function* や *ultra-hyper function* がある。

§ 1 Temple は超関数を「基本列 $\{f_\nu(x)\}$ は一つの超関数 $f(x)$ を定める」と定義している。

基本列とは $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x) F(x) dx$

が存在するような関数列 $\{f_\nu(x)\}$ のことである。但し $f_0(x)$ も $f(x)$ もいたるところ微分可能であり且すべて $\alpha \in \mathbb{N}$ に対して関数自身とそのすべての導関数が $|x| \rightarrow \infty$ で $O(|x|^{-N})$ とする(このような性質をもつ関数を良い関数又は急減少関数と呼ぶ)。又関数列 $\{f_\nu(x)\}$ が超関数 $f(x)$ の導超関数を与へるものであるとしている。この操作を繰り返すことにより $f(x)$ の m 階導超関数 $f^{(m)}(x)$ を定める基本列を作ることが出来る。良く知られているように

関数列 $\left\{ \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} \right\},$
 $\left\{ \nu/\pi (1+\nu^2) \right\}$
 $\left\{ \sin \nu x / \pi x \right\}$

は $\delta(x)$ に収束する基本列である。以下に $\left\{ \frac{d^m}{dx^m} f_\nu(x) \right\}$ を列挙し、それらを図示する。

関数列 $\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}$ に対して:

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi} x e^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}'' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi} (1-2\nu x^2) e^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}''' = \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} (12\nu^2 x - 8\nu^3 x^3)$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2}\}^{(IV)} = \sqrt{\nu/\pi} e^{-\nu x^2} (12\nu^2 - 48\nu^3 x^2 + 16\nu^4 x^4)$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}^{(V)} = \sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}(-120\nu^3x+160\nu^4x^3-32\nu^5x^5)$$

fig 1 の上 がこれらを図示したものである。 ($\nu=5, 15, 45$)

関数列 $\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}$ 但し $\epsilon=1/\nu$ に対して

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}' = -2\epsilon x/\pi(x^2+\epsilon^2)^2$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}'' = -2\epsilon(-3x^2+\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^3$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}''' = -24\epsilon x(x^2-\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^4$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}^{(IV)} = -24\epsilon x(x^2-\epsilon^2)/\pi(x^2+\epsilon^2)^4$$

$$\{\epsilon/\pi(x^2+\epsilon^2)\}^{(V)} = -240\epsilon(3x^5-10\epsilon^2x^3+3\epsilon^4x)/\pi(x^2+\epsilon^2)^6$$

fig 1. の中段がこれらを図示したものである。

($\nu=5, 10, 15$)

関数列 $\{\sin \nu x/\pi x\}$ に対して

$$\{\sin \nu x/\pi x\}' = (\nu x \cos \nu x - \sin \nu x)/\pi x^2$$

$$\{\sin \nu x/\pi x\}'' = \{-2\nu x \cos \nu x + (2-\nu^2 x^2) \sin \nu x\}/\pi x^3$$

$$\{\sin \nu x/\pi x\}''' = \{\nu x(6-\nu^2 x^2) \cos \nu x - 3(2-\nu^2 x^2) \sin \nu x\}/\pi x^4$$

$$\{\sin \nu x/\pi x\}^{(IV)} = \{(-24\nu x + 4\nu^3 x^3) \cos \nu x + (24-12\nu^2 x^2 + \nu^4 x^4) \sin \nu x\}/\pi x^5$$

$$\begin{aligned} \{\sin \nu x/\pi x\}^{(V)} = & \{(120\nu x - 20\nu^3 x^3 + \nu^5 x^5) \cos \nu x \\ & + (-120 + 60\nu^2 x^2 - 5\nu^4 x^4) \sin \nu x\}/\pi x^6 \end{aligned}$$

fig 1. の下段がこれらを図示したものである。 ($\nu=7$)

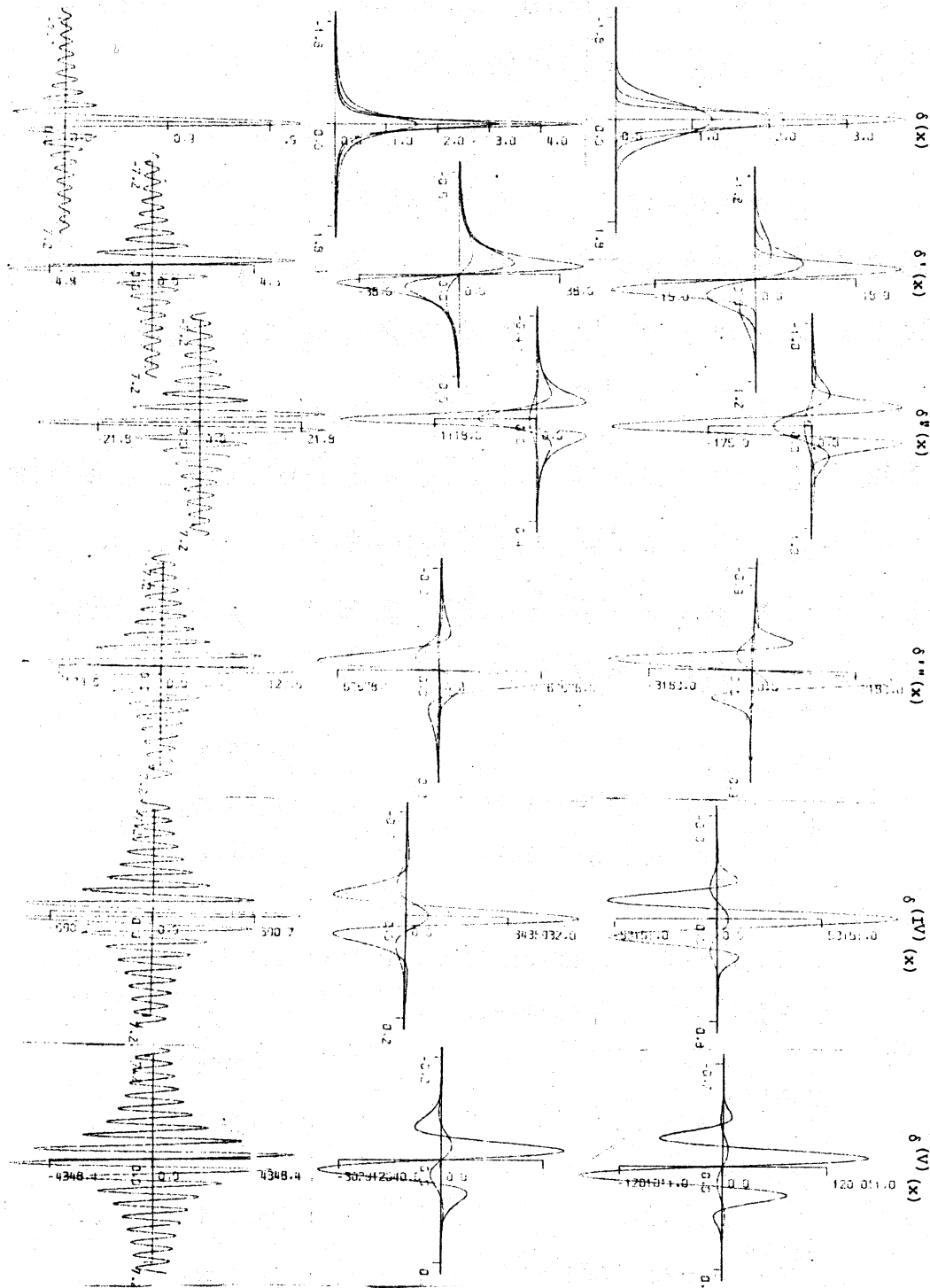


Fig. 1

2.2 区間 $(0, 1)$ 内に有限個の点 $a_1, a_2, \dots, a_L$ で $g(x)$ 又は $g^{(m)}(x)$ に $\sigma_m(a_\ell)$ だけの跳び即ち

$$\sigma_m(a_\ell) = g^{(m)}(a_\ell+) - g^{(m)}(a_\ell-)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad \ell = 1, 2, \dots, L$$

の有る関数を積分方程式の右辺に与へる。すると前述の積分方程式の解の中の $g^{(m)}(x)$ を超関数の意味での微分

$$g^{(m)}(x) = g^{(m)}(x) + \sum_{\ell=1}^L \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_p(a_\ell) \delta^{(m-1-p)}(x-a_\ell)$$

で置き換へることによつて、 δ 及其導超関数 $\delta^{(m)}$ を含む解が得られる。但し上式での $g^{(m)}(x)$ は点 $a_\ell, \ell=1, 2, \dots, L$ を除いたところでの通常 m 階導関数である。以下に区間 $(0, 1)$ 内に跳びのある関数を列挙する。

$$g-1 \quad g(x) = \begin{cases} 48x^2 & , 1/4 > x > 0 \\ -8(x+1)(x-11/20) & , 1/2 > x > 1/4 \\ 8(x-2)(x-9/20) & , 3/4 > x > 1/2 \\ 16(-1) & , 1 > x > 3/4 \end{cases}$$

$$\sigma_0(1/2) = -1.2, \sigma_2(1/2) = 32, \sigma_1(1/4) = -31.6, \sigma_2(1/4) = -112$$

$$\sigma_1(3/4) = 15.6, \sigma_2(3/4) = 16$$

$$g-2 \quad g(x) = \begin{cases} -x & , 0 < x < 1/4 \\ 1-x & , 1/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\sigma_0(1/4) = 1$$

$$g-3 \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & , 0 < x < 1/4 \\ -x/2 + 1/4 & , 1/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\sigma_1(1/4) = 1, g(1) = -1/4$$

§2. 第一種フレドホルム型積分方程式

2.1 $K(x, y)$ が対称核のときの第一種フレドホルム型積分方程式
$$\int_0^1 K(x, y) h(y) dy = g(x) \quad (1)$$

の解 $h(x)$ に含まれる超関数を扱うことにする。ここで扱う核(対称核なる故 $x \geq y$ のみ記す)はそれに対する解を列挙する。

K-1 $L[u] = 2u'' - 2u$ の Green 関数

$$K(x, y) = e^{-|x-y|}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}[g(0) - g'(0)]\delta(x) + \frac{1}{2}[g(1) + g'(1)]\delta(x-1)$$

K-2 $u(0) = u(1) = 0$ ときの $L[u] = u''$ の Green 関数

$$k(x, y) = y(1-x), x \geq y$$

$$h(x) = -g''(x) - g(0)\delta'(x) - g(1)\delta'(x-1)$$

K-3 $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1)$ ときの $L[u] = u^{(IV)}$ の Green 関数

$$K(x, y) = \frac{1}{6}y(x-1)(x^2 + y^2 - 2x), x \geq y$$

$$h(x) = g^{(IV)}(x) + g(0)\delta'''(x) + g''(0)\delta'(x) - g(1)\delta'''(x-1) - g''(1)\delta'(x-1)$$

K-4 $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = u^{(IV)}(0) = u^{(IV)}(1) = 0$ ときの Green 関数

$$L[u] = u^{(IV)}$$

$$K(x, y) = \frac{1}{360}y(x-1)\{-3x^4 + 12x^3 - (10y^2 + 8)x + (20y^2 - 8)x - 3y^4\}, x \geq y$$

$$h(x) = -g^{(VI)}(x) - g(0)\delta^{(V)}(x) - g''(1)\delta'''(x-1) + g^{(IV)}(1)\delta'(x-1)$$

K-5 Poisson 核

$$K(x, y) = \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(x-y)+\gamma^2}, 0 < \gamma < 1 \quad (\gamma = 0.75 \text{ とした})$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k b_k \sin 2k\pi x \quad \text{のとき}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi x$$

$$g-4 \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ x^2/2 + x/4 - 1/32 & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_2(1/4)=1, g''(0)=2, g(1)=5/4, g''(1)=1$$

$$g-5 \quad g(x) = \begin{cases} 27x^3 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ (x-1)(-37x^2+11x-1) & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_3(1/4)=-384, g''(1)=-126$$

$$g-6 \quad g(x) = \begin{cases} 81x^4 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ -175x^4 + 256x^3 - 96x^2 + 16x - 1 & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_4(1/4)=-6144, g^{(IV)}(0)=1944, g^{(IV)}(1)=-4200$$

$$g-7 \quad g(x) = \begin{cases} 243x^5 & , 0 \leq x \leq 1/4 \\ (x-1)(-781x^4 + 499x^3 - 141x^2 + 19x - 1) & , 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma_5(1/4)=-122880, g''(1)=-3780, g^{(IV)}(1)=-63000$$

g-8 Weierstrass の関数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x \pi), (a=13, b=0.5, k \text{ は } 50 \text{ までとした})$$

2.3 三角級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\pi x/\ell} \quad (2)$$

は次のとき、一つの超関数 $f(x)$ を定める。

i) $|k| \rightarrow \infty$ のとき、ある N を選んで $C_k = O(|k|^N)$ と書けるとき、(2) は一つの Schwartz distribution $f(x)$ に収束する

ii) $|k| \rightarrow \infty$ のとき、任意の $C > 1$ に対して $C_k = O(C^{|k|})$ と書けるとき、(2) は一つの hyperfunction $f(x)$ に収束する。

例へば

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos(2k-1) 2\pi x = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta'(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta''(2\pi x - \pi/2 + k\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x = 1/2 \cot \pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \cos 2\pi k x = 1/4 \cos^2 \pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3 \cos 2\pi k x = (\cos^2 \pi x + 3 \sin^2 \pi x) / 8 \cos^4 \pi x$$

これらに関する $g(x)$ を列挙する

$$\begin{aligned} g-9 \quad g(x) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\pi x \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\pi x + \pi x \log \pi x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi x)^{2k+1}}{k(2k+1) \cdot 2 \cdot (2k)!} |B_{2k}| \right\} \end{aligned}$$

但し B_{2k} はベルヌーイ数, k は 20 までとった.

$$g-10 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^{k-1} \sin(2k-1) 2\pi x$$

$$g-11 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^{n-1} k \cos(2k-1) 2\pi x$$

$$g-12 \quad g(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k-1} (-1)^n k^2 \sin(2k-1) 2\pi x$$

$$g-13 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k 2\pi x$$

$$g-14 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r^k k \cos k 2\pi x$$

$$g-15 \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k r^k k^3 \cos k 2\pi x$$

2.4 数値解法

積分方程式の左辺を数値積分公式で離散化し, それと同数の点 x_i を与へ, 連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^n W_j K(x_i, y_j) h(y_j) = g(x_i), i=1, 2, \dots, n$$

を LU 分解法 (Doolittle 法) で解くことにする.

台形則: $W_0 = W_n = 1/2, W_j = 1, j=1, \dots, n-1$

$$x_i = i/n, \quad i=0, 1, \dots, n$$

$$y_j = j/n, \quad j=0, 1, \dots, n$$

中点則: $w_j = 1, \quad j=1, 2, \dots, n$

$$x_i = i/n - 1/2n, \quad i=1, 2, \dots, n$$

数値計算は全て16進8桁(10進で約17.1桁)の浮動小数点演算で行う。

2.5 計算例

核	$g(x)$	$h(x)$	数値解(数値積分式)
K-1	$g-1$	$1/2g(x) - 1/2g''(x)$ $+15.8\delta(x-1/4) + 0.6\delta'(x-1/2)$ $+7.8\delta(x-3/4) + 8\delta(x-1)$	table 1-1(台形則)
K-1	$g-1$	$+7.8\delta(x-3/4) + 8\delta(x-1)$	table 1-2(中点則)
K-2	$g-1$	$-g''(x) + 31.6\delta(x-1/4)$ $+1.2\delta'(x-1/2) - 15.6\delta(x-3/4)$	table 2 (")
K-3	$g-2$	$\delta'''(x-1/4)$	table 3 (")
K-3	$g-3$	$\delta''(x-1/4) + 1/4\delta'(x-1)$	table 4 (")
K-3	$g-4$	$\delta'(x-1/4) + 2\delta'(x)$ $-5/4\delta'''(x-1) - \delta'(x-1)$	table 5 (")
K-3	$g-5$	$-384\delta(x-1/4) + 126\delta'(x-1)$	table 6 (")
K-4	$g-2$	$\delta^{(V)}(x-1/4)$	table 7 (")
K-4	$g-3$	$-\delta^{(IV)}(x-1/4) - 1/4\delta^{(V)}(x-1)$	table 8 (")

K-4	g-4	$-\delta'''(x-1/4)-2\delta''(x)+\delta'(x-1)$	table 9 (中点則)
K-4	g-5	$384\delta''(x-1/4)-126\delta''(x-1)$	table 10 (")
K-4	g-6	$6144\delta'(x-1/4)-1944\delta'(x)-4200\delta'(x-1)$	table 11 (")
K-4	g-7	$122880\delta(x-1/4)3780\delta''(x-1)-63000\delta'(x-1)$	table 12 (")
K-2	g-4	$-2H(-x+1/4)-H(x-1/4)+5/4\delta(x-1)$	table 13 (")
K-2	g-5	$-162xH(-x+1/4)+(222x-96)H(x-1/4)-126\delta(x-1)$	table 14 (")
K-2	g-8		table 15 (")
K-5	g-9	$\delta(x-1/4)-\delta(x-3/4)$	table 16 (")
K-5	g-11	$\delta'(x-1/4)-\delta'(x-3/4)$	table 17 (")
K-5	g-12	$-\delta''(x-1/4)+\delta''(x-3/4)$	table 18 (")
K-2	g-9	$1/2 \cot \pi x$	table 19 (")
K-5	g-13	$1/2 \cot \pi x$	table 20 (")
K-5	g-14	$1/4 \cos^2 \pi x$	table 21 (")
K-5	g-15	$(\cos^2 \pi x + 3\sin^2 \pi x)/8\cos^4 \pi x$	table 22 (")

2.6 $\delta^{(m)}(x-a)$ の現われるところでは他の点での値に比べ大きな数値が得られている。しかもこの点附近の数値は分割数に大きく依存することが観測される。それらを解析

してみよう。

結果Ⅰ 分割数 n を倍に増したときの $\delta^{(m)}$ の存在する点での計算値の変化の倍率をおのおのの核に対して下表に示す。
(n は8から256まで行った)。

$\delta \backslash K$	K-1	K-2	K-3	K-4	K-5
δ	2.002	2.000000000000000	1.999999999	2.000	2.000000000000000
δ'	4.002	4.000000000000000	3.9999998	3.9993	4.1
δ''			7.99999998	8.0000	7.8
δ'''			16.00000000	16.01	
$\delta^{(IV)}$				32.000	
$\delta^{(V)}$				64.0000	

このことから δ 及 $\delta^{(m)}$ の大きさは n の $(m+1)$ 乗に比例することがわかる。又表中の数値は2倍, 4倍, ... くらいはずれる桁数で打切っている。実はこの桁数が $\delta^{(m)}$ の存在しない他の分点での通常の解 α とここの精度とほぼ一致している。
結果Ⅱ 積分の分点 x_i と $g(x)$ の跳びの点 a_e とが丁度一致するとき, $g(x_i)$ に適当な値 C を与へ計算を実行する。その結果

$$\text{核Ⅰ及Ⅱでの } \sigma_0(a_e) \delta'(x-a_e) \text{ が } (C-f(a_e-)) \delta'(x-a_e+\frac{1}{2m}) \\ \text{と } (f(a_e+)-C) \delta'(x-a_e-\frac{1}{2m})$$

とに分かれる。K-3の δ'' , K-4での $\delta^{(IV)}$ も同様な現象が見られる。

結果Ⅲ 区間の端での $\delta \sim \delta^{(n)}$ は内部でのものの2倍の高さをもつ。

結果Ⅳ $K-1$ 又は K で $\sigma_2(a_e)$ や $\sigma_3(a_e)$ を持つ $g(x)$ を与へると、 $\sigma_2(a_e)$ では分割数 n には依存せず、一定値 $\sigma_3(a_e)$ では n に逆比例するものが現れ、その形状は Fig. 5 である。これらは積分を離散化したために現れたものであろう。 $K-3$ では σ_4, σ_5 , $K-4$ では σ_6, σ_7 で同様の現象がみられる。以上より、ヤーク種フレドホルム型積分方程式に現れる δ 関数及其導超関数は、前述のような数値解法を採用したとき

$$\delta^{(m)}(x-a) = C_m n^{m+1} \varphi_m(x)$$

と表わされる。ここに C_m 及 $\varphi_m(x)$ は核により定まるものである。例へば Fig. 2 に示すように核 $K-1$ と $K-2$ に対して

$$C_0 = C_1 = 1,$$

$$\varphi_0(x) = \frac{h}{h} \frac{x-a}{h} \Pi(x)$$

$$\varphi_1(x) \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x-a) \Pi(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

となる。但し $h=1/n$, $x=a+gh$, $g \in [-1, 1]$ 及 $\Pi(x)$ は g の区間 $[-1, 1]$ 内でのみ 1 で他では 0 となる単位関数である。

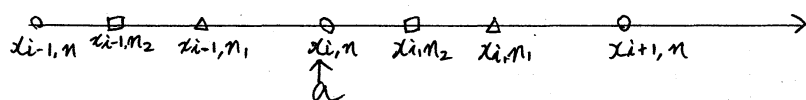
他の核に対しては $\varphi_m(x)$ の具体形を示すことは困難であるが Fig. 3 が $K-3$, Fig. 4 が $K-4$ に対する形状である。なおこれらの図は次のように描いたものである。

分割数 n のときの分点の座標を $x_{i,n}$, $i=1, \dots, n$

" n_1 " x_{i,n_1} "

" n_2 " x_{i,n_2} "

としたときの, 点 x_{i,n_1} , $x_{i,n_2}, \dots$ での計算値 $h(x_{i,n_1})$, $h(x_{i,n_2})$,
 $\dots$ を $\delta^{(m)}$ のところでは $h(x_{i,n_1}) \times (n/n_1)^{m+1}$, $h(x_{i,n_2}) \times (n/n_2)^{m+1}$,
 $\dots$ と分割数 n のときの値に換算した値を $\delta^{(m)}(x-a)$ のある点
 a を中心に分割数 n での n 区間内にプロットしたものである。



図からみらるるように Temple のこれと極めて一致した形状を示している。又 Dirac は $\delta(0) = +\infty$ の ∞ はむやみに大きなものではなく, 原点を中心に幅 ε をもたせたとき ε^{-1} の程度の無限大であるといっている。筆者の得た数値解はここのことを極めて合理的に物語っている。この手法により未知の積分方程式の解に含まれる δ 及其の導関数を検出することが可能となる。即ち数値解が分割数 n の $m+1$ 乗に比例して得られる部分には, $\delta^{(m)}(x-a)$ が在る。但し Weierstrass の関数のような関数を右辺にもつ積分方程式, 即ち解にいたるところ $\delta^{(m)}$ を含む場合は除外する。

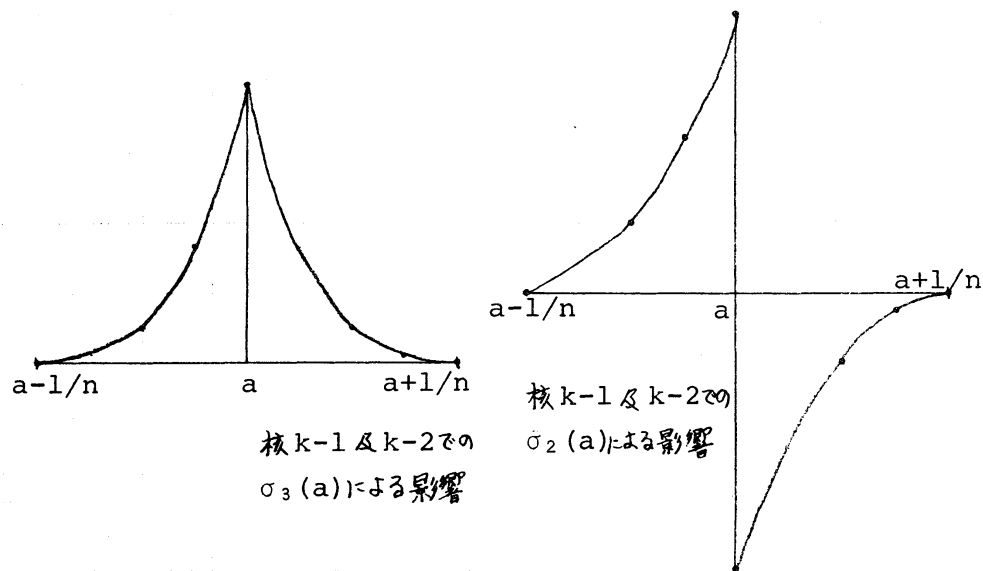


Fig.5

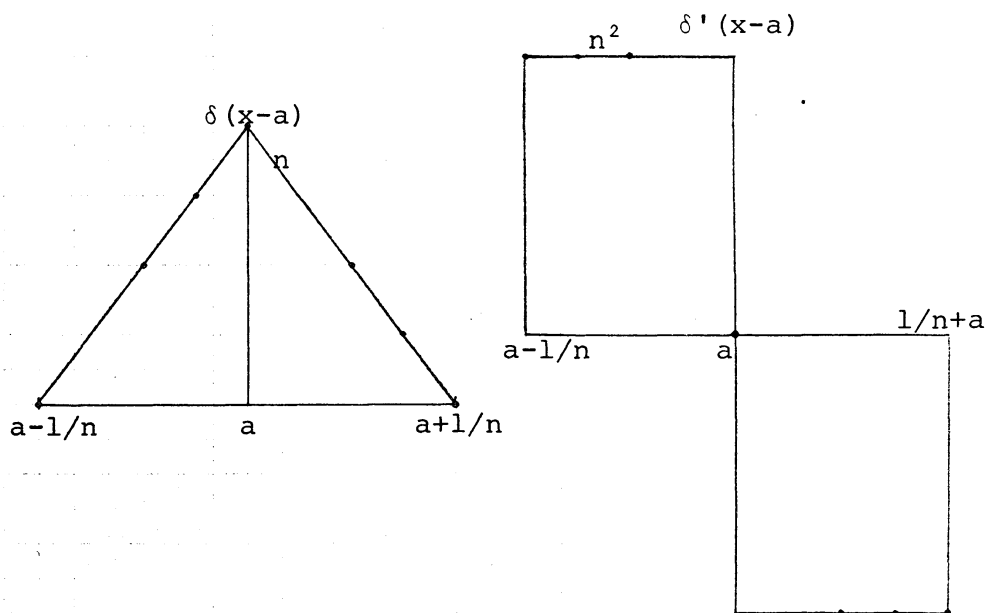


Fig. 2

核 $k-1$ 及 $k-2$ での $\delta^{(m)}(x-a)$

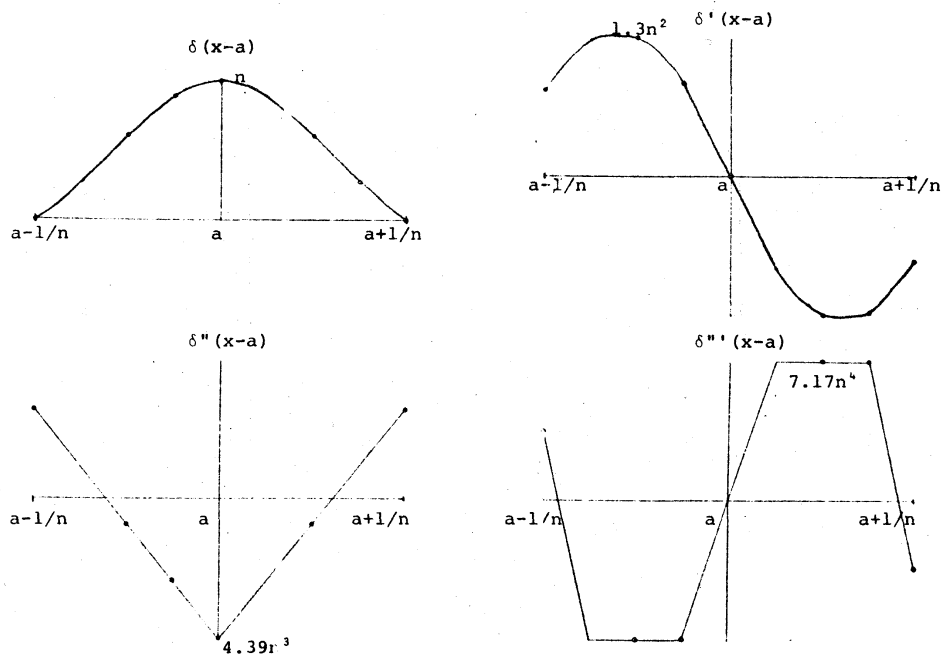


Fig. 3
模 $k=3$ の $\delta^{(m)}(x-a)$

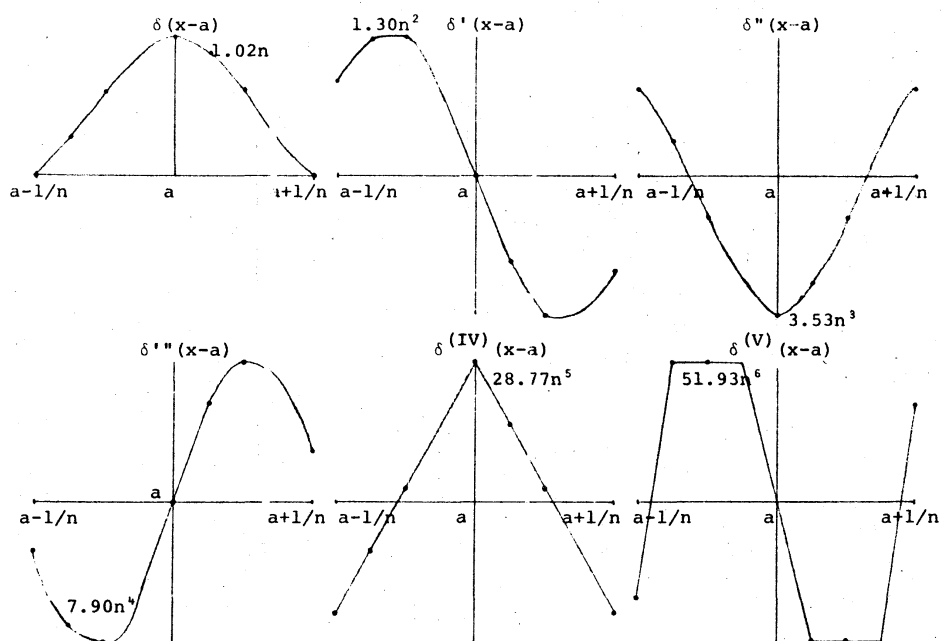


Fig. 4
模 $k=4$ の $\delta^{(m)}(x-a)$

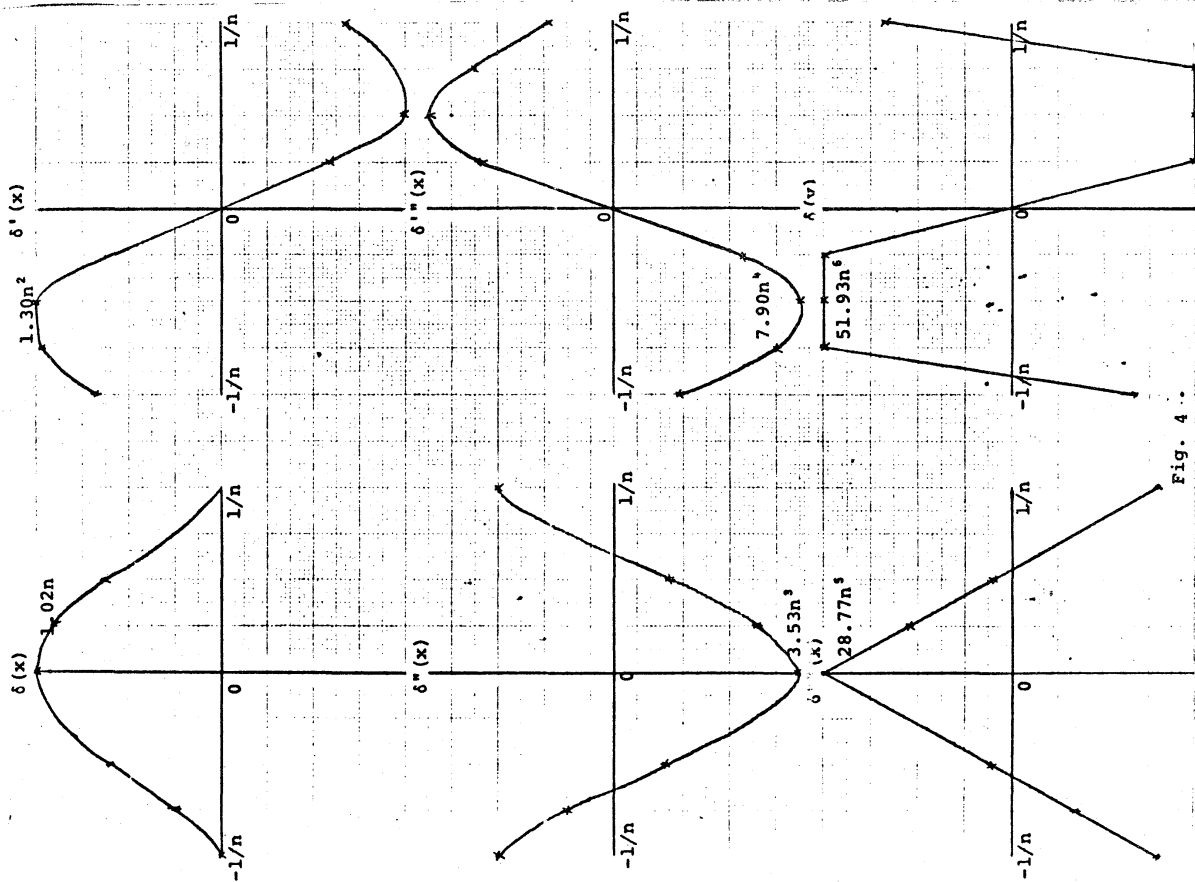


Fig. 4..

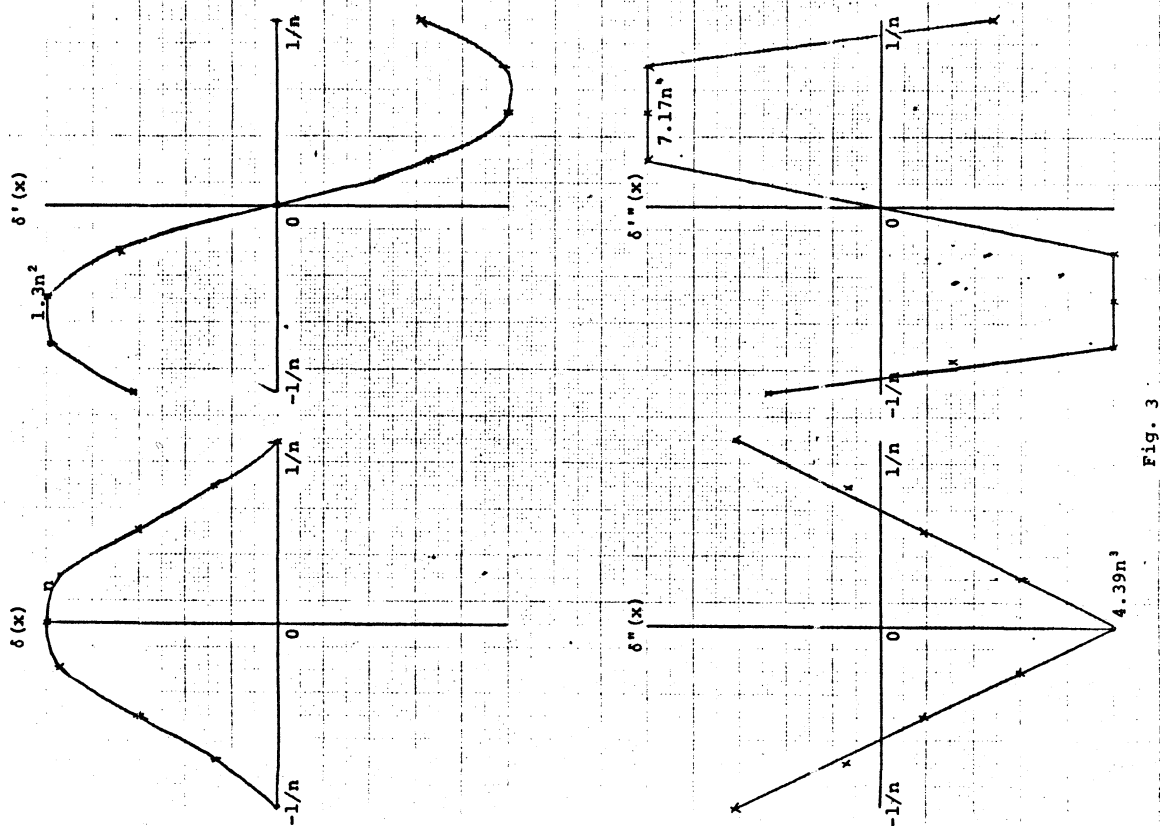


Fig. 3

2.7 積分方程式(1)が解を持つための必要十分条件としての Picard の定理がある。即ち

$$K'(x, y) = \int K(x, s) K(y, s) ds$$

を考え、この核の固有値を $\{\lambda_k^2\}$ 、それに対応する固有関数を $\{M_k(x)\}$ とする。(1)の右辺を $M_k(x)$ によって Fourier 展開し、

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k M_k(x)$$

としたとき、解 $u(x)$ が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^2 \quad (2)$$

が収束することである。この定理を満さない場合の一例が

$$f(x) \text{ に } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{\pi^2 n^2}$$

を与へ、 $K=2$ の場合である。すると $K'(x, y)$ の固有値は $n^4 \pi^4$ 、 C_n は $\frac{1}{n^2 \pi^2}$ であるので(2)式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \pi^4 \frac{1}{n^4 \pi^4} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

となり発散する。しかし形式解は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x$ である。これは発散級数であるが、超関数の意味で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{2} x$$

となるものである。Poisson核で解いても同様の結果が得られる。

2.8 初期値ないし境界値問題の逆問題

領域の内部で所定の偏微分方程式の解となつてゐる関数が領域の境界に接近するときの振舞を知りべやうとするもので

ある。このことを数値的に調べ超関数を見ようとするものである。

$$\text{熱伝導方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\text{の両端断熱} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad (4)$$

の場合を取り扱う。 $t > 0$ での (3) の解が $t=0$ でどうなるかを調べる。ここで得た数値的様相が断熱条件の熱伝導の物理的意味と合致している。

$$i) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n^2 t} \cos nx$$

$t=0$ とすると

$$u(x, 0) = \cos x - 2 \cos 2x + 3 \cos 3x - \dots$$

でこれは超関数の意味で $1/4 \cos^2 \frac{x}{2}$ に等しい。即ち初期値が $1/4 \cos^2 \frac{x}{2}$ である。数値実験の結果 $x=\pi$ で丁度 $1/4 \cos^2 \frac{\pi}{2}$ と反対の符号となりこのような特異点での様子をグラフに描くとすれば右図のようなものである。

$$ii) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 e^{-n^2 t} \cos nx$$

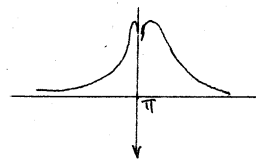
$t=0$ とすると

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 \cos nx$$

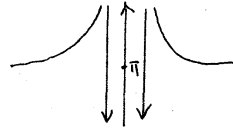
となり、これは超関数の Fourier 展開の意味で

$$\left\{ \cos^2 \frac{x}{2} + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right\} / 8 \cos^4 \frac{x}{2}$$

に等しい。ところが数値解は $x=\pi$ 附近でこの式とはなれだし $\pm\infty$ と振動してくる。これをグラフに描くとすれば、



下図のようになり *quintett* 的様相を持ったものである。



終わりに

数値計算は日本大学理工学部 HITAC 8700, OKITAC 4300C 及 東京大学大型計算機センターの HITAC 8700/8800 で行なわれた。なお、本研究に際し終始御指導下さいました日本大学・宇野利雄博士並びに有益な御助言を頂いた京都大学・松信教授に、心からの謝意を表す。

References

- 1) P.A.M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford UP, 1930
- 2) L. Schwartz: Theorie des Distribution, tomes I et II, Hermem et Cie, 1950-1
- 3) 佐藤幹夫: 超関数の理論, 数学, 10巻, 1号,
- 4) J.G. Mikusinski: Fundam. Math, 35, 235, 1948
- 5) G. Temple: Theory of Generalized Functions, Proc. Roy. Soc. A 228, 1955
- 6) M.J. Lighthill: An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge UP, 1958
- 7) I.M. Gel' Fand and G.E. Shilov: Obobshchennye Funktsii, Vypusk I, Moscow, 1958
- 8) T. UNO and I. Hong: A Relation between Some Fredholm Type Linear Integral Equations of First Kind and Linear Algebraic Simultaneous Equations, Mathematica Japonicae, 20, 1975

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-71.99999999999995	-96.00000000000000
2	0.0937500000000000	-96.00000000000010	-96.00000000000000
3	0.1562500000000000	-95.99999999999984	-96.00000000000000
4	0.2187500000000000	170.80000000000000	-96.00000000000000
5	0.2812500000000000	254.80000000000000	16.00000000000000
6	0.3437500000000000	15.99999999999983	16.00000000000000
7	0.4062500000000000	16.00000000000023	16.00000000000000
8	0.4687500000000000	319.19999999999996	16.00000000000000
9	0.5312500000000000	-319.19999999999998	16.00000000000000
10	0.5937500000000000	-15.99999999999997	-16.00000000000000
11	0.6562500000000000	-16.00000000000007	-16.00000000000000
12	0.7187500000000000	-142.80000000000000	-16.00000000000000
13	0.7812500000000000	-154.79999999999999	-16.00000000000000
14	0.8437500000000000	-32.00000000000011	-32.00000000000000
15	0.9062500000000000	-31.99999999999985	-32.00000000000000
16	0.9687500000000000	-24.00000000000007	-32.00000000000000

table 1-1

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-47.58204929888065	-47.97656250000000
2	0.0937500000000000	-47.7578953741226	-47.78936250000000
3	0.1562500000000000	-47.38301739605985	-47.41406250000000
4	0.2187500000000000	86.49249017494321	-46.85156250000000
5	0.2812500000000000	128.6939906664990	9.377343750000000
6	0.3437500000000000	9.103027059426824	9.108593750000000
7	0.4062500000000000	8.803124677744815	8.808593750000000
8	0.4687500000000000	159.9733295189506	8.477343750000000
9	0.5312500000000000	-159.9733295189506	-8.477343750000000
10	0.5937500000000000	-8.803124677744857	-8.808593750000000
11	0.6562500000000000	-9.103027059426882	-9.108593750000000
12	0.7187500000000000	-72.73043237154724	-9.377343750000000
13	0.7812500000000000	-78.71637495378655	-17.367187500000000
14	0.8437500000000000	-17.4393238486118	-17.054687500000000
15	0.9062500000000000	-16.66905441250875	-16.679687500000000
16	0.9687500000000000	107.9316622030501	-16.242187500000000

table 1-2

I	X	H(X)	EXACT
0	0.0000000000000000	-47.96876423567291	-48.00000000000000
1	0.0625000000000000	-47.87504474133488	-47.90625000000000
2	0.1250000000000000	-47.59388625832049	-47.62500000000000
3	0.1875000000000000	-47.12528878663013	-47.15625000000000
4	0.2500000000000000	234.1480184524233	-46.50000000000000
5	0.3125000000000000	9.241263313975469	9.246875000000000
6	0.3750000000000000	8.956980847816621	8.962499999999999
7	0.4375000000000000	162.1415041043650	8.646875000000000
8	0.5000000000000000	-153.7999479360352	-8.300000000000000
9	0.5625000000000000	-8.641458550211773	-8.646875000000000
10	0.6250000000000000	-8.956980847816503	-8.962500000000000
11	0.6875000000000000	-9.241263313975552	-9.246875000000000
12	0.7500000000000000	-138.2104899810773	-9.500000000000000
13	0.8125000000000000	-17.20794150495287	-17.218750000000000
14	0.8750000000000000	-16.86430333904650	-16.875000000000000
15	0.9375000000000000	-16.45818553024803	-16.468750000000000
16	1.0000000000000000	239.8438211783645	-16.000000000000000

table 2

n=32

i	X	H(X)
1	0.0156250000000000	1/37.331368161832
2	0.0487500000000000	-5211.994174062081
3	0.0781250000000000	19110.64505076499
4	0.1093750000000000	-71230.58610494999
5	0.1416250000000000	265811.6993720854
6	0.1718750000000000	-992116.2113794717
7	0.2041250000000000	3702253.146137998
8	0.2343750000000000	-7525540.373164557
9	0.2656250000000000	7525540.346509026
10	0.2968750000000000	-3702253.012870617
11	0.3281250000000000	992015.7049744930
12	0.3593750000000000	-265809.8070273368
13	0.3916250000000000	71223.52313348831
14	0.4218750000000000	-19084.28550511840
15	0.4531250000000000	5113.618887850606
16	0.4843750000000000	-1370.190050184564
17	0.5156250000000000	367.1413164478471
18	0.5468750000000000	-98.37521759779953
19	0.5781250000000000	26.35955794204034
20	0.6093750000000000	-7.063720585994520
21	0.6416250000000000	1.892529108613402
22	0.6718750000000000	-0.5070995612876068
23	0.7031250000000000	0.1358748667007297
24	0.7343750000000000	-0.36405996457958611-01
25	0.7656250000000000	0.97539108171413711-02
26	0.7968750000000000	-0.26131433069797611-02
27	0.8281250000000000	0.70044189650110621-03
28	0.8593750000000000	-0.18881291945394751-03
29	0.8906250000000000	0.52385023117685121-04
30	0.9218750000000000	-0.15377476604700921-04
31	0.9531250000000000	0.45961956928707701-05
32	0.9843750000000000	-0.15603266668762731-05

table 3

H(X)
-15.67263648157728
47.01790942045342
-172.3990010964042
642.5780947784444
-2597.913477829815
8949.75416807210
-33398.38428943274
26340.47774101518
-26340.4772527111
-33398.38704199150
8949.70842618813
-2397.896328519852
642.5144717026910
-172.1615587478812
46.13176374283208
-12.36549641066904
3.330221856332389
-0.9553910654776311
0.4913429329417491
-1.009981482503683
3.548583955713464
-13.18435485838989
49.1883555523795
-183.5709872337707
685.0951133489710
-2556.809466340206
9542.142752269943
-35611.76154301333
132904.9034200301
-496007.8521371457
1851126.505128365
-3762770.168376140

table 4

n=32

i	X	H(X)
1	0.0156250000000000	-5320.789388577130
2	0.0487500000000000	602.3681658188463
3	0.0781250000000000	-160.6832750314668
4	0.1093750000000000	40.3693485095298
5	0.1416250000000000	-0.7764646523384775
6	0.1718750000000000	-37.25907650692216
7	0.2041250000000000	149.8127711529787
8	0.2343750000000000	-1329.992008470973
9	0.2656250000000000	1330.155263027047
10	0.2968750000000000	-150.6290439310428
11	0.3281250000000000	40.3691286461515
12	0.3593750000000000	-10.81460727800973
13	0.3916250000000000	2.897515359593233
14	0.4218750000000000	-0.7754527510928088
15	0.4531250000000000	0.2042944050369363
16	0.4843750000000000	-0.41724471191795631-01
17	0.5156250000000000	-0.37396311306514031-01
18	0.5468750000000000	0.1913798708583602
19	0.5781250000000000	-0.7278446259004288
20	0.6093750000000000	2.72077128650161
21	0.6406250000000000	-10.15244307999565
22	0.6718750000000000	37.88970240823755
23	0.7031250000000000	-141.4063667771646
24	0.7343750000000000	527.7357644637512
25	0.7656250000000000	-1969.536691115091
26	0.7968750000000000	7350.411000511588
27	0.8281250000000000	-27432.10731153547
28	0.8593750000000000	102378.0182462105
29	0.8906250000000000	-382079.9656738614
30	0.9218750000000000	1425941.844449276
31	0.9531250000000000	-5321687.412122683
32	0.9843750000000000	10815303.80434093

table 5

H(X)
0.7346548343451994
-2.203964502794056
8.081203175795061
-30.12084819366994
112.4021895896656
-419.487901629632
1565.549451066830
-7378.709894111641
7378.709874611498
1565.549392549365
-419.487695579186
112.4013697424186
-30.11786338993511
8.070063830865188
-2.162391959670990
0.579504029384415
-0.1556241613120094
0.42992608404213021-01
-0.16346277229977341-01
0.22392525881736561-01
-0.73223854718470001-01
0.270502937625085
-1.008787745947038
3.764648553510718
-14.04980445154437
52.43456475295457
-195.6884745731474
730.3193285601903
-2725.588839681962
10172.03603016352
-37962.55528095704
335214.1850936532

table 6

n=32

I	X	H(X)
1	0.15625	421569117.1332212
2	0.16875	74430361.0309443
3	0.18125	161299105.826370
4	0.19375	3751072.64.652318
5	0.20625	85634812.780372
6	0.21875	1457854416.18159
7	0.23125	3946731428.25970
8	0.24375	55764752311.04299
9	0.25625	55764554173.93351
10	0.26875	3446657225.37945
11	0.28125	19576623143.85383
12	0.29375	855913.014.451643
13	0.30625	369.94352.70469
14	0.31875	1584472682.167458
15	0.33125	644398143.559152
16	0.34375	29468545.7717284
17	0.35625	126884273.3441425
18	0.36875	54634225.5131584
19	0.38125	235237.22756353
20	0.39375	112871.05679039
21	0.40625	4361168.13538525
22	0.41875	1877817.9702456
23	0.43125	88535.6951811832
24	0.44375	348132.716286473
25	0.45625	149893.996627694
26	0.46875	64537.40364441448
27	0.48125	27785.40364441337
28	0.49375	11962.1715459658
29	0.50625	5155.7751395495
30	0.51875	2241.27787816244
31	0.53125	1.23.4019.5751147
32	0.934375	-542.217.2607071

table 7

H(X)

-2621883.06131568
4504284.743896447
-19331566.43867986
2313237.54311274
-5314214.57797416
11945828.1568617
-176124582.1467573
94162149.30264316
94169345.08535631
-176112660.5330314
1193509.8180801
-53117495.99037051
22956193.15467549
-9899146.246055190
4288764.554124361
-197695.584559539
963212.7486474450
-74451.1639968873
1085209.108139003
-2243583.636875068
5091487.089591823
-11773529.73249938
27321617.64362457
-6344225.56342019
147343435.8283725
-342198997.3907697
794735413.9848818
-1845671757.53795
4279559515.463910
-978832697.254147
19233252877.58507
-2788222301.18059

table 8

H(X)

-3375552.13242317
1798311.06587891
-5517104.30986118
2555885.028194949
-515.66.72879795
-1158313.664951213
427656.024337945
-817991.512742918
8235528.269704770
-4485395.365843220
1677375.474392152
-75379.3911696067
289248.7152513449
-91989.27223079961
-35959.512.1696021
19.989.023136701
-489851.1698607051
1157602.445407117
-2697.91.321375287
6267627.541104525
-14557993.67866359
33811242.58000630
-78526714.99425432
18274733.2363333
-423560537.8994922
983706314.0739186
-2284598664.590731
53511533.842470
-12323.1178.2997
28138079636.34232
-5528659234.94576
85144774142.74372

table 9

n=32

I	X	H(X)
1	0.15625	165891.464990992
2	0.16875	290815.916168687
3	0.18125	634739.310375043
4	0.19375	1456658.79620210
5	0.20625	3375655.02842713
6	0.21875	7839960.86472811
7	0.23125	18284136.10798724
8	0.24375	12803220.8764261
9	0.25625	12803037.1741745
10	0.26875	18283814.4310309
11	0.28125	7839258.11993375
12	0.29375	3374042.55148672
13	0.30625	1452922.31218930
14	0.31875	626065.4808721241
15	0.33125	270673.0305839035
16	0.34375	119111.0690790999
17	0.35625	57245.73303907631
18	0.36875	38489.41395169998
19	0.38125	48717.6320216237
20	0.39375	95632.6684868941
21	0.40625	214563.801783296
22	0.41875	495071.9928332370
23	0.43125	1148393.616757809
24	0.44375	2666512.206077443
25	0.45625	6192646.83235027
26	0.46875	14382170.76678092
27	0.48125	33402675.4332413
28	0.49375	77588594.16739509
29	0.50625	180470674.8251179
30	0.51875	425477688.6562925
31	0.53125	1135256151.145101
32	0.984375	208616420.495737

table 10

H(X)

5175791.564250568
-625204.8207496059
200598.6990952287
-308781.56362978963
-1114.5.8521778662
344494.7407928518
-1001.72.246370914
8187393.666764380
-8189309.385418913
1008361.819097752
-362372.2816827758
153432.5645390312
-67167.05011430837
31767.93387984767
-20305.70236693527
24135.77754963674
-46142.04214736052
102896.4805379962
-237137.7145949203
549955.5721220918
-1276916.997297496
2965459.447298429
-6887138.263804957
15995170.88852169
-37148359.94319665
86276221.85711330
-200377314.0367745
465441703.4664543
-1082614969.210208
2552370715.787762
-681157621.488678
12505786733.50885

table 11

H(X)

-5680.091791525307
9957.663029024398
-21734.3086478976
49881.02085924073
-115652.2194598019
269938.4762974592
-665522.1572000846
2437583.575599991
2437204.728722954
-659862.6799125159
268498.1631025129
-112344.1367477066
42208.37147217938
-3912.108574781341
31440.11757133446
90470.91110856257
-217634.417749927
508692.0543176151
-1182823.232149582
2747679.765627468
-6381674.152111402
14821381.65005187
-34422316.24722999
79944947.79362934
-185670087.2420016
431214587.6245684
-1001499832.582219
2326310151.663742
-5419984169.638559
12756899470.36312
-34336995157.99233
62416948926.85268

table 12

	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	-1.4999999999999991	-1.999999999999999	-0.50000000000000079
2	0.046875	-1.9999999999999992	-1.999999999999999	-0.75495165674510640-14
3	0.078125	-2.0000000000000004	-1.999999999999999	0.44408920985006260-14
4	0.109375	-1.9999999999999993	-1.999999999999999	-0.64392935428259070-14
5	0.140625	-2.0000000000000000	-1.999999999999999	0.88817841970012520-15
6	0.171875	-1.9999999999999994	-1.999999999999999	-0.53290705182007510-14
7	0.203125	-2.0000000000000002	-1.999999999999999	0.31086244689504380-14
8	0.234375	-1.8750000000000002	-1.999999999999999	-0.12499999999999977
9	0.265625	-1.1250000000000029	-0.999999999999999	0.12500000000000297
10	0.296875	-1.0000000000000026	-0.999999999999999	0.27089441800853810-13
11	0.328125	-0.99999999999999293	-0.999999999999999	-0.70665695517391210-13
12	0.359375	-1.0000000000000063	-0.999999999999999	0.63948846218409010-13
13	0.390625	-0.9999999999999942	-0.999999999999999	-0.57176485768195560-14
14	0.421875	-0.9999999999999966	-0.999999999999999	-0.53373971908854390-13
15	0.453125	-1.0000000000000010	-0.999999999999999	0.10436096431476470-13
16	0.484375	-1.0000000000000088	-0.999999999999999	0.88817841970012520-13
17	0.515625	-0.9999999999999811	-0.999999999999999	-0.11879386363489170-12
18	0.546875	-1.0000000000000008	-0.999999999999999	0.84376949871511890-14
19	0.578125	-1.0000000000000010	-0.999999999999999	0.10036416142611410-12
20	0.609375	-0.9999999999999977	-0.999999999999999	-0.22232216068118750-13
21	0.640625	-0.99999999999999143	-0.999999999999999	-0.85653706349830820-13
22	0.671875	-1.0000000000000086	-0.999999999999999	0.86375351315837170-13
23	0.703125	-1.0000000000000009	-0.999999999999999	0.95479180117763460-14
24	0.734375	-1.0000000000000074	-0.999999999999999	0.74606987254810510-13
25	0.765625	-0.99999999999998315	-0.999999999999999	-0.16839307726002050-12
26	0.796875	-1.0000000000000074	-0.999999999999999	0.74829031859735550-13
27	0.828125	-0.99999999999998748	-0.999999999999999	-0.12514989045087070-12
28	0.859375	-1.0000000000000167	-0.999999999999999	0.16808776592824860-12
29	0.890625	-0.99999999999997920	-0.999999999999999	-0.20791701693667610-12
30	0.921875	-0.9999999999999943	-0.999999999999999	-0.56621374255882980-14
31	0.953125	-1.0000000000000158	-0.999999999999999	0.15831780331154730-12
32	0.984375	1471.2500000000000	-0.999999999999999	-1472.2500000000000

table 13

	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	-2.5312499999999998	-2.531249999999999	-0.88817841970012520-15
2	0.046875	-7.5937500000000014	-7.593749999999999	0.15099033134902120-13
3	0.078125	-12.656249999999997	-12.656249999999999	-0.18207657603852560-13
4	0.109375	-17.718749999999993	-17.718749999999999	-0.63948846218409010-13
5	0.140625	-22.781250000000001	-22.781249999999999	0.17763568394002500-13
6	0.171875	-27.843749999999996	-27.843749999999999	-0.35527136788005000-13
7	0.203125	-32.906250000000009	-32.906249999999999	0.92370555648813020-13
8	0.234375	-37.968749999999976	-37.968749999999999	-0.25000000000002344
9	0.265625	-37.031249999999997	-37.031249999999999	-0.24999999999999218
10	0.296875	-30.093749999999999	-30.093749999999999	0.00000000000000000000
11	0.328125	-23.156249999999997	-23.156249999999999	-0.21316282072803000-13
12	0.359375	-16.218749999999973	-16.218749999999999	-0.26645352591003750-12
13	0.390625	-9.2812500000000240	-9.281249999999999	0.24114044094858390-12
14	0.421875	-2.3437500000000064	-2.3437500000000000	-0.35083047578154940-13
15	0.453125	4.5937499999999924	4.593749999999999	0.75495165674510640-13
16	0.484375	11.531249999999990	11.531249999999999	0.90594198809412770-13
17	0.515625	18.468750000000016	18.468749999999999	-0.16697754290362350-12
18	0.546875	25.406249999999994	25.406249999999999	0.49737991503207010-13
19	0.578125	32.343749999999977	32.343749999999999	0.22026824808563100-12
20	0.609375	39.281250000000022	39.281249999999999	-0.22737367544323200-12
21	0.640625	46.218749999999990	46.218749999999999	0.92370555648813020-13
22	0.671875	53.156249999999990	53.156249999999999	0.92370555648813020-13
23	0.703125	60.093750000000007	60.093749999999999	-0.78159700933611020-13
24	0.734375	67.031249999999986	67.031249999999999	0.12789769243681800-12
25	0.765625	73.968750000000013	73.968749999999999	-0.13500311979441900-12
26	0.796875	80.906249999999982	80.906249999999999	0.17053025658242400-12
27	0.828125	87.843749999999991	87.843749999999999	0.85265128291212020-13
28	0.859375	94.781250000000020	94.781249999999999	-0.20605739337042900-12
29	0.890625	101.71874999999998	101.718749999999999	0.11368683772161600-12
30	0.921875	108.65624999999999	108.656249999999999	0.71054273576010010-13
31	0.953125	115.59374999999999	115.593749999999999	0.63948846218409010-13
32	0.984375	91.031250000000011	122.531249999999999	31.499999999999988

table 14

I	X	H(X)
1	0.0156250000000000	3326.069825547172
2	0.0468750000000000	124.5605184822797
3	0.0781250000000000	-1356.928101627163
4	0.1093750000000000	309.742374977875
5	0.1406250000000000	832.8298657314019
6	0.1718750000000000	-161.1014902021756
7	0.2031250000000000	227.5113129775940
8	0.2343750000000000	-532.5195196755524
9	0.2656250000000000	-917.116609137506
10	0.2968750000000000	1597.243627810404
11	0.3281250000000000	-4.59381490352217
12	0.3593750000000000	-734.676757665600
13	0.3906250000000000	426.707865806211
14	0.4218750000000000	-1076.772384454125
15	0.4531250000000000	712.607318712144
16	0.4843750000000000	1456.582301274736

table 15

I	X	H(X)
1	0.0166666666666667	-0.54272063334131520-15
2	0.0500000000000000	0.62639307957488330-15
3	0.0833333333333333	-0.10807603818174310-14
4	0.1166666666666666	0.19599172346335490-14
5	0.1499999999999999	-0.1524503304959050-14
6	0.1833333333333333	0.15249310305645830-14
7	0.2166666666666666	-0.17428362744667900-14
8	0.2499999999999999	14.999999999999999
9	0.2833333333333333	0.10314969723884310-13
10	0.3166666666666666	-0.65364166386753640-15
11	0.3499999999999999	-0.17703247723965800-15
12	0.3833333333333333	0.0854618947514340-15
13	0.4166666666666666	-0.77625541821218450-15
14	0.4499999999999999	0.79308258037189380-15
15	0.4833333333333333	-0.31324054099084990-15
16	0.5166666666666666	0.6537365490913950-15
17	0.5499999999999999	-0.98063421278326550-15
18	0.5833333333333333	0.87170610201093860-15
19	0.6166666666666666	-0.87174526399913070-15
20	0.6499999999999999	-0.10897462725456680-15
21	0.6833333333333333	-0.53401996540859030-14
22	0.7166666666666666	0.5231862833267400-14
23	0.7499999999999999	-14.999999999999999
24	0.7833333333333333	-0.18455459641241680-13
25	0.8166666666666666	0.58336531812348340-14
26	0.8499999999999999	-0.70808342849922110-14
27	0.8833333333333333	0.42381773421528830-14
28	0.9166666666666666	-0.70549525452003140-15
29	0.9499999999999999	-0.80323906257349780-15
30	0.9833333333333333	0.34862229836951410-15

table 16

table 17

table 18

H(X)
-0.79582134000405181
1.906815043982635
-5.949691814441546
18.38530439259086
-58.23285140104934
187.2149967819480
-778.7030784062605
1277.442320679785
-778.7030784062602
187.2149967819476
-58.23285140104910
15.38530439259066
-5.949691814441406
1.906815043982600
-0.79582134000405222
0.79582134000405074
-1.908815043982529
5.949691814441184
-18.38530439259030
58.23285140104899
-187.2149967819481
778.7030784062608
-1277.442320679785
778.7030784062594
-187.2149967819467
58.23285140104814
-18.38530439258987
5.949691814440999
-1.908815043982480
0.79582134000405047

n=32				
I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	16.78145821478244	20.36774193604165	3.586273721259211
2	0.046875	7.400604980209596	6.778344621176215	-0.6222693590333810
3	0.078125	4.170157298472277	4.055892901838455	-0.1162643966338222
4	0.109375	2.92251573655872	2.881571002559405	-0.4094557109646746D-01
5	0.140625	2.245605386065701	2.226601112207206	-0.1900497385849564D-01
6	0.171875	1.817105279697331	1.806767840653714	-0.1033743904361684D-01
7	0.203125	1.519754179725762	1.513521602158887	-0.6236577566875123D-02
8	0.234375	1.300247068369546	1.296201258869336	-0.4047809500509203D-02
9	0.265625	1.130753781986870	1.127981925964580	-0.2773856022290522D-02
10	0.296875	0.9953115880375711	0.9933293961716828	-0.1982191865888383D-02
11	0.328125	0.8840877611093964	0.8825244350470960	-0.1464326062300417D-02
12	0.359375	0.7906975312865817	0.7895862839801048	-0.1111747306476854D-02
13	0.390625	0.7108076025210023	0.7099454517470464	-0.8621507739558915D-03
14	0.421875	0.6413720735571770	0.6406907900182775	-0.6812835388994437D-03
15	0.453125	0.5801856331961451	0.5796389536667175	-0.5466795294275101D-03
16	0.484375	0.5256107552821064	0.5251664231199301	-0.4443321621762780D-03
17	0.515625	0.4764045939584277	0.4760395733504628	-0.3650206079649221D-03
18	0.546875	0.4316054699002464	0.4313029661283701	-0.3025037718763363D-03
19	0.578125	0.3904562827323169	0.3902038298269719	-0.2574529053449659D-03
20	0.609375	0.3523515299881683	0.3521397304325222	-0.2117995556461250D-03
21	0.640625	0.3167998335420769	0.3166215080887846	-0.1783254532922995D-03
22	0.671875	0.2833968991472647	0.2832465013651722	-0.1503977820924846D-03
23	0.703125	0.2518056441544475	0.2516788498996473	-0.1267942538002581D-03
24	0.734375	0.2217413419804581	0.2216347569454323	-0.1065850350258357D-03
25	0.765625	0.1929603345996685	0.1928712831355608	-0.8905146410768949D-04
26	0.796875	0.1652513177093992	0.1651776886721671	-0.7362903773207026D-04
27	0.828125	0.1384285017530580	0.1383686350702073	-0.5986668285067054D-04
28	0.859375	0.1123261517760333	0.1122787546585648	-0.4739711746858111D-04
29	0.890625	0.867944489458570D-01	0.8675323006892808D-01	-0.3591482565762361D-04
30	0.921875	0.616947737754317D-01	0.6166911806836952D-01	-0.2515930917365052D-04
31	0.953125	0.368971773090299D-01	0.3688221576122477D-01	-0.1490196967821565D-04
32	0.984375	0.1227924650426120D-01	0.1227431105446283D-01	-0.4935449798368872D-05

table 19

I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	10.17518925177400	10.17773381249359	0.2044550719581871D-02
2	0.046875	3.370049075479661	3.3702726202707493	0.6771272278325301D-03
3	0.078125	1.99570903502083	1.996111891885041	0.4009882829583144D-03
4	0.109375	1.39715668721612	1.397406386245238	0.2807175236259062D-03
5	0.140625	1.05698811297555	1.057161178774320	0.2123674767640082D-03
6	0.171875	0.834030248751056	0.8341996027917535	0.1675779136478816D-03
7	0.203125	0.674035259308995	0.6741719567433600	0.1354308124704161D-03
8	0.234375	0.551551663265509	0.5516649878667378	0.1108210401868786D-03
9	0.265625	0.453085488826490	0.4531735845095735	0.9103562692451549D-04
10	0.296875	0.370757809226202	0.3708252731360176	0.7449311339741137D-04
11	0.328125	0.2995232643215738	0.2996884668409618	0.6020281938798332D-04
12	0.359375	0.236438822587019	0.2364823879456599	0.4750568695803536D-04
13	0.390625	0.178869218147647	0.1789028606572620	0.3593884249726563D-04
14	0.421875	0.125213206002214	0.1252434800956527	0.2515949543130390D-04
15	0.453125	0.7415379455606646D-01	0.7416799376917570D-01	0.1489921310725283D-04
16	0.484375	0.2455849446918018D-01	0.2456342488473368D-01	0.4934415553496635D-05
17	0.515625	-0.2455849446918023D-01	-0.2456342488473362D-01	-0.4934415553385613D-05
18	0.546875	-0.7415379455606650D-01	-0.7416799376917560D-01	-0.1489921310773655D-04
19	0.578125	-0.125213206002219	-0.1252434800956526	-0.2515949543072104D-04
20	0.609375	-0.178869218147641	-0.1789028606572619	-0.3593884249780687D-04
21	0.640625	-0.236438822587023	-0.2364823879456599	-0.4750568695752188D-04
22	0.671875	-0.2995232643215739	-0.2996884668409617	-0.6020281938785842D-04
23	0.703125	-0.370757809226204	-0.3708252731360176	-0.7449311339716157D-04
24	0.734375	-0.4530825488926491	-0.4531735845095733	-0.9103562692425182D-04
25	0.765625	-0.5515541668265509	-0.5516649878667378	-0.1108210401868647D-03
26	0.796875	-0.6740325259308907	-0.6741719567433602	-0.1354308124694447D-03
27	0.828125	-0.8340320240781032	-0.8341996027917534	-0.1675779136501853D-03
28	0.859375	-1.056948811297561	-1.057161178774320	-0.2123674767589011D-03
29	0.890625	-1.397125663721606	-1.397406386245237	-0.2807175236310132D-03
30	0.921875	-1.995710903502081	-1.996111891885042	-0.4009882829512089D-03
31	0.953125	-3.370049075479659	-3.3702726202707492	-0.6771272278334183D-03
32	0.984375	-10.17518925177402	-10.17773381249360	-0.2044550719574988D-02

table 20

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	0.2506946534502686	0.2505042281878168
2	0.0428571428571429	0.2547699197175119	0.2545872989791897
3	0.0714285714285714	0.2632454042028133	0.2630237709004217
4	0.0999999999999999	0.2765344742107287	0.2763932022500209
5	0.1285714285714285	0.2960663469295542	0.2956720735920432
6	0.1571428571428571	0.3221674098419683	0.3223940764471994
7	0.1857142857142857	0.3604321177458303	0.3589310950186984
8	0.2142857142857142	0.4059874697560220	0.4089909514938964
9	0.2428571428571429	0.44876646741305014	0.4785307969761674
10	0.2714285714285714	0.5544903467534709	0.5775227671137245
11	0.2999999999999999	0.7865459170569359	0.7236067977499789
12	0.3285714285714285	0.7845016107385745	0.9503330524849029
13	0.3571428571428571	1.772398677220789	1.327985277605681
14	0.3857142857142856	0.8424569897240144	2.024877367989037
15	0.4142857142857142	6.710494214156844	3.532290629321093
16	0.4428571428571428	-1.068467734784274	7.841276337339169
17	0.4714285714285714	65.69086869220190	31.11308027605091
18	0.4999999999999999	-158.0336571655145	0.66577344702839280
19	0.5285714285714285	65.69086869220188	31.11308027605100
20	0.5571428571428571	-1.068467734784405	7.841276337339180
21	0.5857142857142856	6.710494214157019	3.532290629821096
22	0.6142857142857142	0.8424569897238607	2.024877367989038
23	0.6428571428571428	1.772398677220875	1.327985277605682
24	0.6714285714285714	0.7845016107385363	0.9503330524849033
25	0.6999999999999999	0.7865459170569509	0.7236067977499791
26	0.7285714285714285	0.5544903469584834	0.5775227671137246
27	0.7571428571428571	0.4876646741304990	0.4785307969761675
28	0.7857142857142856	0.4059874697560256	0.4089909514938964
29	0.8142857142857142	0.3604321177488272	0.3589310950186985
30	0.8428571428571428	0.3221674098419721	0.3223940764471994
31	0.8714285714285714	0.2960663469295521	0.2956720735920433
32	0.8999999999999999	0.2765344742107280	0.2763932022500210
33	0.9285714285714285	0.2632454042028163	0.2630237709004217
34	0.9571428571428571	0.2547699197175078	0.2545872989791897
35	0.9857142857142856	0.2506946534502766	0.2505042281878168

table 21

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	-0.1335978759145468	0.1260099818520260
2	0.0428571428571429	-0.1196270765102311	0.1343006578299263
3	0.0714285714285714	-0.1395228860135119	0.1520652534516435
4	0.0999999999999999	-0.4285669101434781D-01	0.1819660112501051
5	0.1285714285714285	-0.2276973042277730	0.2288597770212687
6	0.1571428571428571	0.3871641941555206	0.3012335667222565
7	0.1857142857142857	-1.048660692389973	0.4140580908092333
8	0.2142857142857142	3.120264476554476	0.5944506389293999
9	0.2428571428571428	-7.345841355749013	0.8954195449517084
10	0.2714285714285714	21.70280785892563	1.423672512094435
11	0.2999999999999999	-53.80107024993971	2.418033988749894
12	0.3285714285714285	151.6092011670780	4.468464411386737
13	0.3571428571428571	-386.3627340131483	9.253284107618952
14	0.3857142857142856	1073.067579745055	22.57589276437623
15	0.4142857142857142	-2749.525556158890	71.33017193131029
16	0.4428571428571428	8150.531834160925	361.0724112537518
17	0.4714285714285714	-20258.59864396343	5777.029505307879
18	0.4999999999999999	28177.56598443316	0.26675209779727500
19	0.5285714285714285	-20258.54684396344	5777.029505307911
20	0.5571428571428571	8150.531834160958	361.0724112537528
21	0.5857142857142856	-2749.525556158926	71.33017193131040
22	0.6142857142857142	1073.067579745080	22.57589276437626
23	0.6428571428571428	-386.3627840131646	9.253284107618963
24	0.6714285714285714	151.6092011670856	4.468464411386741
25	0.6999999999999999	-53.80107024994343	2.418033988749896
26	0.7285714285714285	21.70280785892714	1.423672512094435
27	0.7571428571428571	-7.345841355748925	0.8954195449517090
28	0.7857142857142856	3.120264476553919	0.5944506389294002
29	0.8142857142857142	-1.048660692389211	0.4140580908092334
30	0.8428571428571428	0.3871641940543687	0.3012335667222566
31	0.8714285714285714	-0.2276973042267200	0.2288597770212688
32	0.8999999999999999	-0.4285669101657374D-01	0.1819660112501051
33	0.9285714285714285	-0.1395228860540207	0.1520652534516435
34	0.9571428571428571	-0.1196270765493881	0.1343006578299263
35	0.9857142857142856	-0.1335978759152272	0.1260099818520260

table 22