

Gabor Transform と乱流の Anomalous Scaling

都立大、理 勝山智男 (Tomoo Katsuyama)

都立大、理 井上雅人 (Masato Ioue)

都立大、理 永田研一 (Ken-Ichi Nagata)

1 : はじめに

Anselmet 等は、 n 次構造関数のスケーリング指数 ζ_n が n に対して非線形になるという性質（いわゆる anomalous scaling）を実験的に示した[1]。この実験以来、乱流の速度ゆらぎ構造のマルチフラクタル性に注目が集まっている。この現象を説明するマルチフラクタルなカスケードモデルが数多く提唱された（例えば、Benzi *et al.*[2]、Meneveau and Sreenivasan[3]など）。我々は、これまでに、乱流速度のバンドパス信号（ $Q=4$ ）のモーメントの周波数依存性を実験的に調べ、バンドパス信号が、慣性領域周波数において、構造関数と同様の anomalous scaling law を示すことを明らかにした[4]。このことは、信号の確率密度分布（PDF）が、フィルターの中心周波数の増加にともないガウス分布からずれてくることを意味する。このPDFの非ガウス性は、粘性領域周波数ではきわめて顕著である。すなわち、バンドパス信号は、慣性領域周波数に比べて粘性領域周波数においてより間欠的である。このようなPDFの周波数依存性は、速度ゆらぎの自己相似的構造の破壊を反映しており、また、間欠性が基本的には粘性領域の現象であることを示している。

非圧縮Navier-Stokes方程式は、非粘性の極限で、スケーリング変換に対して不変である[5]。このスケーリング変換不変性は、スケーリング指数 ζ_n が n に対して線形であることを示唆している。そこで、非線形ダイナミクス自身が、anomalous scaling law をもたらすのかどうか問題となる。このことを明らかにするために、我々は乱流の速度ゆらぎ信号のガボール（Gabor）変換係数のモーメントのスケーリング的性質を調べた。ガボール変換は、電氣的バンドパスフィルターでは得られないような大きな Q 値（quality factor）のフィルターを容易に実現することができる、一種の解析的フィルターである。本研究では、電氣的バンドパスフィルターのような小さな Q 値のフィルターを通過した乱流速度ゆらぎ信号や構造関数（実効的 Q 値はきわめて小さい）に対して得られる ζ_n の非線形性が、主に粘性領域間欠性による汚染によるものであることを明らかにする。さらに、十分に Q が大きいときには、ガボール変換係数のPDFは、慣性領域ではほぼガウス型になることを示す。

2 : ガボール変換

ガボール変換はガウス型窓関数を持つ局所フーリエ変換で、

$$G[u(t)](\Omega, \sigma, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos[\Omega(t-t') + \theta] \exp\left[-\frac{(t-t')^2}{2\sigma^2}\right] dt, \quad (1)$$

で表される。ここで、 G はガボール変換オペレーターを表す。また、 σ は窓関数の広がりを表し、 Ω は角周波数、 θ は位相である。ガボール変換は、基本的にはフーリエ変換と同様に信号 $u(t)$ から角周波数 Ω の成分を取り出す変換であるが、変換が局所的である点でフーリエ変換と異なる。ガボール変換の、時間-周波数領域の窓は、時間幅 $\Delta t = \sqrt{2}\sigma$ 、周波数幅 $\Delta\Omega = \sqrt{2}/\sigma$ で与えられる。 Δt はガボール変換の時間分解能、 $\Delta\Omega$ は周波数分解能で、両者は不確定性関係 $\Delta t \Delta\Omega = 2$ で結ばれている。ガボール変換での Q 値($Q = \Omega/\Delta\Omega$ で定義される)は、 $Q = \Omega\sigma/\sqrt{2}$ で与えられる。フィルターを用いて信号のスペクトル分布を決めるにはフィルターの Q 値を一定に保つ必要がある。このことはガボール変換によるスケーリング解析においても重要である。パラメーター Ω と σ で表現されている(1)式を、上の関係式を用いて Q と σ で表すと、

$$G_Q u(\Omega, t') = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) g_Q(\Omega, t-t') dt \quad (2)$$

となる。ここで、 Q が一定のガボール変換オペレーターを G_Q で表した。また、右辺のガボール関数は

$$g_Q(\Omega, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}Q} \cos(\Omega t + \theta) \exp\left[-\left(\frac{\Omega}{2Q}t\right)^2\right] \quad (3)$$

で与えられる。ガボール関数はガウス関数のエンヴェロープを持った波束を表す。関数 g_Q は、 Q が一定であるとき Ω だけの関数であり、 Ω に関して相似形を保つ。この性質は、 G_Q が信号 $u(t)$ の自己相似的構造を取り出す上で必要な条件である。我々は Q を固定して乱流速度ゆらぎ信号 $u(t)$ をガボール変換し、係数 $G_Q u$ のモーメントの Ω に対するスケーリング指数を求め、その Q 依存性を調べた。モーメントは位相 θ にはよらないので、 θ は任意にとることができる。ここでは $\theta = 0$ とした。

比較のためウェーブレット変換

$$W_g u(a, t') = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) g^*\left(\frac{t-t'}{a}\right) dt \quad (4)$$

に対するスケーリング則も調べた。ここで、 $g(t)$ はマザーウェーブレット(mother wavelet)、 a はスケールである。用いたマザーウェーブレットは、(i) メキシカンハット、(ii) ガウス関数の1階微分、(iii) フレンチハット、(iv) δ 関数、 $g(t) = \delta(t + \Delta t) - \delta(t)$ の4つである[6]。(iv)の δ 関数ウェーブレット変換の $2n$ 次モーメントは $2n$ 次の構造関数を与える。現在までの乱流のスケーリング解析の多くはこの構造関数に対してなされている。

乱流速度ゆらぎ信号のウェーブレットおよびガボール変換信号の例を図1に示す。(a)

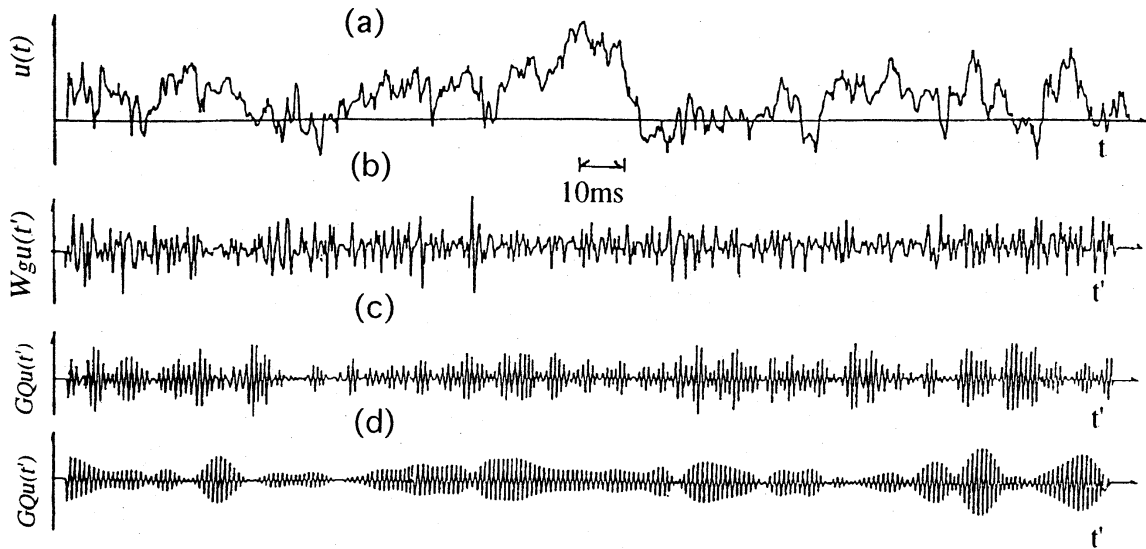


図 1

は原信号 $u(t)$ 、(b)はそのウェーブレット変換係数（メキシカンハット）、(c)と(d)はそれぞれ $Q=4.4$ および13のガボール変換係数である($\Omega/2\pi=1\text{kHz}$)。(b)の波形は正弦波的でなく、広い周波数範囲を含んでいる。これはウェーブレット変換が周波数幅の広いバンドパスフィルターに相当することを表している。これに対して(c)と(d)は正弦波の波束の連なりと見ることができる。波束の平均的長さは Q の大きい(d)の方が長い。すなわち大きな Q 値のガボール変換は狭いバンド幅のフィルターに相当する。(b)-(d)の波形は Q 値の異なる信号は統計的性質が異なることを示唆している。

3：ガボール変換係数の Q 依存性

ジェット乱流の速度変動（平均流速方向成分） $u(t)$ の測定には、X形熱線プローブおよび定温度型熱線流速計を用いた。さらに、流速計出力を12ビット分解能でAD変換し、2, 5, 10, 30, 100, 300, 1000 μs の時間間隔でサンプリングして時系列データを得た。Gabor変換係数は、それぞれのサンプリングレートで得られた 1.6×10^6 個のデータから、パーソナルコンピュータによって計算された。平均流速は $U=15\text{m/s}$ 、乱流レイノルズ数は $R_\lambda=270$ であった。図2に $u(t)$ の1次元エ

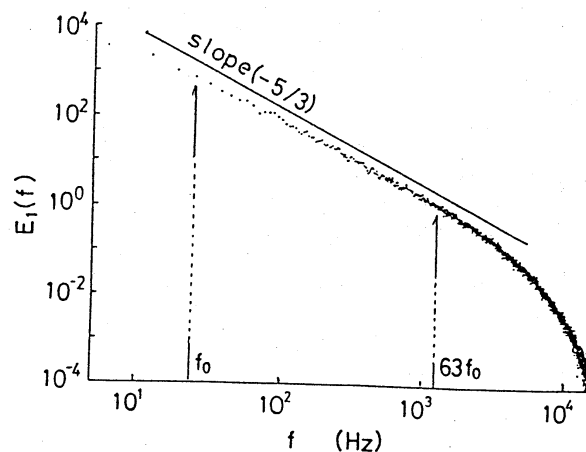


図 2

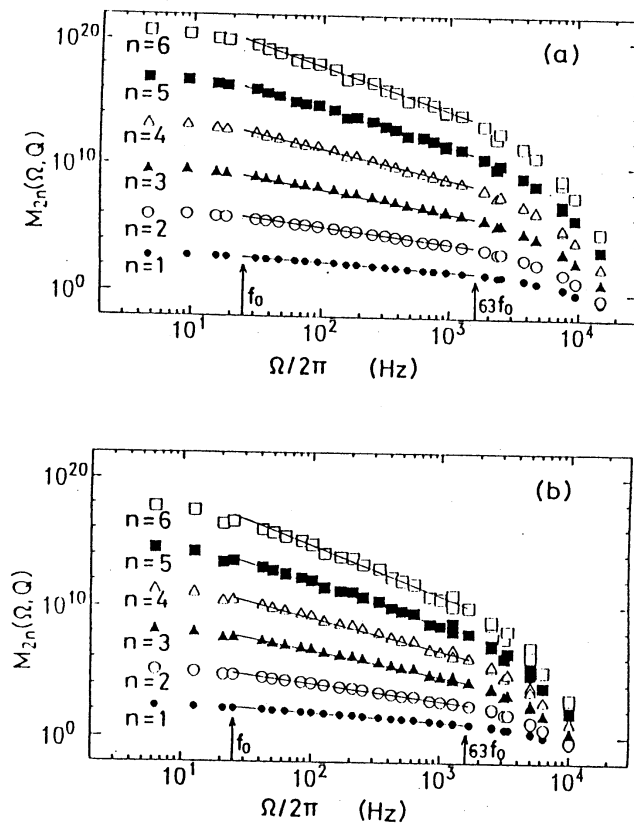


図 3

ての Q について $\zeta_{2n}(Q)$ は直線 $\zeta_{2n}(Q)=2n/3$ からずれており、そのずれは次数 n の大きいところにより顕著である。また、 Q の増大にともない、 $\zeta_{2n}(Q)$ は次第に直線 $\zeta_{2n}(Q)=2n/3$ に

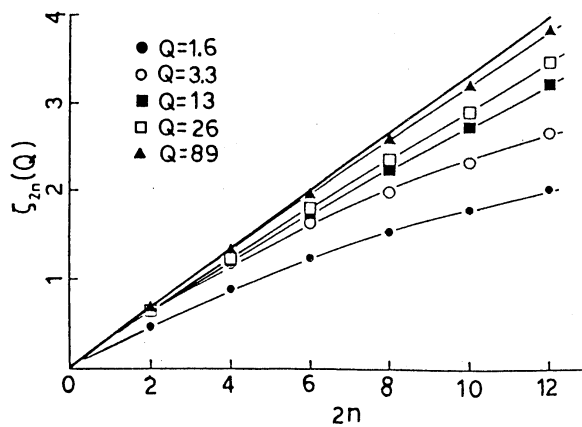


図 4

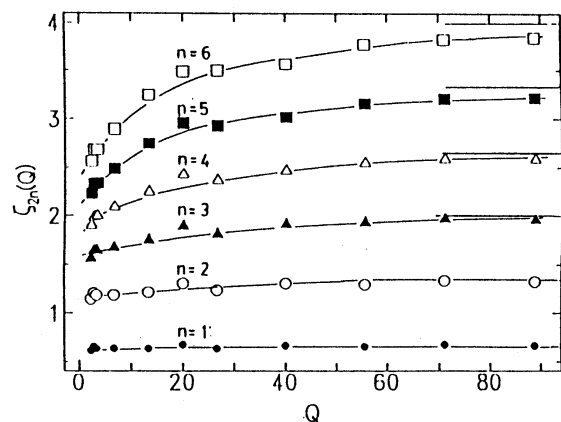


図 5

エネルギースペクトル分布 $E_f(f)$ を示す(f は周波数)。慣性領域は周波数 f_0 から $63f_0$ (f_0 は積分スケール)の間である。図3は、Gabor変換係数 $G_Q u$ の $2n$ 次モーメント $M_{2n}(\Omega, Q)$ 対周波数 $\Omega/2\pi$ の両対数プロットの例である(aは $Q=27$ 、bは $Q=89$)。ここで矢印は慣性領域の両端を示す。慣性領域において、 $M_{2n}(\Omega, Q)$ は、良い近似でスケーリング則

$$M_{2n}(\Omega, Q) \propto \Omega^{-\zeta_{2n}(Q)} \quad (5)$$

に従うことがわかる。スケーリング指数 $\zeta_{2n}(Q)$ は、慣性領域における $M_{2n}(\Omega, Q)$ 対 $\Omega/2\pi$ の両対数プロットに最小二乗法を適用することによって得た。

図4は1.6から89までの5つの異なる Q 値における $\zeta_{2n}(Q)$ の n 依存性を示す。直線はKolmogorov scaling $\zeta_{2n}(Q)=2n/3$ を示す。すべ

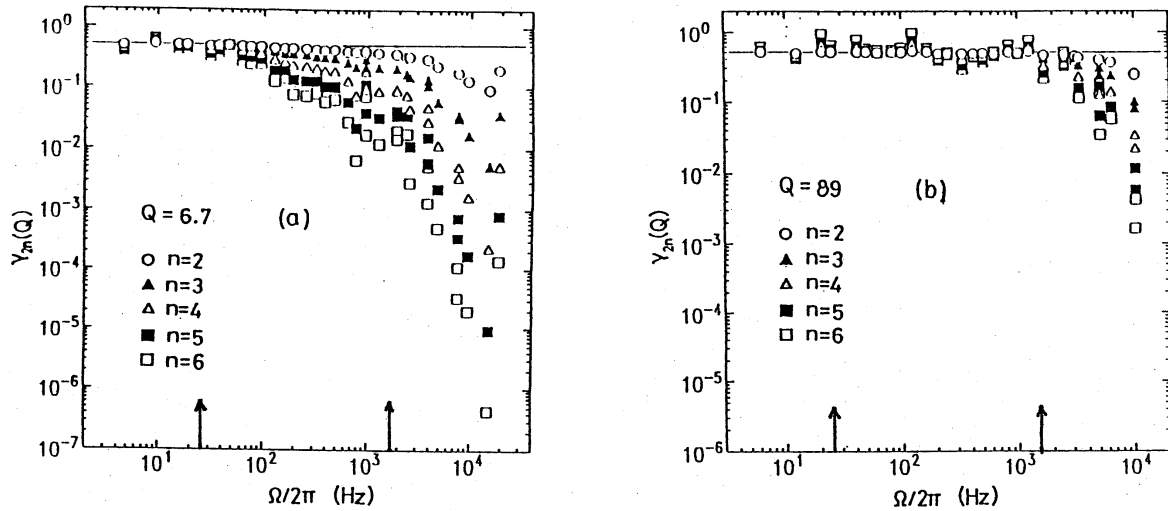


図 6

近付く。このふるまいから、バンド幅の十分狭いフィルターを通った乱流速度ゆらぎ信号はコルモゴロフ的スケーリングを示すことが示唆される。一方、anomalous scaling は、 Q の小さなフィルターにおいて顕著である。

図 5 に $\gamma_{2n}(Q)$ の Q 依存性を示す。 $\gamma_{2n}(Q)$ 曲線は $Q < 10$ の領域で変化が急である。このことは、バンド幅の広い (Q が小さい) フィルターを用いたスケーリング解析によって得られたスケーリング指数が、(少なくともレイノルズ数が 300 程度の乱流に対しては) 間欠性の影響を受けていて、その影響は Q が大きくなるに従い減少することを示している。このことは、anomalous scaling が広いバンド幅によって取り込まれた粘性領域間欠性の効果によるものであることを示唆している。

スケーリング指数 $\gamma_{2n}(Q)$ が n の非線形関数になるということは、信号 $G_Q u$ の統計が周波数 Ω に依存して変化することを意味する。 $G_Q u$ の統計分布 (PDF) はファクター

$$\gamma_{2n}(Q) = (2n-1)!! / 2 \cdot [M_2(\Omega, Q)]^n / M_{2n}(\Omega, Q) \quad (6)$$

で記述することができる。 $G_Q u$ の PDF が Gaussian であるとき、すべての次数 $2n$ において $\gamma_{2n}(Q) = 1/2$ となる。乱流の間欠性は PDF の Gaussian からのずれをもたらす。この意味で、 $\gamma_{2n}(Q)$ を $2n$ 次の間欠度と呼ぶことができる [4]。

図 6 (a) および (b) はそれぞれ $Q=6.7$ および 89 における $\gamma_{2n}(Q)$ 対 $\Omega/2\pi$ の両対数プロットである。2つの矢印は慣性領域の両端 (f_0 および $63f_0$) を示す。PDF が Gaussian、すなわち $\gamma_{2n}(Q) = 1/2$ となる周波数領域は、 Q が小さいときには f_0 近くの極めて狭い領域に限られるのに対し (a)、 Q が大きくなると高い周波数にまで及び、ほぼ慣性領域全体を覆うようになる (b)。すなわち、 Q が大きいとき、 $G_Q u$ は全慣性領域にわたってほぼ Gaussian であり、Gaussian からのずれは散逸領域 ($\Omega/2\pi > 63f_0$) において急激に目立つようになる。乱流の間欠性は本来散逸領域の現象である。図 6 (b) は十分に狭いバンド幅を持ったフィ

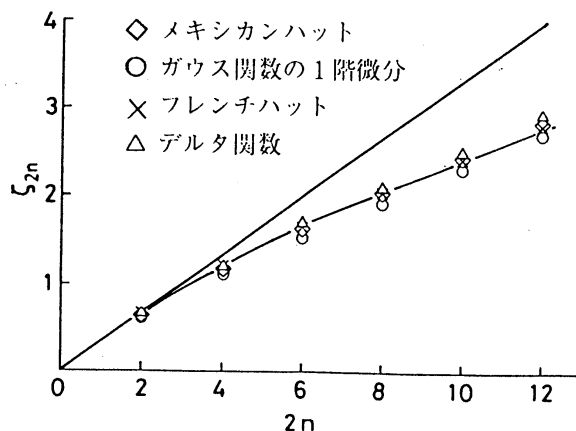


図 7

しても良いだろう。スパイクはランダムに出現し、その正負もランダムであるとする。このようなランダムスパイク列に対してガボール変換を施したとき、次の2つの場合が考えられる。 Q が小さい場合、ガボール関数の広がり狭いので、ガボール変換は各スパイクを個々に識別できるが、 Q が大きくなるとガボール関数の広がりの中に多くのスパイクが入って互いに相殺する効果を持つ。 Q の大きいガボール変換信号が間欠性の影響を受けず、従って、anomalous scalingを示さないのは、乱流信号の間欠的要因が、ここで仮定したように、本質的にランダムで、高い周波数成分を持っているためと考えることが出来る。

ウェーブレット変換係数に対しても、ガボール変換係数と同様の手続きで、スケーリング指数を求めることができる[7]。図7にウェーブレット変換係数に対するスケーリング指数と $2n$ の依存性を示す。測定した $2n$ の範囲内では ζ_{2n} の曲線はウェーブレット(i)-(iv)によらず、いずれもガボール変換の $Q=3.3$ に対する ζ_{2n} 曲線にほぼ一致する。このことは、構造関数(iv)に対するスケーリング解析が粘性領域間欠性の影響を強く受けてしまうことを示唆している。

4：結論

実験室で得られるような中間レイノルズ数乱流($R_\lambda \sim 300$)において、構造関数に代表される Q の小さなフィルターによるスケーリング解析は、粘性領域間欠性の影響を強く受け、純粋な慣性領域のスケーリング的性質を与えない。また、十分に広い慣性領域を持つ乱流においては、粘性領域間欠性による汚染は無視できるであろうから、anomalous scalingは現れないものと思われる。実際の乱流の慣性領域はもちろん有限であり、その高周波数側では、粘性の無視できない領域が存在するものと考えて良いだろう。実際、Anselmet等のデータを見ると、高次の構造関数の、距離に対する両対数プロッ

ルターを用いれば、間欠性は慣性領域においては、極めて弱い（または観測されない）ことを示している。一方、図6(a)は、フィルターの Q 値が小さい場合には、間欠性の効果の及ぶ周波数範囲が粘性領域から広く慣性領域内にしみ出して、慣性領域でのスケーリング解析が汚染される可能性を示している。

ガウス分布からのずれをもたらず間欠的要因は $u(t)$ の時系列上に現れる「スパイク」で表現

トは明らかに上に凸である。我々のデータ（図3）も同様である。これらのデータは、間欠性の効果が粘性領域から慣性領域の内部にまで及び、慣性領域におけるスケーリング変換不変性を破壊していることを示唆している[7,8]。これまで報告された実験室乱流における anomalous scaling は、こうした粘性による自己相似性の破れに起因する可能性がある。

References

- [1] F.Anselmet, Y.Gagne, E.J.Hopfinger, and R.A.Antonia; J.Fluid Mech. 140, 63(1984).
- [2] R.Benzi, G.Paladin, G.Parisi, and A.Vulpiani; J.Phys. A17, 3521(1984).
- [3] C.Meneveau and K.R.Sreenivasan; Phys.Rev.Lett. 59, 1421(1987).
- [4] T.Katsuyama, Y.Horiuchi, and K.Nagata; Phys.Rev E49,4052(1994).
- [5] U.Frisch; in Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, Varenna Summer School LXXXVIII, ed. M.Ghill, R.Benzi, and G.Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [6] R.K.Young; Wavelet theory and its application, (Kluwer Academic Pub., 1993).
- [7] T.Katsuyama, M.Inoue, and K.Nagata; Proceedings of ICDC-1994 Tokyo, to be published.
- [8] T.Katsuyama, M.Inoue, and K.Nagata; Phys.Rev.E50 (1995), to be published.