

バナッハ環のテンソル積の表現について

東北大 教養 岡 田 隆 照

C^* 環 A, B の代数的なテンソル積 $A \otimes B$ の, Hilbert 空間
の上の有限作用素の環としての表現 π は常に

$$\|\pi(x \otimes y)\| \leq \|x\| \|y\|, \quad x \in A, y \in B$$

を, 依って,

$$\|\pi(t)\| \leq \|t\|_Y, \quad t \in A \otimes B$$

を満足するのであるが [5], この事實はかなり基本的である
にも拘らず, あまり知られていないように思われるので, この
機会に紹介してみたい。

一般に, involutive τ -環 A の上のノルム $\|\cdot\|$ が, A をノルム
環にするだけであるとき, C^* 環

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad x \in A$$

を満たすものを C^* ノルムと呼ぶ。先づ, この種のノルムを
自然に拡張する方法について考える。

補題 1. involutive τ -環 A の, involution を用いた ideal I
の上には C^* ノルム $\|\cdot\|$ が与えられたとする。もしも $x \in A$

1.2.1

$$\|x\|^{\wedge} = \sup \{ \|xy\| : y \in I \text{ 且 } \|y\| \leq 1 \} < \infty$$

が成り立つ。これを $\|\cdot\|^{\wedge}$ と定義した。 $\|\cdot\|^{\wedge}$ は A の上の準ノルムであって、 I 上では $\|\cdot\|$ と一致し、同様に

$$\|xy\|^{\wedge} \leq \|x\|^{\wedge} \|y\|^{\wedge}, \quad \|x^*x\|^{\wedge} = \|x\|^{\wedge}, \quad x, y \in A$$

を満たす。更に $\|\cdot\|^{\wedge}$ がノルムであるための必要十分条件は I の左 annihilator $L_A(I)$ が 0 であることである。

さて involutive な Banach 環 A, B が共に単位元をもつ。これを $A \otimes B$ の上の C^* ノルム $\|\cdot\|$ とするとき、

$$\|x \otimes y\| = \|(x \otimes 1)(1 \otimes y)\| \leq \|x \otimes 1\| \|1 \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|$$

であるから、

$$(*) \quad \|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|, \quad x \in A, y \in B$$

が成り立つが、これを単位元をもつとは限らない、しかし近似単位元をもつという環についてもある。そのために補題 1 が利用される。

補題 2. 近似単位元をもつ involutive な Banach 環 A, B の代数的テンソル積 $A \otimes B$ の上の C^* ノルムは subnormal である、即ち $(*)$ を満足する。

これを示すには $A \otimes B$ の上に与えられた C^* ノルム $\|\cdot\|$ を補題 1 の方法で $A_1 \otimes B_1$ の上への拡張すればよい。 $1 = 1_{A_1}$ は、もし A が単位元をもつのであれば自明、もし単

位元を $\mathbf{1}$ として $\mathbf{1}$ は $\mathbf{0}$ 以外の元には単位元を添加した $\mathbf{1}$ の下を

とし、 B_1 も同様である。 $L_{A_1 \otimes B_1}(A \otimes B) = \{0\}$ と

$$\sup \{\|uv\| : v \in A \otimes B \text{ 且 } \|v\| \leq 1\} < \infty, u \in A \otimes B$$

が成り立つことは、 $\mathbf{1}$ である。 $\mathbf{1}$ である。

補題 2 の最初の仮定は次の定理である。

定理 1. C^* 環 A, B の代数的テンソル積 $A \otimes B$ の上の C^* ノルムは $\|\cdot\|_A \otimes \|\cdot\|_B$ である。

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|, \quad x \in A, y \in B;$$

従って $\|\cdot\|_A \otimes \|\cdot\|_B$ は $A \otimes B$ の C^* ノルムである。

$$\|t\| \leq \|t\|_A \otimes \|\cdot\|_B, \quad t \in A \otimes B.$$

これは C^* ノルムの $\|\cdot\|_A \otimes \|\cdot\|_B$ が $A \otimes B$ の C^* ノルムであること
からわかる。

補題 2 の $\mathbf{1}$ の仮定は次の定理である。

定理 2. 双対的な単位元 $\mathbf{1}$ を持つ involutive Banach 環 A, B が共に $\mathbf{1}$ を持つとき、 $\pi \in A \otimes B$ の表現とすれば次の (i) - (iii) が成り立つ。

$$(i) \quad \|\pi(x \otimes y)\| \leq \|x\| \|y\|, \quad x \in A, y \in B;$$

$$(ii) \quad \|\pi(t)\| \leq \|t\|_A \otimes \|\cdot\|_B, \quad t \in A \otimes B;$$

(iii) π の表現空間の上の、 A, B の表現 π^1, π^2 が存在し、

$$\pi(x \otimes y) = \pi^1(x) \pi^2(y) = \pi^2(y) \pi^1(x), \quad x \in A, y \in B.$$

こゝに, Hilbert 空間の上の有限正作用素の環としての表現を単に表現ということにする. (i)では, A, B の忠実な表現 ρ, σ とするとき $\|\pi \otimes (\rho \otimes \sigma)(t)\|$ が $A \otimes B$ の C^* ノルムを与えることに注意しなければならない. (ii)は本質的に Glimmer [1] に受う.

定理 2 から, $A \otimes B$ の上の最大の C^* ノルムは

$$\|t\|_\infty = \sup \{ \|\pi(t)\| : \pi \text{ は } A \otimes B \text{ の表現} \}, t \in A \otimes B$$

に等しい定義である $\|\cdot\|_\infty$ であることがわかる. このノルムは次の定理 [2], [3], [4] に述べる意味をもっている.

定理 3. 近似的単位元をもつ involutive な Banach 環 A , B の有限テンソル積 $A \otimes B$ の上の最大ノルム $\|\cdot\|_\infty$ は, $A \otimes B$ を A の包絡 C^* 環 $C^*(A)$ と B の包絡 C^* 環 $C^*(B)$ の $\vee$ テンソル積 $C^*(A) \vee C^*(B)$ に埋め込める同型写像を重とすると

$$\|\pi(t)\|_\infty \leq \|t\|_\rho, t \in A \otimes B$$

を満足するとする. このとき A と B の ρ テンソル積 $A \otimes_\rho B$ の包絡 C^* 環 $C^*(A \otimes_\rho B)$ は $C^*(A) \vee C^*(B)$ と同型である.

2 頁

1. A. Guichardet, Caractères et représentation de produits de C^* -algebres, Ann. Éc. Norm. Sup. 81 (1964), 189 - 206.

2. ———, Tensor products of C^* -algebres, Doklady Acad. Sci. USSR, 160 (1965), 986 - 989; Soviet Math., 6 (1965), 210 - 213.

3. K. B. Laursen, Tensor products of Banach algebres with involution, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 467 - 487.

4. T. Oikawa, On the tensor products of C^* -algebres, Tohoku Math. Journ. 18 (1966), 325 - 331.

5. ———, On representations of tensor products of involutive Banach algebres, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 404 - 408.

— ◇ —