

有限古典群の既約指標 の持ち上げについて

阪大・理 川中宣明

本稿は、六甲群論シンポジウム(1980)報告集に書いたもの(以下「六甲」と略記)の続きで、その定理の証明を中心に述べる。記号はすべて「六甲」の通りとする。特に、 χ を G ($=$ 標数 $p > 0$ の閉体上の古典群の $\mathbb{F}_q$ -有理点のなす有限群) の σ で固定される既約指標、 $\tilde{\chi}$ を χ の AG ($=$ 位数 m の巡回群 $A = \langle \sigma \rangle$ と G との半直積群) の既約指標への拡張としたとき、 G_0 ($= \{G \text{ の } \sigma\text{-fixed point}\}$) 上の類関数 ψ_χ を

$$\psi_\chi(C) = \tilde{\chi}(m(C)) \quad (C \text{ は } G_0 \text{ の共役類})$$

で定義する (m の定義は、「六甲」を参照)。

$(p, m) = (2, m) = 1$ なる条件のもとで、 ψ_χ が G_0 の既約指標 (定数倍を除いて) となることを示したい。

証明には、「2」と同様、Brauer の characterization of characters を用いる。即ち、次のことを示せば良い：

(I) G の任意の σ -fixed irreducible character χ と, G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, $\chi|_E$ が E の irreducible characters の $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$ -linear combination として書ける.

このためには, 次のことを言えば十分:

(II) G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, G の次のような部分群 H がとれる:

- (i) H は σ -stable.
- (ii) $E \subset H_\sigma$.
- (iii) H_σ の既約指標は, H の既約指標に "持ち上げ" することができる. 詳しく, 言えば, H の σ -fixed irreducible character ψ に対して, 半直積群 AH の既約指標への拡張 $\tilde{\psi}$ を作り, H_σ 上の類関数 ϕ_ψ を

$$\phi_\psi(D) = \tilde{\psi}(m_H(D)) \quad (D \text{ は } H_\sigma \text{ の共役類})$$

で定義すると, ϕ_ψ は定数 ($\in \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$) 倍を, 除き H_σ の既約指標となる. こゝに m_H は, $\{H_\sigma \text{ の共役類} \} \leftrightarrow \{H \text{ の } AH\text{-共役類} \}$ への bijective な対応で, 任意の $h \in H$ に対して,

$$M_H^{-1}(\sigma h \text{ の } AH\text{-共役類}) \subset M^{-1}(\sigma h \text{ の } AG\text{-共役類})$$

となっているものとする。

['(II) $\Rightarrow$ (I)' の証明]

$$\tilde{\chi}|_{AH} = \sum_i m_i \tilde{\nu}_i \quad (m_i \in \mathbb{Z}, \geq 0; \tilde{\nu}_i: AH \text{ の既約指標})$$

とする。容易にわかるように, $\tilde{\nu}_i|_H$ が可約なら $\tilde{\nu}_i(\sigma h) = 0$ ($\forall h \in H$) であるから

$$\begin{aligned} \psi_{\chi}(h') &= \tilde{\chi}(\sigma h) \\ &= \sum_i m_i \tilde{\nu}_i(\sigma h) = \sum_i' m_i \phi_{\nu_i}(h') \end{aligned}$$

(但し, $h' \in M_H^{-1}(\sigma h \text{ の } AH\text{-共役類})$; $\sum_i'$ は $\tilde{\nu}_i|_H = \nu_i$ が既約であるような i についての和). よって (II) (iii) より $\psi_{\chi}|_{H_0}$ は, H_0 の既約指標の $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$ -linear combination として書ける. よって (II) (iii) より (I) が出る。

さて, (I) を証明しよう. E を G_0 の elementary subgroup とする. 即ち, $E = \langle x \rangle \times R$. ここに $x \in G_0$, R は, ある素数 r についての r -群で, $(r, \text{ord}(x)) = 1$ である. $x = su$ ($s = \text{semisimple}$, $u = \text{unipotent}$) とし, x の Jordan 分解とする. ($\underline{G}$ は $Sp_{2n}(K)$, $SO_{2n+1}(K)$, $SO_{2n}(K)$ のうちのどれか.)
(Case 1) ' $s \notin \text{center of } \underline{G}$ かつ $r \neq 2$ ' のとき.

$$E \subset Z_{\underline{G}}(s) \text{ は明らか. } r \neq 2 \text{ より } E \subset Z_{\underline{G}}(s)^0 = Z_{\underline{G}}(s)$$

の単位元の連結成分. $H = \Sigma_G(s)^0$ は, いくつかの smaller rank ($\because s \notin \text{center } G$) の古典群の直積. よって $H = H_{\sigma^m}$ と置けば, induction の仮定により (II)(iii) が満たされている.

(Case 2) ' $s \notin \text{center of } G$, $r=2$ ' のとき.

$(\text{ord}(x), r) = 1$ であるから $(\text{ord}(s), 2) = 1$. よって $\Sigma_G(s)$ は連結, その中心は torus T となる. $T = T_{\sigma^m}$ とおくと, $s \in T_{\sigma}$ で T_{σ} の既約指標は, T の既約指標に持ち上げられる. $T_1 = \{t \in T; (\text{ord}(t), 2) = 1\}$ と置くと, $s \in T_1$ で, $T_{1,\sigma}$ の既約指標は, やはり T_1 の既約指標に持ち上げることができる. そこで $H = T_1 R \langle u \rangle$ と置くと, $H = T_1 \times R \times \langle u \rangle$ で, (II)(iii) の条件を満足する. (一般に, 有限群 K の既約指標 μ に対し $\mu_m(k) = \mu(k^m)$ ($m \in \mathbb{Z}, k \in K$) によって μ_m を定義するとき $(\text{ord } K, m) = 1$ なす μ_m もまた既約指標であること, と条件 ' $(p, m) = (2, m) = 1$ ' を用いた.)

(Case 3) ' $s \in \text{center of } G$, $r=p$ ' のとき.

$(\text{ord}(x), r) = 1$ より $u=1$, 即ち $x=s$. また, $x=s \in \text{center of } G$ より $\text{ord}(x) = 2$ のべき. よって $H = \langle x \rangle \times R$ とおくと, (Case 2) と同様に (II)(iii) を満足する.

(Case 4) ' $s \in \text{center of } G$, $r=2$ ' のとき.

$(\text{ord}(x), r) = 1$ より, $(\text{ord}(s), 2) = 1$. これより $s \in \text{center of } G$ より $s=1$, 即ち $x=u$. よって $H = \langle x \rangle \times R$ とす

れはよい.

(Case 5) ' $s \in \text{center of } \underline{G}$, $r \neq p$, $r \neq 2$, $u=1$ ' のとき.
この場合は、やや面倒である. 簡単の為, $\underline{G} = Sp_{2n}(K)$ or $SO_{2n+1}(K)$ の場合を詳しく述べることにする. $E = \langle s \rangle \times R$, R は $G_\sigma (= Sp_{2n}(\mathbb{F}_q) \text{ or } SO_{2n+1}(\mathbb{F}_q))$ の r -Sylow subgroup ($r \neq 2, p$) であるとしてよい.

$e = \text{Min} \{ \text{自然数 } i \mid i \text{ は } (q^i - 1) \text{ を割る} \}$ と置く.

Lemma. r が $(q^i - 1)$ を割る $\Leftrightarrow i$ は e の倍数.

は、容易にわかる. まず, e が奇数の場合を考える.

$\text{ord}(G_\sigma) = q^{n^2} (q^e - 1)(q^{2e} - 1) \cdots (q^{2n} - 1)$ であるから,

Lemma より,

$$\text{ord}(R) \mid (q^{2e} - 1)(q^{4e} - 1) \cdots (q^{2ne} - 1)$$

$$\text{すなわち, } 2n = 2le + k \quad (0 \leq k < 2e)$$

$r \neq 2$ より $r \mid (q^e - 1) \Rightarrow r \nmid (q^e + 1)$. よって

$$\text{ord}(R) \mid (q^e - 1)(q^{2e} - 1) \cdots (q^{2le} - 1)$$

$$\therefore \text{ord}(R) \mid \text{ord}(GL_n(\mathbb{F}_q)) \quad (\because le \leq n)$$

ところが, $\underline{G}$ の σ -stable な部分群 $H (\cong GL_n(K))$ で $H_\sigma = H_\sigma$ が $GL_n(\mathbb{F}_q)$ と同型なものが存在する. よって, Sylow の定理により, R は H_σ の部分群と見てよい. そこで $H = H_{\sigma^m} (\cong GL_n(\mathbb{F}_{q^m}))$ と置けば, [1], [2] により, (II)(iii) を満足している.

次に, e が偶数: $e=2f$, の場合を考える. Lemma
により

$$\text{ord}(R) \mid (\zeta^e - 1)(\zeta^{2e} - 1) \cdots (\zeta^{le} - 1)$$

$$\text{ここに, } 2n = le + j \ (0 \leq j < e).$$

e の定義により $r \mid (\zeta^e - 1) = (\zeta^f - 1)(\zeta^f + 1)$ から $r \nmid (\zeta^f - 1)$.

$\therefore r \mid (\zeta^f + 1)$. よって j が奇数なら $r \mid (\zeta^{2f} + 1)$.

$r \neq 2$ より $r \nmid (\zeta^{2f} - 1)$. また, $r \mid (\zeta^e - 1)$ より, 偶数 j に対して r は $(\zeta^{\frac{j}{2}e} - 1) = (\zeta^{jf} - 1)$ を割る. よって $r \neq 2$ より $r \nmid (\zeta^{2f} + 1)$ を割らない. 以上から

$$\text{ord}(R) \mid (\zeta^f + 1)(\zeta^{2f} - 1)(\zeta^{3f} + 1) \cdots (\zeta^{lf} - (-1)^l).$$

従って, f が奇数なら

$$\text{ord}(R) \mid (\zeta + 1)(\zeta^2 - 1)(\zeta^3 + 1) \cdots (\zeta^n - (-1)^n)$$

$$\therefore \text{ord}(R) \mid \text{ord}(U_n(\mathbb{F}_q))$$

よって, この場合も, $H_\sigma \cong U_n(\mathbb{F}_q)$ となるような, 代数的部分群 $H (< G)$ に対して $H = H_{\sigma^m}$ と置くことにより O, K . 次に, f が偶数の場合.

$$\text{ord}(R) \mid (\zeta^2 + 1)(\zeta^4 - 1) \cdots (\zeta^{[\frac{n}{2}] \times 2} - (-1)^{[\frac{n}{2}]})$$

$$\therefore \text{ord}(R) \mid \text{ord}(U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2}))$$

ところが, G の代数的部分群 $H' (\cong GL_{[\frac{n}{2}]}(K) \times GL_{[\frac{n}{2}]}(K))$

で $H'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$ となるものが存在する. ここで, n が偶数のときは, $H = H'_{\sigma^m}$ とし, n が奇数のときは,

H' の代わりに maximal rank の $H (\cong H' \times GL_1(k))$ を
 とって, $H = H_{\sigma^n}$ とすればよい. (maximal rank に
 したのは, ' $H_{\sigma} \Rightarrow S'$ ' を保障するため). 以上で,
 $\underline{G} = Sp_{2n}(k)$ の $SO_{2n+1}(k)$ の場合の (Case 5) の証明
 は終った. $\underline{G} = SO_{2n}(k)$ のときは, $G_{\sigma} = SO_{2n}^{\pm}(\mathbb{F}_q)$
 ($\text{ord}(G_{\sigma}) = \text{ord}(SO_{2n}^{\pm}(\mathbb{F}_q)) = q^{n(n-1)}(q^2-1)(q^4-1) \cdots$
 $\cdots (q^{2n-2}-1)(q^n \mp 1)$) である. 上と全く同
 じ論法により, R は次のような形の部分群 $H'_{\sigma} (\subset G_{\sigma})$
 に含まれることがわかり, この場合も O, K となる:

e の定義は, 上と同じ.

$[G_{\sigma} = SO_{2n}^+(\mathbb{F}_q) \text{ のとき}]$ (A) $e = \text{odd} \Rightarrow H'_{\sigma} \cong GL_n(\mathbb{F}_q)$.

(B) $e = 2f, f = \text{odd} \Rightarrow$ ① $n = \text{odd}$ のとき $H'_{\sigma} \cong U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$

② $n = \text{even}$ のとき $H'_{\sigma} \cong U_n(\mathbb{F}_q)$, (C) $e = 2f, f = \text{even}$
 $\Rightarrow$ ① $n \equiv 2 \pmod{4}$ のとき $H'_{\sigma} \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$. ② $n \not\equiv$
 $2 \pmod{4}$ のとき $H'_{\sigma} \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

$[G_{\sigma} = SO_{2n}^-(\mathbb{F}_q) \text{ のとき}]$ (A) $e = \text{odd} \Rightarrow H'_{\sigma} \cong GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)$.

(B) $e = 2f, f = \text{odd} \Rightarrow$ ① n odd のとき $U_n(\mathbb{F}_q)$ ② n

even のとき $U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ (C) $e = 2f, f = \text{even} \Rightarrow$ ① $n \equiv$

$0 \pmod{4}$ のとき $H'_{\sigma} \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$ ② $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ の

とき, $H'_{\sigma} \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

次の場合を調べれば、定理の証明は完成する。

(Case 6) ' $s \in \text{center of } \underline{G}$, $r \neq 2$, $r \neq p$, $u \neq 1$ ' のとき。

$E \subset Z_{\underline{G}}(x) = Z_{\underline{G}}(u)$ であるが、 $r \neq 2$ より、 $E \subset Z_{\underline{G}}(u)^0$ 。
 [3] より、 $Z_{\underline{G}}(u)^0 \cong \underline{M} \cdot \underline{V}$ ($\underline{M}$ = reductive, $\underline{V}$ = unipotent radical of $Z_{\underline{G}}(u)^0$) と半直積に分解され、 $\underline{M}$ は、古典群をいくつか直積したものである。Sylow の定理より、
 $\langle s \rangle \times R \subset \underline{M}_o$ 。従って (Case 5) の証明より、 $\underline{M}$ の代数的な σ -stable subgroup $\underline{H}' (\cong GL_{n_1}(k) \times GL_{n_2}(k) \times \dots)$ で $\langle s \rangle \times R \subset \underline{H}'_o$ なるものが存在する。そこで H として $\underline{H}'_o \times \langle u \rangle$ をとればよい。これで (II) の証明が完成した。

文 献

- [1] T. Shintani: Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396-414.
- [2] N. Kawanaka: On the irreducible characters of the finite unitary groups, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 425-450.
- [3] T.A. Springer - R. Steinberg: Conjugacy Classes (= Part of Springer Lecture Notes in Math. Vol. 131 (1970)).