

ROYDEN ALGEBRAS AND QUASIISOMETRIES OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

名大理 中井 三留

§ 1. 序

m 次元 ($m \geq 2$) Euclid 空間 E^m の部分領域 D を考える。
次の問題を論ずる: “ D 上の調和函数論は D のいかなる幾何学的対象によって決まるか?” D の南集合 ∂ と ∂ 上の調和函数 h の組 (∂, h) の全体が D 上の調和函数論であるが, 二つでは h の ∂ 上の Dirichlet 積分 $D_\partial(h) = \int_\partial |\text{grad } h(x)|^2 dx$ が有限となるものに限定するいわゆる ‘Dirichlet 有限調和函数論’ を考えることにする。答は, 大ざっぱに言って次元 $m=2$ なる角度であり $m \geq 3$ なる距離である。次の様に考える: Dirichlet 原理を通じて, 又 Virtanen 現象を通じて Dirichlet 有限調和函数論は D 上有界連続 Dirichlet 有限函数の作るいわゆる Royden algebra $\mathcal{R}(D)$ で決まるといえると思つてよい。そこで D のどんな幾何学的構造が $\mathcal{R}(D)$ を定めるかという問題を考える。2つの領域 D_1, D_2 をとり $\mathcal{R}(D_1)$ と $\mathcal{R}(D_2)$ がいつ代数的に同型かを

幾何学的に答えたらしい。その答が $m=2$ なら D_1 と D_2 の間の
あまり角度を変えない位相同型のあること、 $m \geq 3$ なら D_1 と
 D_2 の間のあまり距離を変えない位相同型のあること、となる。

§2. 定義と定理

以下 Riemann 多様体 M とは連結可分可符号 m 次元 ($m \geq 2$) C^1
多様体で次の条件を満足する計量テンソル (g_{ij}) をもつものと
する：局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ の局所座標球 B における g_{ij} の局
所表現 $g_{ij}(x)$ は x の Borel 可測函数で、ある有限定数 $k_B \geq 1$ が
あって

$$(1) \quad k_B^{-1} \sum_{i,j=1}^m (\xi^i)^2 \leq \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x) \xi^i \xi^j \leq k_B \sum_{i=1}^m (\xi^i)^2$$

がすべての $x \in B$ とすべてのベクトル $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ について成
り立ち、更にある座標球による M の被覆 $\{B\}$ ですべての B で

$$(2) \quad 1 \leq k_B \leq c$$

となる有限定数 c が存在する。 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$ とお
く。 M 上の線要素 $ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x) dx^i dx^j$ により M の2点の
距離 ($p, q \in M$) は

$$(3) \quad \rho_M(p, q) = \inf \int_\gamma ds$$

で与えられる。こゝに $\inf$ は p と q を結ぶ長さのある曲線 γ

についてとる.

座標直方体 $B: a^i < x^i < b^i$ 上の函数 f が 'absolutely continuous on lines' (ACL と略記) とは B の $x^i = a^i$ とある面を B_i と記すとき $f(\zeta + \xi e_i)$ ($e_i = (\delta^{i1}, \dots, \delta^{im})$) が殆んどすべての $\zeta \in B_i$ ($(m-1)$ -次元 Lebesgue measure について) をとめるごとくに $\xi \in (a^i, b^i)$ の函数として絶対連続なことをする ($i=1, \dots, m$). M 上の函数 f が ACL とは $f|B$ がすべての座標直方体 B について ACL となることをする. かつ f に対しては Dirichlet 積分

$$(4) \quad \mathbb{D}_M(f) = \int_M \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \sqrt{g(x)} dx^1 \cdots dx^m$$

が定義できる. M 上有界連続 ACL 函数 f で $\mathbb{D}_M(f) < \infty$ となるものの全体を $\mathcal{R}(M)$ と記す. これは通常の函数の和積に関して algebra を作り, Royden algebra と呼ぶ.

2 位の Riemann 多様体 M_1, M_2 の間の位相同型 T を考える.

$f_i(p, q) = f_{M_i}(p, q)$ とし, もしある有限定数 K があって

$$(5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{f_i(p, p_0) = n} f_j(T_1 p, T_2 p_0)}{\min_{f_i(p, p_0) = n} f_j(T_1 p, T_2 p_0)} \leq K$$

が M_2 のすべての点 p_0 で成り立つならば, T は quasiconformal mapping と呼び M_1 と M_2 は同一の quasiconformal structure をもつと言う. ここで $(i, j) = (1, 2)$ 又は $(2, 1)$, $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$.

もし (5) の代りに更に強く

$$(6) \quad K^{-1} \rho_1(p, q) \leq \rho_2(Tp, Tq) \leq K \rho_1(p, q)$$

が M_1 のすべての二点 p, q で成り立つならば T は *quasisometry* と呼ばれ, M_1 と M_2 は同一の *quasisometric structure* をもつと言う。

以上の定義のもとに次の結果をのべることが出来る:

定理: m 次元 Riemann 多様体 M につづいた Royden algebra $\mathcal{R}(M)$ の代数的構造は, M の *quasiconformal structure* ($m=2$) 又は M の *quasisometric structure* ($m \geq 3$) により決まる。

この定理の証明は Pacific J. Math. に近刊の筆者の二論文 (Radon-Nikodym densities and Jacobians; Royden algebras and quasi-isometries of Riemannian manifolds) に与えられているが, ここで M が E^m の部分領域の場合に証明する。その場合更に $m=2$ のときは Sario と筆者の本 (Classification Theory of Riemann surfaces, Springer, 1970) に詳しくのべてあるので, $m \geq 3$ に限定して話をする。更に, M_1 から M_2 への *quasisometry* があれば, それが $\mathcal{R}(M_1)$ から $\mathcal{R}(M_2)$ への代数的同型を induce

することもほぼ自明だから,

" E^m ($m \geq 3$) の部分領域 M_1, M_2 に対し, $\mathcal{R}(M_1)$ と $\mathcal{R}(M_2)$ の間の代数的同型は M_1 から M_2 への *quasisometry* を induce する"

このことを証明する.

§3. 証明の大要

$\mathcal{R}(M)$ の maximal ideal space ($\mathcal{R}(M)$ は norm $\|f\|_M = \|f\|_\infty + \sqrt{\mathcal{D}_M(f)}$ による norm 環 と なる) M^* は M の Royden 完備化と呼ばれ M を open dense に包んでいる. $p^* \in M^*$ が $p^* \in M$ と なる 為の 必要十分条件は $\{p^*\}$ が G_δ -set と なる ことである. これより $\mathcal{R}(M_2)$ から $\mathcal{R}(M_1)$ への代数的同型は M_1 から M_2 への位相同型 T により $f \rightarrow f \circ T$ と表される. 又これが norm 環の代数的同型 なる ことからある有限定数 $K \geq 1$ があって

$$K^{-1} \|f\|_{M_2} \leq \|f \circ T\|_{M_1} \leq K \|f\|_{M_2}$$

がすべての $f \in \mathcal{R}(M_2)$ に対して成立する. $\mathcal{R}(M)$ が上記の函数の max, min に関して 1 つトル束を作ること, norms $\|f\|_\infty, \sqrt{\mathcal{D}_M(f)}$ の特殊性により (筆者: Continuity in mixed norms, Proc. Japan Acad. 45 (1969), 385-387)

$$(7) \quad K^2 \mathcal{D}_{M_2}(f) \leq \mathcal{D}_{M_1}(f \circ T) \leq K^2 \mathcal{D}_{M_2}(f)$$

がすべての $f \in \mathcal{R}(M_2)$, 従ってすべての M_2 上 ACL で $\mathbb{D}_{M_2}(f) < \infty$ な函数 f について成立する. この様な T は Dirichlet mapping と呼ばれる. したがって "Dirichlet mapping は quasimetry ($m \geq 3$)" を示せばよい. 球環領域の harmonic modulus を利用すると T は measurable, 従って Random-Nikodym density R_T をもつことがわかる. 他方 T は常に a.e. に Jacobian J_T をもつ. ところで実函数的定理が必要となる: 一般に

定理: T が E^m ($m \geq 1$) の領域 M_1 から M_2 への位相同型で measurable 且つ M_1 の殆んどすべての点で偏微分可能とする. そのとき常に

$$(8) \quad R_T(x) \leq |J_T(x)|$$

が殆んどすべての点 $x \in M_1$ で成立する.

これと (7) 等を使って, ある定数 K_1 に対し

$$(9) \quad |J_T(x)|^2 \leq K_1^m |J_T(x)|^m$$

が M_1 の殆んどすべての点で成り立つことがわかる. $m \geq 3$ の仮定が本質的にきいてくるのはこの点であって, (9) から

$$\text{ess. inf}_{x \in M_1} |J_T(x)| > 0$$

が得られ, 証明が終る. $m=2$ なら end up with nothing である.

この莫大虚筆著には面白く思われ, 技術上の $m \geq 3$ の意味はよくわかるが, 真の本質が何か未だよくわからない.