

乱流のサブグリッドスケール代数応力モデル における時間スケール方程式

慶應義塾大学法学部 下村 裕 (Yutaka Shimomura)

1. 序

ラーゼーエディーシミュレーション¹⁾(LES)は高レイノルズ数乱流の詳細な予測を目標とする、空間平均に対する乱流モデルを内在した数値シミュレーション法である。LESでは流れ場がフィルター平均を用いることによって、計算格子以上のスケール(grid-scale, GS)と以下のスケール(subgrid-scale, SGS)をもつ成分に分解される。つまり、速度の*i*成分、圧力をそれぞれ u_i, p とすれば

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'', \quad p = \bar{p} + p'', \quad (1)$$

のように表現される。ここで $\bar{u}_i$ と $\bar{p}$ は空間的にフィルター平均されたGS成分であり、 u_i'' と p'' は残りのSGS成分である。LESでモデル化しなければならない統計量は、以下に定義されるレナード項 L_{ij} 、クロス項 C_{ij} 、そしてSGSレイノルズストレス R_{ij} である。

$$L_{ij} = -(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j),$$

$$C_{ij} = -(\overline{u_i u_j'' + u_j u_i''}),$$

$$R_{ij} = -\overline{u_i'' u_j''}. \quad (2)$$

従来多用されてきた代表的 S G S モデルは (2) 式の各項を次のように表現するスマゴリンスキーモデル¹⁾である。

$$L_{ij} + C_{ij} = 0, \quad (3)$$

$$R_{ij} = -2/3 K \delta_{ij} + 2\nu_S \bar{S}_{ij}. \quad (4)$$

(4) 式で δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号であり、S G S 乱流エネルギー K と G S 歪テンソル $\bar{S}_{ij}$ はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2} \overline{u_a'' u_a''}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

と定義されている。(これ以降、重複する添字は和をとるものとする。)(4) 式の S G S 渦粘性 ν_S は、 Δ をフィルター幅の代表的長さとして

$$\nu_S = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ab} \bar{S}_{ab}}, \quad (6)$$

で与えられる。ここで C_S はスマゴリンスキー定数と呼ばれるモデル定数で、様々な乱流に対して普遍的な値をとると期待されてきた。

しかしながら、 C_S はシミュレートする乱流に対して値を変える必要があることが認識されている。例えば一様等方減衰乱流に対しては $C_S \cong 0.20$ ²⁾、混合層乱流では $C_S \cong 0.16$ ³⁾、そして平行平板間溝乱流では $C_S \cong 0.10$ ⁴⁾、と最適化されている。平均シアースレイトが大きくなるにつれ C_S の最適値は小さくなる様である。この結果は C_S を普遍定数とみなすスマゴリンスキーモデルの重大な欠陥を示唆している。

筆者はこの欠陥を解決すると期待される、普遍定数だけで構成される新しい S G S モデルを提案した。⁵⁾ このモデルはアンアンプル平均型の乱流モデルで用いられる代数応力モデル^{6,7)} (A S M) の S G S 版で、S G S 代数応力モデル (S G S A S M) と称している。S G S A S M の定式化において、サブグリッドスケール乱流の時間スケールをどのように

モデル化すべきかという問題がある。もっともシンプルなスマゴリンスキー型の時間スケールを選んだ場合、SGSAMは比較的少ない計算格子で系の回転等の効果を表現できることが確かめられている。^{8,9)}ちなみに上記の欠陥を解決する他のSGSモデルも提案されているが、¹⁰⁻¹²⁾計算格子数が少ない場合にそれらが回転等の効果を表現できるかどうかは確認されていない。

本研究ではSGSAMにおける時間スケールのモデル化を考察し、3種類の時間スケールモデルを組み込んだSGSAMによるLESを直接数値シミュレーション(DNS)と比較することによって、どの時間スケールモデルが適当であるか検討する。対象とする流れは一様回転乱流と周期せん断乱流である。

2. ではSGSAMを定式化し、3. ではSGSAMにおける時間スケールのモデルを3種類提案する。4. では回転系一様乱流、及び周期せん断乱流に対して、スマゴリンスキーモデル、及び異なる時間スケールモデルを組み込まれた3種類のSGSAMによるLESを行い、DNSデータと比較検討する。最後に5. で結論を述べる。

2. SGS代数応力モデル(SGSASM)の定式化

SGS代数応力モデル(SGSASM)はアンサンブル平均型の代数応力モデル^{6,7)}において、アンサンブル平均をフィルター平均に置き換えることによって構成できる。(従ってレナード項 L_{ij} とクロス項 C_{ij} の和はスマゴリンスキーモデル同様無視される。)ただしLESでは、SGS乱流エネルギー K が計算格子幅とSGS乱流エネルギー散逸率 ϵ でスケールされることを仮定する。またSGSAMを構成する際にSGS圧力歪テンソル相関 Π_{ij} にどんなモデルを採用するかという問題が生じる。ここでは、最もシンプルなLRモデル¹³⁾を用いることにする。

S G S 圧力歪テンソル相関 Π_{ij} は

$$\Pi_{ij} = p'' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) + \overline{(L_{ia} + C_{ia} + R_{ia}) \frac{\partial u_j''}{\partial x_a} + (L_{ja} + C_{ja} + R_{ja}) \frac{\partial u_i''}{\partial x_a}}, \quad (7)$$

と定義されるが、これを

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & -C_1 \epsilon b_{ij} + C_2 K \bar{S}_{ij} + \\ & C_3 K (b_{ia} \bar{S}_{ja} + b_{ja} \bar{S}_{ia} - 2/3 b_{ab} \bar{S}_{ab} \delta_{ij}) + \\ & C_4 K (b_{ia} \bar{W}_{ja} + b_{ja} \bar{W}_{ia}) - C_4 K (b_{ia} \epsilon_{jab} + b_{ja} \epsilon_{iab}) \Omega_b, \end{aligned} \quad (8)$$

とモデル化するのが L R R モデルである。ただし (8) 式は角速度 Ω_i で回転する系での表式となっている。ここで ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルであり、S G S 非等方テンソル b_{ij} 及び G S 渦度テンソル $\bar{W}_{ij}$ はそれぞれ

$$b_{ij} = -\frac{R_{ij}}{2K} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \bar{W}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

と定義されている。モデル定数 C_1 、 C_2 、 C_3 、そして C_4 は

$$C_1 = 3.6, \quad C_2 = 0.80, \quad C_3 = 1.2, \quad C_4 = 1.2, \quad (10)$$

と最適化されている。この L R R モデルを採用し、文献 7) の仮定をすると以下の S G S A S M が得られる。

$$A_{ijab} b_{ab} = -G_1 \tau \bar{S}_{ij}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = & \delta_{ik} \delta_{jl} + \tau \left[G_2 (\bar{S}_{ik} \delta_{jl} + \bar{S}_{jk} \delta_{il} - 2/3 \bar{S}_{kl} \delta_{ij}) + \right. \\ & \left. G_3 (\bar{W}_{ik} \delta_{jl} + \bar{W}_{jk} \delta_{il}) - G_4 \Omega_m (\epsilon_{ikm} \delta_{jl} + \epsilon_{jkm} \delta_{il}) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$K = (G_5 \Delta / \tau)^2, \quad (13)$$

$$C_1^* = C_1 + P/\epsilon - 1, \quad G_1 = (4/3 - C_2)/C_1^*,$$

$$G_2 = (2 - C_3)/C_1^*, \quad G_3 = (2 - C_4)/C_1^*, \quad G_4 = (4 - C_4)/C_1^*. \quad (14)$$

(14) で P は S G S 乱流エネルギー生成率で、

$$P = -2K b_{ab} \bar{S}_{ab}, \quad (15)$$

と定義されている。

上記のように S G S A S M では、 b_{ij} に関する線形連立方程式 (11) を (12)、(14) を用いて各計算格子点で数値的に解き、(9) と (13) を用いて S G S レイノルズストレス R_{ij} を求めるのである。モデル定数 G_5 は未定であるが、本研究では

$$G_5 = 0.65 \quad (16)$$

という値が用いられる。表式 (11)-(13) における τ は S G S 乱流の時間スケール

$$\tau = \frac{K}{\epsilon} \quad (17)$$

を意味しているが、そのモデル化を次に考察する。

3. S G S A S M における時間スケールのモデル方程式

2. で定式化された S G S A S M において、時間スケール τ のモデル化の問題が残っている。 τ が満足する方程式の型として 2 種類考えられる。代数方程式型と輸送方程式型である。

a) 代数方程式型

乱流エネルギー生成率 P と乱流エネルギー散逸率 ϵ がバランスしていると仮定する。すなわち

$$\frac{P}{\epsilon} = 1. \quad (18)$$

この仮定を (15) と (17) を用いて書き直せば

$$-2\tau b_{ab} \bar{S}_{ab} = 1, \quad (19)$$

となる。この方程式 (19) は、式中の b_{ij} に τ を含んだ (11) の解を代入すると、 τ に関する代数方程式となることが解る。これは高次の代数方程式なので数値的にも厳密に解くのは困難である。

そこで (19) を τ に関して摂動的に解くことにする。(11) と (12) から

$$b_{ij} = -G_1 \tau \bar{S}_{ij} - \tau A'_{ijab} b_{ab}, \quad (20)$$

$$A'_{ijkl} = G_2 \left(\bar{S}_{ik} \delta_{jl} + \bar{S}_{jk} \delta_{il} - 2/3 \bar{S}_{kl} \delta_{ij} \right) +$$

$$G_3 \left(\bar{W}_{ik} \delta_{jl} + \bar{W}_{jk} \delta_{il} \right) - G_4 \Omega_m \left(\epsilon_{ikm} \delta_{jl} + \epsilon_{jkm} \delta_{il} \right), \quad (21)$$

と書ける。(20) 式右辺第 1 項は S G S レイノルズ応力の渦粘性表現に対応しており、この項を基本に第 2 項を τ の 2 次まで摂動すると、

$$b_{ij} = -G_1 \tau \bar{S}_{ij} + G_1 \tau^2 A'_{ijab} \bar{S}_{ij}, \quad (22)$$

という摂動解を得る。この摂動解を (19) に代入することによって、時間スケール τ に対するモデル 3 次方程式が以下のように導出される。

$$\zeta \tau^3 - \xi \tau^2 + 1 = 0, \quad (23)$$

$$\zeta = 4G_1G_2\bar{S}_{ab}\bar{S}_{bc}\bar{S}_{ca}, \quad \xi = 2G_1\bar{S}_{ab}\bar{S}_{ba}. \quad (24)$$

この方程式は条件

$$\zeta < 0, \text{ or, } G_2^2/G_1 < 2/9, \quad (25)$$

が満足されれば、正根が少なくとも一つ存在することが証明できる（十分条件）。本研究におけるシミュレーションでは、 $G_2^2/G_1 = 0.32 > 2/9 = 0.22$ で後者の条件は完全には満足されていないが、前者の条件が満足される場合が多いという事実によって、常に正根が存在した。以後この3次方程式の正根として決まる時間スケールモデルを3次方程式型と呼ぶ。

スマゴリンスキーモデルにおける時間スケールは上記の方法で(20)式の右辺第1項のみを考慮することに対応する。あるいは $G_2 = 0$ と置くことによって得られる。その場合 τ は(23)で $\zeta = 0$ とした二次方程式を満足し、その正根は

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\xi}} = (2G_1\bar{S}_{ab}\bar{S}_{ba})^{-1/2}, \quad (26)$$

と表される。以降この時間スケールモデルを2次方程式型と呼ぶ。

$\Omega_i = 0$ の場合スマゴリンスキーモデル(4)、(6) そのものも $G_2 = G_3 = 0.0$ 、すなわち $C_3 = C_4 = 2.0$ とおき $G_5 = C_5 G_1^{-3/4}$ と G_5 を決めれば得られる。つまり $\Omega_i = 0$ の場合スマゴリンスキーモデルはSGSAMのトリビアルなモデルと位置付けられるのである。ただし注意しなければならないのは、慣性系より一般的な回転系乱流 ($\Omega_i \neq 0$) に対しては上のようにモデル定数を選んでも(14)式の G_4 を係数とする項が残るのでスマゴリンスキーモデルとは一致しないことである。SGSAMでは回転の効果が R_{ij} に入るが、スマゴリンスキーモデルには入り得ないのである。

b) 輸送方程式型

時間スケール τ を乱流エネルギー K と格子幅 Δ で

$$\tau = \frac{\Delta}{C_\epsilon} K^{-1/2}, \quad (27)$$

と書けると仮定し、 K のモデル輸送方程式¹⁴⁾

$$\frac{D}{Dt} K = P - C_\epsilon \frac{K^{3/2}}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left((C_{KK} \Delta K^{1/2} + \nu) \frac{\partial K}{\partial x_a} \right), \quad (28)$$

$$C_\epsilon = 1.53, \quad C_{KK} = 0.1, \quad (29)$$

を解く方法も考えられる。この場合(18)のようなバランスを仮定しないのでより一般的であり、そのため負の P (逆カスケード)も表現可能である。この一方程式型SGSAMによって時間スケールを決める方式を輸送方程式型と呼ぶ。

4. 回転一様乱流、及び周期的非一様せん断乱流に対する適用

ここでは回転系における一様減衰乱流、及び周期的非一様せん断乱流に対して、直接数値シミュレーション(DNS)、スマゴリンスキーモデル、3種類の時間スケールを組み込んだSGSAM(2次方程式型、3次方程式型、輸送方程式型)でシミュレートした結果を比較する。周期的非一様せん断乱流は三角関数型のフォーシング

$$f_i = -(\cos[z])\delta_{i1}, \quad (30)$$

を受ける、領域 $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ で周期的な流れである。

以下の図においてDNSは—、スマゴリンスキーモデルは●、2次方程式型はSGSAMは○、3次方程式型はSGSAMは△、そして輸送方程式型はSGSAMは□で表されている。なおDNSはエイリアシングエラーを除いたスペクトル法で計算され、

フーリエモード数 64^3 のデータにシャープカットフィルターをかけたものである。一方スマゴリンスキーモデルとSGSAMは 16^3 の格子点をもつLESで、初期条件はDNSデータにシャープカットフィルターを施して得られたものが用いられている。

Fig.1 は回転系における一様乱流における $\Omega = \sqrt{\Omega_a \Omega_a} = 0,3$ の場合のGS乱流エネルギーの2倍 $2K = \overline{u_a'' u_a''}$ の時間変化である。 $\Omega = 0$ の場合はいずれのLESもDNSによく合うことがわかる。しかし回転している場合は回転効果の入るSGSAMは陽には回転効果の入り得ないスマゴリンスキーモデルより断然良くDNSに合致することが観察される。この場合、3種類の時間スケールの差異はほとんど現れない。

Figs.2-4 は周期的非一様せん断乱流における乱流エネルギー及び平均流速の分布を示している。 $\langle w' w' \rangle$ においてのみ、輸送方程式型SGSAMと他のLESに有意な差異が観られる。輸送方程式型SGSAMはDNSより大きく予測してしまう。この場合の時間スケール分布はFig.5に示されているが、輸送方程式型の時間スケールは他のものより、小さく見積られているのが解る。

5. 結論

本研究より以下の3点が結論される。

- a. S G S A S Mにおける時間スケールをモデル化する際、代数方程式型と輸送方程式型が考えられる。
- b. 周期的非一様せん断乱流に対して、代数方程式型は輸送方程式型に優るとも劣らない。(IPモデルをAPモデルにすれば同等)
- c. 代数方程式型の場合、2次方程式型でも3次方程式型でも大差ない。

謝辞

この研究の主要部分は文部省科学研究費（No. 05240219）の援助によって可能となった。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) J. Smagorinsky: Mon. Weather Rev. **91**(1963)99.
- 2) M. Antonopoulos-Domis: J. Fluid Mech. **104**(1981)55.
- 3) N. N. Mansour, J. H. Ferziger and W. C. Reynolds: Report No. TF-11 Stanford University, (1978).
- 4) U. Piomelli, P. Moin and J. H. Ferziger: Phys. Fluids **31**(1988)1884.
- 5) Y. Shimomura: J. Phys. Soc. Jpn **63**(1994)5.
- 6) W. Rodi: Z. Angew. Math. Mech. **56**(1976)T219.
- 7) D. B. Taulbee: Phys. Fluids **A4**(1992)2555.
- 8) Y. Shimomura: 第26回乱流シンポジウム講演論文集 (1994)354.
- 9) Y. Shimomura: Proceedings of THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL MODELING OF TURBULENT FLOWS, Tokyo(1995)321.
- 10) M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot: Phys. Fluids **A3**(1991)1760.
- 11) K. Horiuti: Phys. Fluids **A5**(1993)146.
- 12) K. Horiuti: Proc. of 94' Workshop on Mathematical Modeling of Turbulent Flows, 9-1(1994).
- 13) B. E. Launder, G. Reece and W. Rodi: J. Fluid Mech. **68**(1975)537.
- 14) A. Yoshizawa and K. Horiuti: J. Phys. Soc. Jpn. **54**(1985)2834.

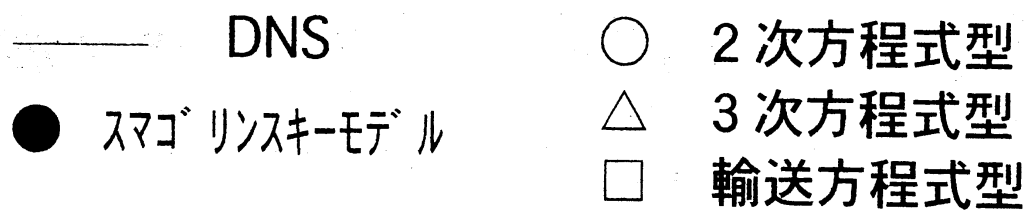


Fig.1: 乱流エネルギーの時間変化

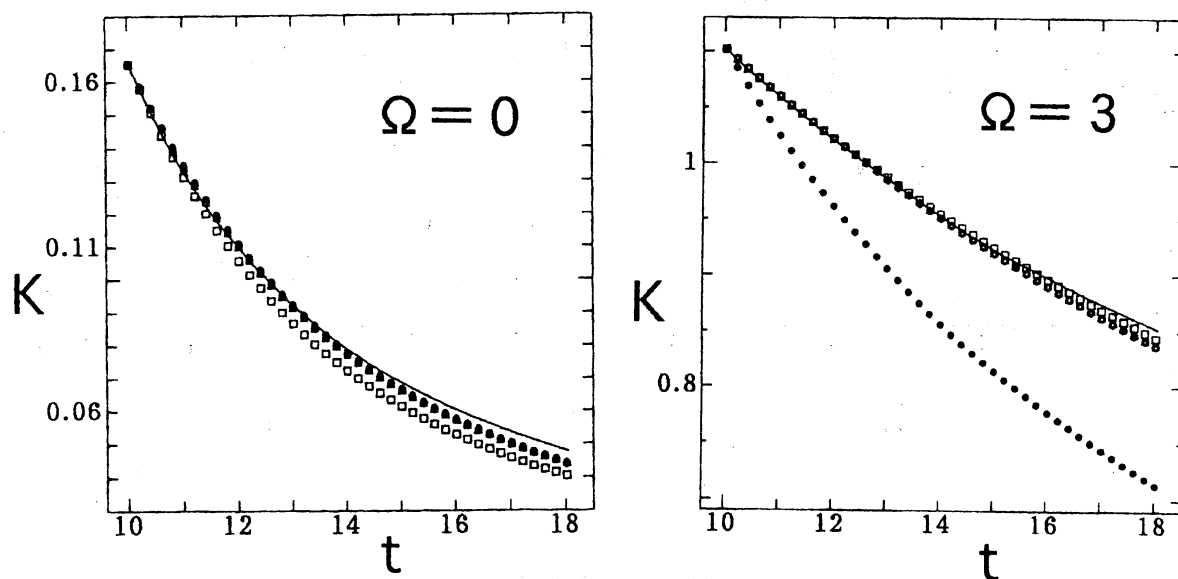
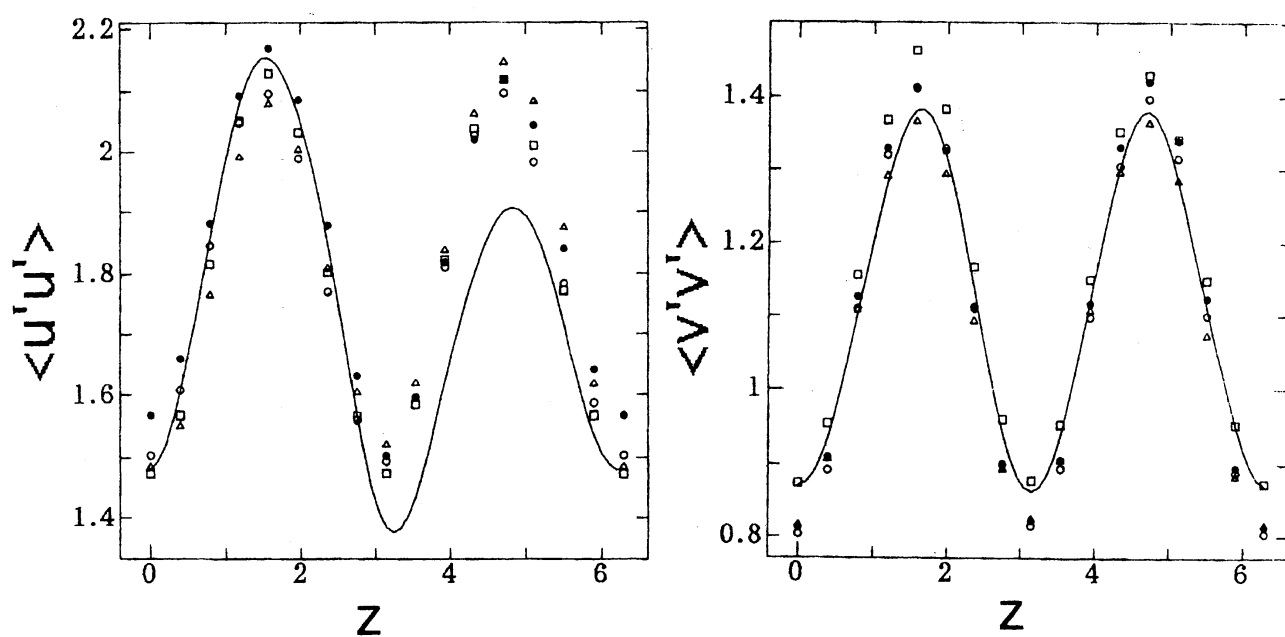
Fig.2: 乱流エネルギー $\langle u'u' \rangle, \langle v'v' \rangle$ 

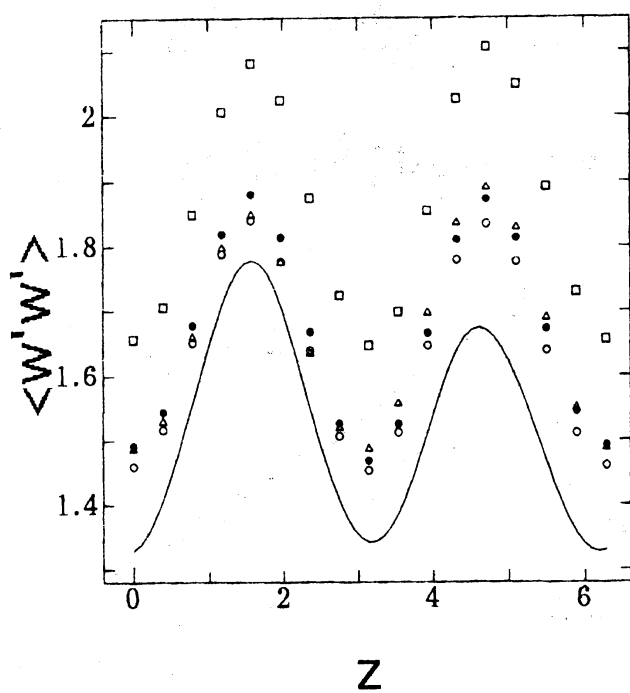
Fig.3 : $\langle w'w' \rangle$ 

Fig.4 : 平均流速

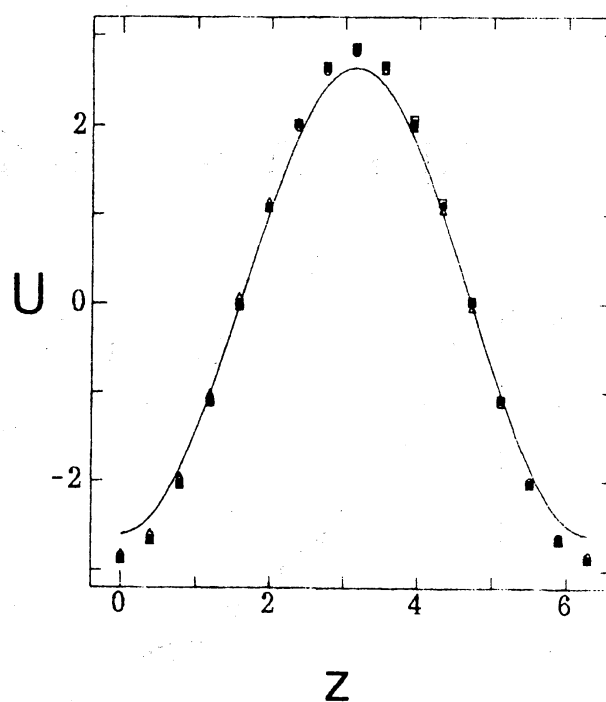


Fig.5 : 平均時間スケール

