

不規則散乱における散乱データとカオス過程

九大理 宮崎修次 吉田 健

本講演では、カオスの散乱を引き起こす不変集合の性質を、古典的な取扱いで散乱データの中から拾い出す手法を2次元の3-hard-disk (3HD) 系をモデルとして報告した。散乱データを作り出す個々の散乱過程の内、初期値に対して敏感な依存性を持つカオス的な軌道は、カントル集合状の鞍点集合を為す不変集合からのびる安定多様体に沿って相互作用領域に入り、ある遅延時間の後に、今度はその不変集合からのびる不安定多様体に沿って出てくる。この事は入射ビームの入射角には依存しない。というのは、入射角=ある一定値で与えられる初期条件の集合が安定多様体と共通部分を持てばよいからであるが、この条件は極めて一般的と言える。従って先に述べた遅延時間に着目し、時間遅れを伴った散乱角を用いてその分布を求めると、それは入射角に依らない系固有の特徴的な分布となる。

以上の手法をモデルに即して、少し詳しく説明しよう。3HD系の幾何学的配置は図1に示した通りで、個々の衝突過程を記述するには同図に示した2つの角度変数 β , α とディスクの識別変数 $d(=1, 2, 3)$ を用いると都合がよい。これらの変数は通常の変数(速度ベクトル $\mathbf{v}$ とx軸のなす角 φ , 無次元化した角運動量 $\Omega(\equiv 2(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z / R|\mathbf{v}|)$)とは次の関係にある。個々の衝突に対して衝突直前、直後でそれぞれ

$$\begin{cases} \varphi = \alpha - \beta + 2\pi(d-1)/3 \\ \Omega = (2/\sqrt{3}) \sin(\alpha - \beta) - r \sin \alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi = \pi - \alpha - \beta + 2\pi(d-1)/3 \\ \Omega = (2/\sqrt{3}) \sin(\alpha + \beta) - r \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

が成立する。 $0 < r(\equiv 2a/R) < \sqrt{3}/2$ で特に断らない限り $r = 0.5$ とおく。そして衝突の過程は、今ある (β, α, d) で衝突が起こったとして、以下のいずれかの衝突条件を満たすとき、次の衝突 (β', α', d') が写像によって表現できる。

$$-\beta + \tan^{-1} \frac{A_-}{B} - \sin^{-1} \frac{r}{\sqrt{A_-^2 + B^2}} \leq \alpha \leq -\beta + \tan^{-1} \frac{A_-}{B} + \sin^{-1} \frac{r}{\sqrt{A_-^2 + B^2}} \quad (3)$$

$$-\beta - \tan^{-1} \frac{A_+}{B} - \sin^{-1} \frac{r}{\sqrt{A_+^2 + B^2}} \leq \alpha \leq -\beta - \tan^{-1} \frac{A_+}{B} + \sin^{-1} \frac{r}{\sqrt{A_+^2 + B^2}} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha' = \sin^{-1} \left\{ \frac{2}{r} \sin(\alpha + \beta - P\frac{\pi}{6}) - \sin \alpha \right\} \\ \beta' = -P\frac{\pi}{3} + \alpha + \beta + \alpha' \\ d' = d + P \pmod{3} \end{cases} \quad (5)$$

$$P = \begin{cases} +1 & ((3) \text{ を満たす}) \\ -1 & ((4) \text{ を満たす}) \end{cases} \quad (6)$$

ここで $A_- = 1 - r \sin \beta$, $A_+ = 1 + r \sin \beta$, $B = \sqrt{3} - r \cos \beta$, である。衝突条件を満たさなくなれば、それ以後等速直線運動をしながら相互作用領域から離れていき、そのときの (β, α, d) から関係式(2)を経て、散乱データ $(\varphi_{final}, \Omega_{final})$ が得られる。

衝突条件(3), (4)をそれぞれ図に表したものが図2の S_+ , S_- で、上の写像を用いて1回写像を施したものが U_+ , U_- である。明らかに $S = S_+ \cup S_-$ に安定多様体が含まれ、

$U = U_+ \cup U_-$ に不安定多様体が含まれ、それらの共通部分（相互作用領域） $S \cap U$ に不変集合が含まれる。

S を (β, α) の代わりに (φ, Ω) を用いて表したものが図3に描かれている。(1), (2), (3) は最初に衝突するディスクの番号に対応する。(+) は S_+ に, (-) は S_- に相当する。あるディスクに目を付けると、遠くから粒子が飛んでくるとき他の2つのディスクが障害となって目を付けたディスクに衝突が起こらない部分が空白として現れる。これらを除いた印を付けた領域と $\varphi = \varphi_{\text{initial}}$ (入射角) という縦線で表される初期値の集合が共通部分を持てば、初期値の中に安定多様体の十分近くにあるものが存在することを意味し、それらはカオス散乱を引き起こす。 $-\pi < \varphi \leq \pi$ の任意の φ = 一定の縦線は必ず上述の領域と交わりを持つことを図3は示している。これより、入射角の設定の仕方によらず、カオス散乱を起こす初期値が存在することがわかった。

次は、時間遅れを伴った散乱データ $(\varphi_{\text{final}}, \Omega_{\text{final}})$ を図4 (1)~(3) にプロットしてみる。(1), (2), (3) は最後に衝突するディスクの番号に対応する。これらは不安定多様体に沿って出てきたものだから、その図形は不安定多様体を近似したものとなる。またこのデータを使って散乱角の分布を構成すると図4 (4) となり、系の持つ $2\pi/3$ の回転対称性を反映した特徴的な図形が得られる。これも含めて、以後全ての分布はヒストグラムの全面積が1となるように規格化されている。系のパラメータ r を変えると図形は変わるが、系の回転対称性を反映する点は変わらない。(図5)

図6に3つの初期条件の組 (a), (b), (c) について、散乱角分布が、考慮する時間遅れを長くするにつれて、特徴的な図形に落ちつく様子を示している。(a): $\varphi_{\text{initial}} = 0$, Ω_{initial} は一様分布。(b): $\varphi_{\text{initial}} = \pi$, Ω_{initial} は一様分布。(c): $\varphi_{\text{initial}} = 0$, $\Omega_{\text{initial}} \in (+)$ で一様分布。これらの初期条件の組は図3の (a), (b), (c) にそれぞれ対応する。

図6の特徴分布は一見連続的に見えるが、不安定多様体が相互作用領域の境界を横切るところで特異となり得る。図4の (1) と (4) の間の破線に、特徴分布との対応関係が部分的に表してある。相互作用領域にあれば必ず次の衝突が起こり、散乱データとしては観測されず、そこでの不安定多様体は描かれない。その結果、図4 (1)~(3) の空白ができる。

不変集合が有限個の不安定周期点であれば、規則的な散乱が起こるが、これまでの話はこの場合にも適用され特徴的な散乱角分布が得られる。従って、この特徴分布自体は、一般的には、考えている散乱過程がカオス的か否かを判別する基準とはならない。そこで角運動量 Ω が $\Omega \in [0.00, 0.01]$ (図4の横方向の狭い領域に対応する) を満たすもののみを用いて、時間遅れを伴った散乱角の分布を作ってみると、図7のようなフラクタル的なヒストグラムが得られる。この次元 D_u は図4からわかるように不安定多様体の横断的構造から得られる。従って、他のハミルトン系と同様、位相空間全体の中で不変集合の持つフラクタル次元 D は $D = 2D_u + 1$ で与えられる。

これまで使った3HD系というモデルは、相互作用領域からの逃散の仕方が指数関数的である。べき的な場合どうなるのか現在不明である。2次元のハミルトニアンを与えて、この場合今の手法が適用できるか否か、目下計算機実験によって検証している所である。

以上をまとめると、相互作用領域からの逃散が指数関数的な場合、時間遅れを伴った散乱角分布は入射角によらない、根底にある不変集合を反映した系固有の特徴的な形となる。そして制限付き散乱角分布はカオス、非カオスの判定や、フラクタル次元の測定に有用である。この手法は極めて一般的であり、上の結論はモデルによらない。同様の結論を1次元のMuffin-tin系を用いて既に得ている。時間遅れを利用するため、入射ビームとしてパルス状のものを用いなければならないが、散乱粒子の角度と角運動量だけを測定できればよいから、この手法はかなり実用的ともいえる。

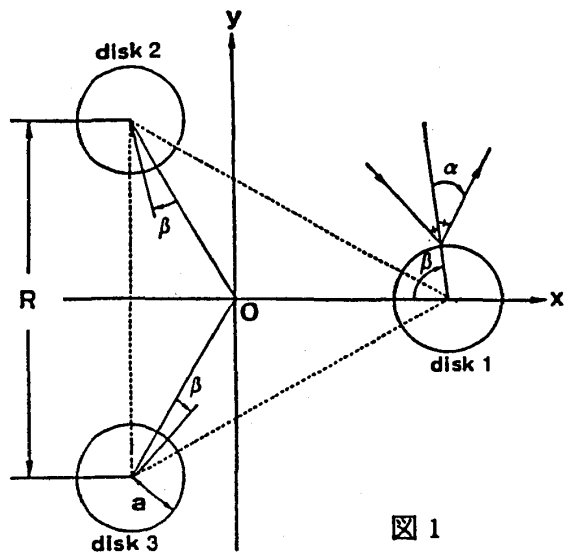


図 1

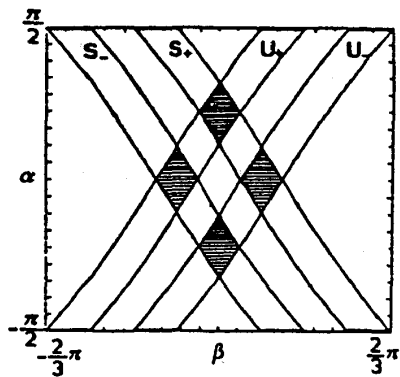


図 2

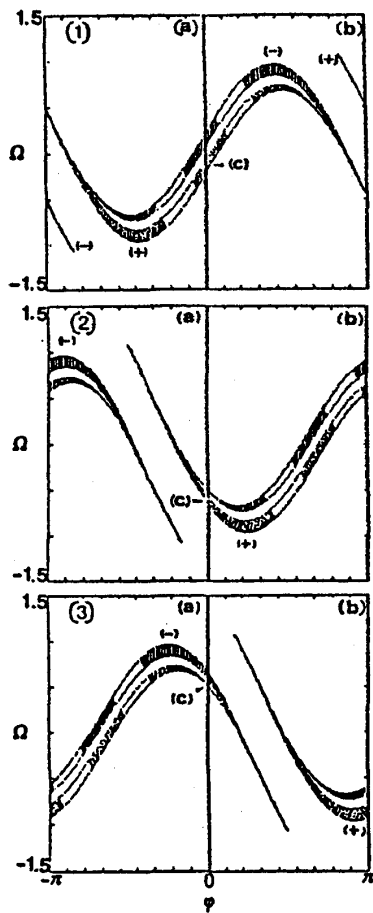


図 3

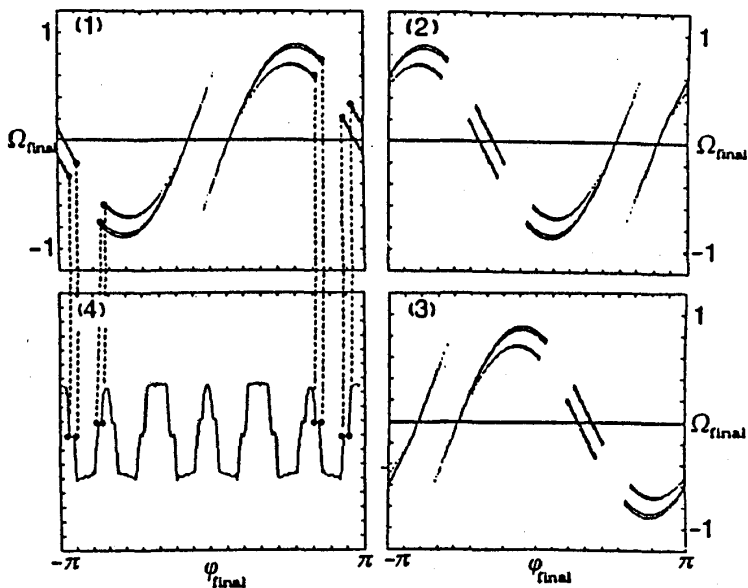


図 4

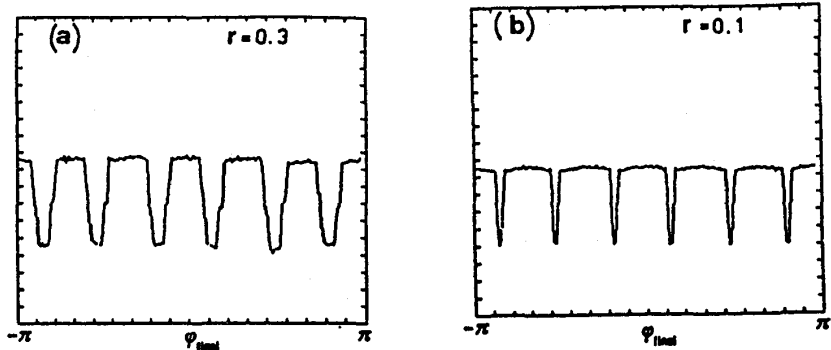


図 5

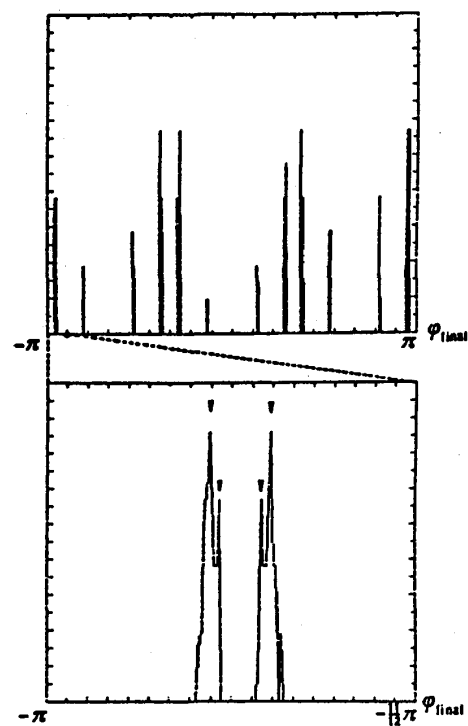
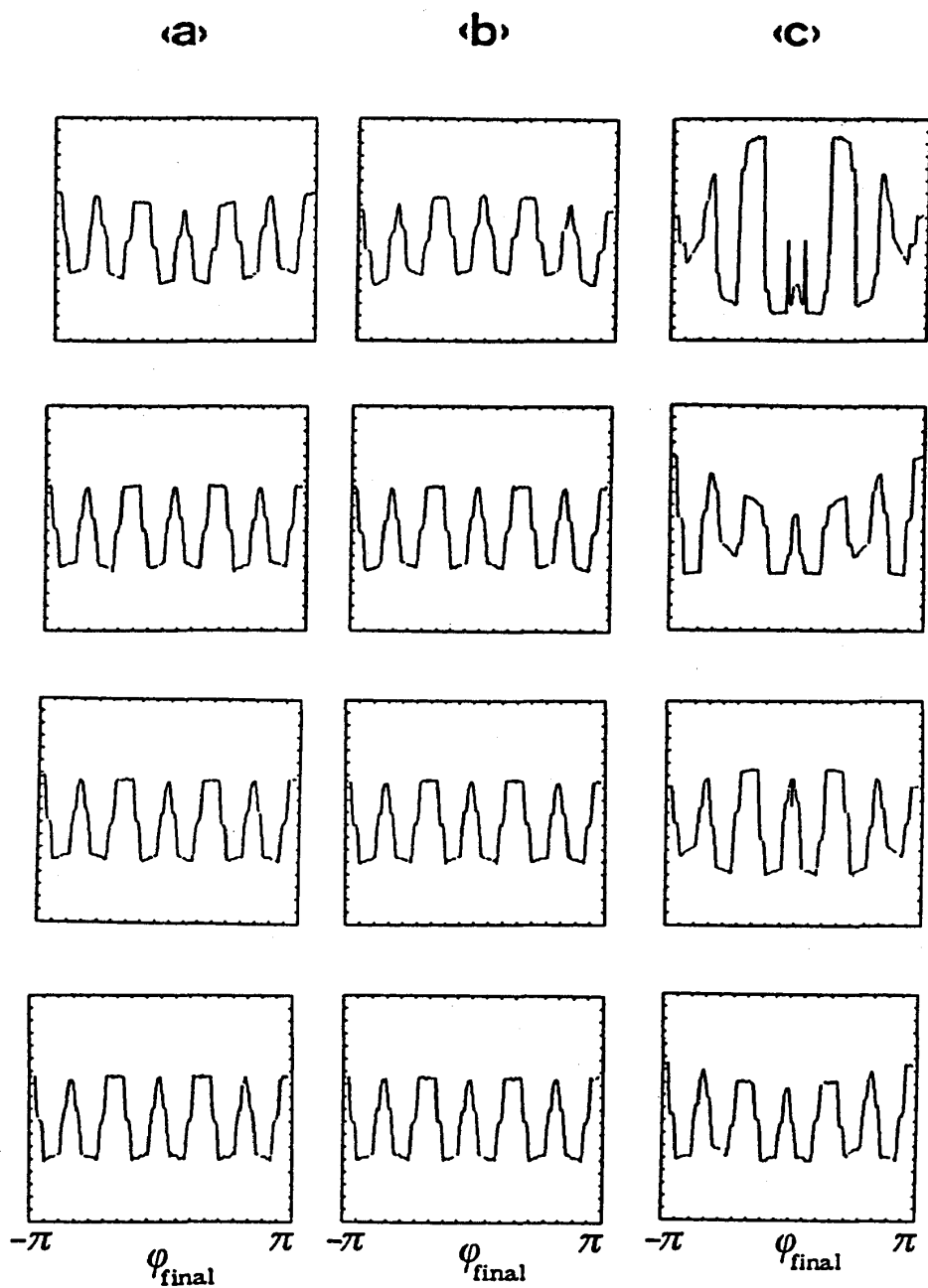


図 7

図 6