

半線形放物型偏微分方程式における

Kneser の定理と解写像の写像度

上之郷高志

東北学院大教養

菊池 紀夫

慶応大理工

1. 解集合のコンパクト性 D を R^n の有界な開領域とし, その境界 ∂D は十分滑らかとする. 次の初期値境界値問題を考える.

$$(E) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + f(u) & t > 0, \quad x \in D, \\ u(0, x) = u_0(x) & u_0 \in C(\bar{D}, R), \\ \partial u / \partial \nu = 0 & t > 0, \quad x \in \partial D. \end{cases}$$

ここで ν は ∂D の外向き単位法線ベクトルを表し, $f \in C(R, R)$ は次の条件を満たしているものとする.

$$(A_1) \quad \exists a > 0, \exists b > 0, \forall u \in R, \quad |f(u)| \leq a + b|u|.$$

注意1 以下の議論では, $f(u)$ は $f(t, x, u)$ に置き換えても成り立つが, 記述を簡単にするために, f は u だけの関数として扱うことにする.

また領域 D に対し, 次の仮定をおく.

$$(A_2) \quad \begin{cases} \exists \gamma > 0, \forall (x, y) \in \bar{D} \times \bar{D}, \exists \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset \bar{D}, \\ x = p_0, y = p_k, p_{i-1} p_i \subset \bar{D}, \sum_{i=1}^k |p_i - p_{i-1}| \leq \gamma |x - y|. \end{cases}$$

すなわち, x と y を結ぶ折れ線 P が $\bar{D}$ の中にとれて, P の長さが $\gamma |x - y|$ 以下にできるものとする.

上の仮定 (A_2) は, 「 D は滑らかな境界をもつ有界開領域である」ことから証明さ

れるものと思われる.

定義 $T > 0$ とする. $u \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ が

$$u(t, x) = \int_D U(t, x, y) u_0(y) dy + \int_0^t ds \int_D U(t-s, x, y) f(u(s, y)) dy$$

を満たすとき, u を (E) の mild solution と呼ぶ. ここで, U は $\partial u / \partial t = \Delta u$, $\partial u / \partial \nu = 0$ の基本解である.

$T > 0$ を任意にとり固定し, $[0, T] \times \bar{D}$ での mild solutions の評価をしよう. 次の補題 1 は, よく知られた結果 (例えば [1] 参照) である.

補題 1 正の数 C が存在して, 任意の $t \in (0, T]$ と, 任意の $x, y \in \bar{D}$ に対して, 次が成り立つ.

$$(1) \quad 0 \leq U(t, x, y) \leq C t^{-n/2} \exp(-|x-y|^2/Ct),$$

$$(2) \quad \int_D U(t, x, y) dy = 1,$$

$$(3) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} U(t, x, y) \right| \leq C t^{-(n+1)/2} \exp(-|x-y|^2/Ct), \quad 1 \leq j \leq n.$$

補題 2 $0 < t \leq T$ かつ $x, z \in \bar{D}$ のとき,

$$\int_D |U(t, x, y) - U(t, z, y)| dy \leq C_1 t^{-1/2} |x - z|$$

が成り立つ. ここで, $C_1 = \gamma \sqrt{n} \pi^{n/2} C^{1+n/2}$ である.

証明 (A₂) より, 線分 xz が $\bar{D}$ に含まれているとき,

$$\int_D |U(t, x, y) - U(t, z, y)| dy \leq \sqrt{n} \pi^{n/2} C^{1+n/2} t^{-1/2} |x - z|$$

を示せばよい. まず,

$$|U(t, x, y) - U(t, z, y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{d\rho} U(t, \rho x + (1-\rho)z, y) d\rho \right|$$

$$\leq \sqrt{n} \int_0^1 C t^{-(n+1)/2} |x-z| \exp\left\{-\frac{|\rho x + (1-\rho)z - y|}{C t}\right\} d\rho \quad (\text{by (3)}).$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \int_D |U(t, x, y) - U(t, z, y)| dy \\ & \leq \sqrt{n} C |x-z| \int_0^1 \int_{R^n} t^{-(n+1)/2} \exp(-|y|^2/Ct) dy d\rho \\ & = \sqrt{n} \pi^{n/2} C^{1+n/2} t^{-1/2} |x-z|. \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

補題 3 $0 < t \leq T$ かつ $x, z \in \bar{D}$ のとき,

$$\int_D U(t, x, z) |x-z| dz \leq C_2 \sqrt{t}$$

が成り立つ. ここで $C_2 = C^{(n+3)/2} \int_{R^n} |\xi| \exp(-|\xi|^2) d\xi$ である.

証明 (1)より, 変数変換 $z = x + \sqrt{Ct} \xi$ をほどこして得られる. q. e. d.

$C(\bar{D}, R)$ と $C([0, T] \times \bar{D}, R)$ は, sup norm $\|\cdot\|$ の入った Banach 空間とする.
 $u_0 \in C(\bar{D}, R)$ に対し, Su_0 を次で定める.

$$(Su_0)(t, x) := \begin{cases} \int_D U(t, x, y) u_0(y) dy, & (t, x) \in (0, T] \times \bar{D}, \\ u_0(x), & t=0, x \in \bar{D}. \end{cases}$$

このとき, $Su_0 \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ である. また, $u \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ と $f \in C(R, R)$ に対し, $H[f, u]$ を

$$H[f, u](t, x) := \int_0^t ds \int_D U(t-s, x, y) f(u(s, y)) dy,$$

$$(t, x) \in [0, T] \times \bar{D}$$

で定める. $H[f, u] \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ である.

補題4 $u_0 \in C(\bar{D}, R)$, $\|u_0\| \leq M_0$ とする. $0 < t < t' \leq T$ かつ $x, x' \in \bar{D}$ のとき, 次が成り立つ.

$$(4) \quad |(Su_0)(t, x) - (Su_0)(t', x')| \leq C_3 t^{-1/2} (\sqrt{t' - t} + |x - x'|).$$

ここで, $C_3 = M_0 C_1 \max\{C_2, 1\}$ である.

証明 U の半群の性質より次が成り立つ.

$$U(t', x, y) = \int_D U(t' - t, x, z) U(t, z, y) dz.$$

これと (2) を用いて,

$$\begin{aligned} & (Su_0)(t', x) - (Su_0)(t, x) \\ &= \iint_D U(t' - t, x, z) U(t, z, y) u_0(y) dz dy \\ & \quad - \int_D U(t' - t, x, z) dz \int_D U(t, x, y) u_0(y) dy \\ &= \int_D U(t' - t, x, z) dz \int_D \{U(t, z, y) - U(t, x, y)\} u_0(y) dy \end{aligned}$$

を得る. 従って, 補題2, 3より,

$$|(Su_0)(t', x) - (Su_0)(t, x)| \leq M_0 C_1 C_2 t^{-1/2} \sqrt{t' - t}.$$

また補題2より次の評価も得られる.

$$|(Su_0)(t', x) - (Su_0)(t', x')| \leq M_0 C_1 t^{-1/2} |x - x'|.$$

上の2つの不等式より (4) が従う.

q. e. d.

補題5 $u \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$, $\|u\| \leq M_1$ とする. $0 \leq t < t' \leq T$ かつ $x, x' \in \bar{D}$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& |H[f, u](t, x) - H[f, u](t', x')| \\
(5) \quad & \leq C_4 \sqrt{t} (\sqrt{t' - t} + |x - x'|) + M(t' - t).
\end{aligned}$$

ただし, $M = a + bM_1$, $C_4 = 2MC_1 \max\{C_2, 1\}$ である.

証明 まず $\forall (s, y) \in [0, T] \times \bar{D}$, $|f(u(s, y))| \leq a + bM_1 = M$ であることに注意しよう.

$$\begin{aligned}
& |H[f, u](t', x') - H[f, u](t, x')| \\
& \leq \left| \int_0^t ds \int_D \{U(t' - s, x', y) - U(t - s, x', y)\} f(u(s, y)) dy \right| \\
& \quad + \int_t^{t'} ds \int_D U(t' - s, x', y) |f(u(s, y))| dy
\end{aligned}$$

ここで, $U(t' - s, x', y) = \int_D U(t' - t, x', z) U(t - s, z, y) dz$ と(2)より,

$$\begin{aligned}
& \leq M \int_0^t ds \int_D U(t' - t, x', z) dz \int_D |U(t - s, z, y) - U(t - s, x', y)| dy \\
& \quad + M(t' - t).
\end{aligned}$$

補題 2, 3 を用いると, 上式の第 1 項 $\leq 2MC_1 C_2 \sqrt{t} \sqrt{t' - t}$.

また補題 2 より, 次の評価が得られる.

$$\begin{aligned}
& |H[f, u](t, x') - H[f, u](t, x)| \\
& \leq M \int_0^t ds \int_D |U(t - s, x', y) - U(t - s, x, y)| dy \\
& \leq 2MC_1 \sqrt{t} |x - x'|. \qquad \text{q. e. d.}
\end{aligned}$$

補題 6 $u_0 \in C(\bar{D}, R)$, $\|u_0\| \leq M_0$ とする. もし $u \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ が (E) の mild solution ならば, $|u(t, x)| \leq (M_0 + aT) e^{bt}$ が成り立つ.

証明 Gronwall の不等式を用いる.

定理1 任意の $u_0 \in C(\bar{D}, R)$ に対して, (E) は $[0, T] \times \bar{D}$ で定義された mild solution をもつ.

証明 Schauder の不動点定理を用いて, 局所解の存在が示せる. また補題4, 5 と ツォルンの補題を用いると, $t = T$ まで解が延長できることが分かる. **q. e. d.**

定理2 $f_m \in C(R, R)$ が次の条件 (i), (ii) を満たしているとする.

$$(i) \quad |f_m(u)| \leq a + b|u|, \quad u \in R,$$

$$(ii) \quad f_m \rightarrow f \text{ as } m \rightarrow \infty \quad (R \text{ で広義一様収束}).$$

また $u_0, u_m^0 \in C(\bar{D}, R)$ は $\bar{D}$ で一様に $u_m^0 \rightarrow u_0$ (as $m \rightarrow \infty$) であるとする. もし $u_m \in C([0, T] \times \bar{D}, R)$ が

$$(E_m) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + f_m(u) & t > 0, x \in D, \\ u(0, x) = u_m^0(x) & x \in \bar{D}, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & t > 0, x \in \partial D \end{cases}$$

の mild solution とすると, $\{u_m\}$ の部分列で, (E) のひとつの mild solution u に, $[0, T] \times \bar{D}$ で一様収束するものがある.

証明 u_m は $u_m = S u_m^0 + H[f_m, u_m]$ を満たしている. そして

$$|(S u_m^0)(t, x) - (S u_0)(t, x)| \leq \int_D U(t, x, y) |u_m^0(y) - u_0(y)| dy$$

より $S u_m^0 - S u_0 \leq u_m^0 - u_0 \rightarrow 0$, すなわち, $S u_m^0 \rightarrow S u_0$ ($m \rightarrow \infty$) である.

仮定より, 正の数 M_0 が存在して, $u_m^0 \leq M_0$ が成り立っているから, 補題6より, $|u_m(t, x)| \leq M_1$ を満たす正の数 M_1 が存在する. よって, $|f_m(u_m(t, x))| \leq a + b M_1$ が成り立ち, 補題5から, $\{H[f_m, u_m]\}$ は同等連続となる. Ascoli-Arzelà の定理より, $\{u_m\}$ の適当な部分列で, $C([0, T] \times \bar{D}, R)$ の元 u に一様収束するものがある. この u が (E) の mild solution であることは明らか. **q. e. d.**

補題7 $f(u)$ が次の Lipschitz 条件を満たしているとする.

$$\forall \beta > 0, \exists L(\beta) > 0, |f(u) - f(v)| \leq L(\beta) |u - v|, \quad u, v \in [-\beta, \beta].$$

このとき, (E) の mild solution は一意的である.

証明 Gronwall の不等式より明らか.

補題8 条件 (A₁) を満たす $f \in C(R, R)$ に対して, $C(R, R)$ 内の列 $\{f_m\}$ で, 定理2の (i), (ii) および次の (iii) を満たすものが存在する.

(iii) f_m は補題7の Lipschitz 条件を満たす.

証明 Mollifier を用いる.

2. Kneser の性質 ここでは次の定理を証明する.

定理3 $f \in C(R, R)$ は条件 (A₁) を満たしているとする. このとき, 任意の $u_0 \in C(\bar{D}, R)$ に対して, 集合

$$\mathcal{F} = \{u \in C([0, T] \times \bar{D}, R); u \text{ は (E) の mild solution}\}$$

は, $C([0, T] \times \bar{D}, R)$ のコンパクトな連結集合である.

証明 Hartman の本 [2, pp. 15-17] と同じ方針で示す.

$$u \in \mathcal{F} \iff u = Su_0 + H[f, u]$$

と補題5および定理2より, $\mathcal{F}$ がコンパクトであることが示される.

$\mathcal{F}$ の連結性を示そう. $\mathcal{F}$ が連結でないとすると, $C([0, T] \times \bar{D}, R)$ の開集合 O と2つの空でないコンパクト集合 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が存在して次が成り立つ.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_1 \subset O, \quad \mathcal{F}_2 \cap \bar{O} = \emptyset.$$

$u_1 \in \mathcal{F}_1, u_2 \in \mathcal{F}_2$ をとる. 番号 m を固定し, 関数 g_1, g_2 を次で定める.

$$g_i(t, x, u) := f(u_i(t, x)) - f_m(u_i(t, x)) + f_m(u), \quad i = 1, 2.$$

ただし, f_m は補題8の (i)~(iii) を満たすものとする. このとき, $u_i(t, x)$ は方程式 $\partial u / \partial t = \Delta u + g_i(t, x, u)$ の mild solution になっている ($i = 1, 2$).

次に, 任意の $\theta \in [0, 1]$ に対して, h_θ を $h_\theta := (1 - \theta)g_1 + \theta g_2$ で定め, 初期値境界値問題

$$(E_\theta) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + h_\theta(t, x, u) & t > 0, \quad x \in D, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \bar{D}, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & t > 0, \quad x \in \partial D \end{cases}$$

を考える. 前節の注意1(p.1)で述べたように, 前節の諸結果は (E_θ) についても適用されることに注意しよう. $h_\theta(t, x, u)$ は u について Lipschitz 連続であるから, 補題7より, (E_θ) は 唯一つの mild solution $\tilde{u}_\theta(t, x)$ を持つ. 定理2より, $\tilde{u}_\theta$ は θ について連続であり, $\tilde{u}_0 = u_1$, $\tilde{u}_1 = u_2$ だから $\exists \theta \in [0, 1]$, $\tilde{u}_\theta \in \partial O$. この θ と $\tilde{u}_\theta$ を, それぞれ θ_m , u_m で表すと, u_m は $\partial u / \partial t = \Delta u + h_{\theta_m}$ の mild solution で, $h_{\theta_m} \rightarrow f$ (広義一様収束) である. したがって, 定理2より, (E) の mild solution u が存在して, $\{u_m\}$ は u に一様収束しているとしてよい. $u_m \in \partial O$ であったから, $u \in \partial O$. 従って $\mathcal{F} \cap \partial O \ni u$ である. これは O のとり方に矛盾. q. e. d.

系1 $\{u(T); u \in \mathcal{F}\}$ は $C(\bar{D}, R)$ のコンパクトな連結集合である.

注意2 $D = R^n$ の場合には, $\mathcal{F}$ は $C([0, T] \times R^n, R)$ の, 広義一様収束の位相で, コンパクトな連結集合になる[3].

3. 解写像の写像度 $X := C(\bar{D}, R)$ とし,

$$K(X) := \{A; A \text{ は } X \text{ の空でないコンパクト集合}\}$$

とする. $u_0 \in X$ に対し,

$$\Phi(u_0) := \{u(T); u \text{ は } (E) \text{ の mild solution}\}$$

で写像 $\Phi: X \rightarrow K(X)$ を定義する. また補題8の f_m に対し, (E_m) で $u_m^0 = u_0$ としたものは, 唯1つの mild solution $u_m(t, x)$ をもち,

$$\varphi_m(u_0) := u_m(T), \quad u_0 \in X,$$

で φ_m を定めると, 写像 $\varphi_m: X \rightarrow X$ が得られる. $\{\varphi_m\}$ を Φ の近似列と呼ぶ.

補題9 $\varphi_m: X \rightarrow X$ は連続かつ完全連続である.

証明 定理2より φ_m の連続性がわかる. また, $u_m = S u_0 + H[f_m, u_m]$ において, u_0 が有界な範囲をうごくとき, 補題6より, u_m も有界な範囲を動くから, 補題4, 5により $\{u_m(T)\}$ は同等連続である. q. e. d.

一般に, 集合 $A \subset X$ と写像 $\Psi: X \rightarrow K(X)$ が与えられたとき, 集合 $\Psi(A)$ を $\Psi(A) := \bigcup \{\Psi(u); u \in A\}$ で定義する. さらに, $\varphi: X \rightarrow X$ に対して, 写像 $\varphi + \Psi: X \rightarrow K(X)$ を

$$(\varphi + \Psi)(u) := \varphi(u) + \Psi(u) = \{\varphi(u) + x; x \in \Psi(u)\}, \quad u \in X,$$

と定める.

Ω を X の有界な開集合とし, $p \in X$ を $p \notin (I - \Phi)(\partial\Omega)$ を満たすようにとる. ただし, $I: X \rightarrow X$ は恒等写像である. このとき, 写像度 $\deg(I - \Phi, \Omega, p)$ が, 近似列 $\{\varphi_m\}$ を用いて

$$(6) \quad \deg(I - \Phi, \Omega, p) = \lim_{m \rightarrow \infty} \deg(I - \varphi_m, \Omega, p)$$

で定義できることを示そう. $\{\varphi_m\}$ を与える $\{f_m\}$ をひとつ取り, 番号 k, l と $\theta \in [0, 1]$ に対し,

$$(E_{k,l,\theta}) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + (1 - \theta) f_k(u) + \theta f_l(u) & t > 0, \quad x \in D, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \bar{D}, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & t > 0, \quad x \in \partial D \end{cases}$$

の唯1つの mild solution を $u_{k,l,\theta}$ で表し, さらに,

$$\varphi_{k,l,\theta}(u_0) := u_{k,l,\theta}(T), \quad u_0 \in X,$$

と定めると、補題9より $\varphi_{k,l,\theta}: X \rightarrow X$ は連続で完全連続である。

補題10. 十分大きな番号 n_0 をとると、

$$k, l \geq n_0, \theta \in [0, 1] \implies p \notin (I - \varphi_{k,l,\theta})(\partial\Omega).$$

証明 もしそうでないとする、

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists k_m \geq m, \exists l_m \geq m, \exists \theta_m \in [0, 1], \exists u_m^0 \in \partial\Omega,$$

$$(7) \quad u_m^0 - \varphi_{k_m, l_m, \theta_m}(u_m^0) = p.$$

$(E_{k,l,\theta})$ において、 $k, l, \theta, u_0(x)$ を、それぞれ、 $k_m, l_m, \theta_m, u_m^0(x)$ で置き換えたものの mild solution を u_{k_m, l_m, θ_m} で表す。 Ω は有界だから、 $\{u_m^0\}$ も有界、したがって $\{u_{k_m, l_m, \theta_m}\}$ も有界である。よって、補題4, 5より

$$\{\varphi_{k_m, l_m, \theta_m}(u_m^0)\} = \{u_{k_m, l_m, \theta_m}(T)\}$$

は同等連続である。Ascoli-Arzelà の定理より、 $\exists \xi \in X, \varphi_{k_m, l_m, \theta_m}(u_m^0) \rightarrow \xi$ としてよい。このとき、(7) より $u_m^0 \rightarrow \xi + p =: u_0$ である。 $u_m^0 \rightarrow u_0$ と

$$(1 - \theta_m) f_{k_m}(u) + \theta_m f_{l_m}(u) \rightarrow f(u) \quad (R \text{ で広義一様収束})$$

より、定理2から、 $\{u_{k_m, l_m, \theta_m}\}$ の部分列（これを再び $\{u_{k_m, l_m, \theta_m}\}$ とかく）と (E) の mild solution u が存在して、 $u_{k_m, l_m, \theta_m} \rightarrow u$ である。したがって、

$$\varphi_{k_m, l_m, \theta_m}(u_m^0) = u_{k_m, l_m, \theta_m}(T) \rightarrow u(T), \quad u(T) \in \Phi(u_0).$$

これより $u(T) = \xi$ が得られ、 $\xi = u_0 - p$ とあわせて、

$$\Phi(u_0) \ni u(T) = \xi = u_0 - p$$

となる。これは $(I - \Phi)(u_0) \ni p$ を意味している。 $\partial\Omega$ は closed だから $u_0 \in$

$\partial\Omega$ となり, p のとり方に矛盾.

q. e. d.

定理2より, $\varphi_{k,l,\theta}(u_0)$ は $(\theta, u_0) \in [0, 1] \times X$ について連続で, $\varphi_{k,l,0} = \varphi_k$, $\varphi_{k,l,1} = \varphi_l$ である. よって, 補題10より, k, l が十分大なら

$$\deg(I - \varphi_k, \Omega, p) = \deg(I - \varphi_l, \Omega, p)$$

が成り立ち, (6) の右辺は意味をもつ.

Φ の近似列として, 他の $\{\psi_m\}$ をとったとき,

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots, \varphi_m, \psi_m, \dots$$

なる列も Φ の近似列になっている. よって (6) の値は近似列の取り方によらない.

定理4 $\deg(I - \Phi, \Omega, p) \neq 0$ ならば, $(I - \Phi)(u_0) \ni p$ を満たす $u_0 \in \Omega$ が存在する.

証明 近似列 $\{\varphi_m\}$ をひとつ取る. 十分大きな m について, $\deg(I - \varphi_m, \Omega, p) \neq 0$ だから, $\exists u_m^0 \in \Omega$, $u_m^0 - \varphi_m(u_m^0) = p$ である. 補題10の証明と同様に $\{\varphi_m(u_m^0)\}$ は同等連続であることが示せる. よって, 適当な $\xi \in X$ をとれば, $\varphi_m(u_m^0) \rightarrow \xi$ としてよい. このとき, $u_m^0 \rightarrow \xi + p =: u_0$ である. 一方, 定理2より, $\xi \in \Phi(u_0)$ が得られ, これと $\xi = u_0 - p$ から, $\Phi(u_0) \ni u_0 - p$, すなわち, $(I - \Phi)(u_0) \ni p$ を得る. ここで, $u_0 \in \bar{\Omega}$ であるが, p のとり方より, $u_0 \in \Omega$ である. q. e. d.

REFERENCES

- [1] 伊藤清三, 偏微分方程式 (培風館, 新数学シリーズ26), 1966.
- [2] Hartman, P., Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc. 1964.
- [3] Kikuchi, N., Kneser's property for a parabolic partial differential equation, Nonlinear Analysis 20, 205-213(1993).