

ある代数曲線上の点のなす群

岡山大学理学部数学教室・田中 克己 (Katsumi Tanaka)
Department of Mathematics, Okayama University

平成 19 年 2 月 28 日

1 ペルの方程式

このノートでは、

$$x^2 - dy^2 = 1 \quad (1)$$

の形をした 2 元 2 次方程式の整数解について考える。ここで、 d は正の整数で、平方数ではないとする。

整数解 (x, y) の全体を G とおく。 G の元 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) に対し、

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2)$$

と定める。このとき、

- G はアーベル群。
- $(1, 0)$ は単位元。
- $(x, y)^{-1} = (x, -y)$ 。

という性質を持つことが知られている。それぞれチェックするのは簡単だが、 G が $*$ について閉じていることを示しておこう。

$$\begin{aligned} (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 &= x_1^2x_2^2 + 2dx_1x_2y_1y_2 + d^2y_1^2y_2^2 - d(x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2) \\ &= x_1^2x_2^2 - dx_1^2y_2^2 + d^2y_1^2y_2^2 - dx_2^2y_1^2 \\ &= x_1^2(x_2^2 - dy_2^2) - dy_1^2(x_2^2 - dy_2^2) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

例 1 $d = 2$ のとき、 $x^2 - 2y^2 = 1$ は整数解 $(3, 2)$ を持つ。さらに、 $(3, 2)^2 = (17, 12), (3, 2)^3 = (99, 70), (577, 408), (3363, 2378), \dots$ は整数解になる。

ここで、整数解以外についても次のことがいえる。

命題 2 $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 - dy^2 = 1\}$ は演算 $*$ について群をなす。

群 $(G, *)$ はアーベル群なので、モデル論的にはその理論は安定である。したがって、群の言語では G ないし G^n 上に不安定な環 (体) は解釈されない。

2 非自明解があれば解は無限個

2.1 $\sqrt{2}$ の連分数展開

この節では、 $\sqrt{2}$ の無限連分数を考える。

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1 \quad (3)$$

よって、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}} \end{aligned}$$

したがって、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}} \quad (4)$$

() の部分を次々と置き換えると、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad (5)$$

一般に、

$$(\sqrt{m^2 + 1} - m)(\sqrt{m^2 + 1} + m) = 1$$

であるから、 $A = m^2 + 1$ とおけば、 $\sqrt{A}$ を無限連分数に展開できる。

2.2 展開法

(5) に対する近似列 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1 \\ \delta_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \delta_3 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \\ \delta_4 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

以下、同様に $\delta_5, \delta_6, \dots$ とおく。このとき、

$$\delta_1 < \delta_3 < \delta_5 < \dots < \sqrt{2} < \dots < \delta_6 < \delta_4 < \delta_2$$

が成り立つことは簡単に確かめることができる。

一般に、無理数 α の無限連分数展開

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \dots}}}$$

に対して、

$$\delta_1 < \delta_3 < \dots < \delta_{2n+1} < \dots < \alpha < \dots < \delta_{2n} < \dots < \delta_4 < \delta_2 \quad .$$

ここで、

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

とおくと、

$$\begin{cases} P_k = P_{k-1}q_k + P_{k-2} \\ Q_k = Q_{k-1}q_k + Q_{k-2} \end{cases} \quad (6)$$

何故ならば、

$$\begin{aligned} \delta_1 &= q_1 = \frac{P_1}{Q_1}, Q_1 = 1, p_1 = q_1 \\ \delta_2 &= q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1q_2 + 1}{q_2}, Q_2 = q_2, P_2 = q_1q_2 + 1 \\ \delta_3 &= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = q_1 + \frac{1}{\frac{q_2q_3 + 1}{q_3}} = q_1 + \frac{q_3}{q_2q_3 + 1} = \frac{q_1q_2q_3 + q_1 + q_3}{q_2q_3 + 1} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} P_3 &= q_1q_2q_3 + q_1 + q_3 = (q_1q_2 + 1)q_3 + q_1 = P_2q_3 + P_1 \\ Q_3 &= q_2q_3 + 1 = Q_2q_3 + Q_1 \end{aligned}$$

次に (6) を帰納法で示す。

$k=3$ のとき、上で OK。

$k=n$ のとき、成立すると仮定する。

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}q_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}q_n + Q_{n-2}}$$

いま、 q_n を $\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right)$ で置き換えれば δ_{n+1} になる。そこで、

$$\delta_{n+1} = \frac{P_{n-1} \left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1} \left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + Q_{n-2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_n + \frac{1}{q_{n+1}}P_{n-1}}{Q_n + \frac{1}{q_{n+1}}Q_{n-1}} \\
&= \frac{P_n q_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n q_{n+1} + Q_{n-1}} \\
&= \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}
\end{aligned}$$

補題 3 $\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$

証明 $k=2$ のとき、 $\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{q_2} = \frac{(-1)^2}{Q_2 Q_1}$ で OK。

$k=n$ のとき成立すると仮定する。

$k=n+1$ のとき、

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_{n+1}Q_n}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= (P_n q_{n+1} + P_{n-1})Q_n - P_n(Q_n q_{n+1} + Q_{n-1}) \\
&= P_n Q_n q_{n+1} + P_{n-1} Q_n - P_n Q_n q_{n+1} - P_n Q_{n-1} \\
&= P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} = -(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) \\
&= (-1)^{n-1} (P_2 Q_1 - P_1 Q_2) \\
&= (-1)^{n-1} (q_1 q_2 + 1 - q_1 q_2) \\
&= (-1)^{n+1} \quad \square
\end{aligned}$$

このことから、

$$\begin{aligned}
\delta_{2k} - \delta_{2k+1} &= -(\delta_{2k+1} - \delta_{2k}) \\
&= \frac{(-1)^{2k}}{Q_{2k+1} Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k+1} Q_{2k}}
\end{aligned}$$

補題 4 $0 < P_{2k} - \alpha Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}}$

証明 $\alpha < \delta_{2k} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ より、 $\alpha Q_{2k} < P_{2k}$ 。

よって、

$$0 < P_{2k} - \alpha Q_{2k}$$

また、 $\delta_{2k+1} < \alpha < \delta_{2k}$ より、

$$\begin{aligned}
\delta_{2k} - \alpha &< \delta_{2k} - \delta_{2k+1} = \frac{1}{Q_{2k} Q_{2k+1}} \\
\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \alpha &< \frac{1}{Q_{2k} Q_{2k+1}}
\end{aligned}$$

両辺に Q_{2k} を掛けて、

$$P_{2k} - \alpha Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}} \quad \square$$

2.3 方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ の解

方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ について考える。

$$(x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y) = x^2 - 2y^2$$

ここで、 $x = P_{2k}$ 、 $y = Q_{2k}$ とおくと、

$$(P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k})(P_{2k} + \sqrt{2}Q_{2k}) = P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 \quad (7)$$

右辺は整数だから、左辺も整数。先の補題より、

$$0 < P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}}$$

(7) の左辺は正だから、

$$0 < P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2$$

また、

$$\begin{aligned} 0 < P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}} &= \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1} + Q_{2k-1}} \\ &\leq \frac{1}{2Q_{2k} + Q_{2k-1}} < \frac{1}{2Q_{2k}} \end{aligned}$$

ところが、

$$\delta_{2k} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} > \sqrt{2}$$

だから、 $\sqrt{2}Q_{2k} < P_{2k}$ となる。よって、

$$\begin{aligned} P_{2k} + \sqrt{2}Q_{2k} &< 2P_{2k} \\ P_{2k}^2 - Q_{2k}^2 &< \frac{2P_{2k}}{2Q_{2k}} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \delta_{2k} \end{aligned}$$

ここで、

$$P_{2k} < \sqrt{2}Q_{2k} + \frac{1}{Q_{2k+1}}$$

より、

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \frac{\sqrt{2}Q_{2k} + \frac{1}{Q_{2k+1}}}{Q_{2k}} = \sqrt{2} + \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$$

$k \geq 1$ に対して、

$$\frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}} \leq \frac{1}{Q_2Q_3} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$$

よって、

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < 2$$

したがって、

$$0 < P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < 2, \quad \forall k \geq 1$$

$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2$ は整数だから、

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 = 1$$

以上より、次の命題を得る。

命題 5 $(x, y) = (P_{2k}, Q_{2k})$ は方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ の解となる。

2.4 最小解

一般に $d > 1$ が平方数でない整数のとき、方程式 $x^2 - dy^2 = 1$ の整数解 x, y を求める。 $(x, y) = (1, 0)$ が解になるのは明らかなので、これを自明解とよぶことにする。上の方程式が自明でない整数解 $(a, b), a > 0, b > 0$ を持つと仮定する。

正の整数解 (x, y) に対し、 $x + y\sqrt{d}$ の値が最小のものをこの方程式の**最小解**という。方程式 $d = 2$ のときは、 $(x, y) = (3, 2)$ が最小解である。

補題 6 最小解は存在すればただ一つである。

証明 $(s, t), (u, v)$ を最小解とする。

$$s + t\sqrt{d} = u + v\sqrt{d}$$

ここで s, t, u, v は整数、 $\sqrt{d}$ は無理数だから、

$$s = u, \quad t = v \quad \square$$

次に方程式 (1) の重要な性質を示す。 (x_1, y_1) を方程式 (1) の解とすると、

$$x_1^2 - dy_1^2 = 1$$

したがって、

$$(x_1 + \sqrt{d}y_1)(x_1 - \sqrt{d}y_1) = 1 \quad (8)$$

となる。この式の両辺を n 乗して、

$$(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n = 1 \quad (9)$$

を得る。2項定理より、

$$(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n = x_1^n + nx_1^{n-1}\sqrt{d}y_1 + \frac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}dy_1^2 + \cdots + (\sqrt{d})^ny_1^n \quad (10)$$

これを整理して、 $x_n + \sqrt{d}y_n$ と書くことにする。このとき x_n, y_n も整数になり、

$$(x_1 - \sqrt{d}y_1)^n = x_n - \sqrt{d}y_n$$

となる。

補題 7 (x_n, y_n) は方程式 (1) の解になる。

証明

$$\begin{aligned} (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n &= (x_n + \sqrt{d}y_n)(x_n - \sqrt{d}y_n) \\ &= x_n^2 - dy_n^2 = 1 \end{aligned}$$

定理 8 平方数でない正の整数 d に対し、方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

のすべての解は、 $(\pm x_n, \pm y_n)$ の形をしている。ただし、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\{(a + b\sqrt{d})^n + (a - b\sqrt{d})^n\} \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{d}}\{(a + b\sqrt{d})^n - (a - b\sqrt{d})^n\} \end{aligned}$$

証明 この方程式の正の整数解 (x', y') が存在して、どの自然数 n に対しても、

$$x' + \sqrt{d}y' \neq (a + \sqrt{d}b)^n$$

とする。このとき、ある自然数 n が存在して、

$$(a + b\sqrt{d})^n < x' + \sqrt{d}y' < (a + b\sqrt{d})^{n+1} \quad (11)$$

となる。 $a + b\sqrt{d} > 0$ だから、式 (11) に $(a + b\sqrt{d})^n$ を掛けると、

$$1 < (x' + \sqrt{d}y')(a - b\sqrt{d})^n < a + b\sqrt{d}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (x' + \sqrt{d}y')(a - b\sqrt{d})^n &= (x' + \sqrt{d}y')(x_n - \sqrt{d}y_n) \\ &= x'x_n - dy'y_n + \sqrt{d}(y'x_n - x'y_n) \end{aligned}$$

これを $\bar{x} + \bar{y}\sqrt{d}$ とおく。このとき $\bar{x}$ と $\bar{y}$ は整数。 $(\bar{x}, \bar{y})$ は方程式 (1) の解になる。

3 非自明解の存在

この節では、方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

が自明でない整数解を持つことを示す。

補題 9 d が非平方数である正の整数のとき、ある自然数 k が存在して、方程式

$$x^2 - dy^2 = k \quad (12)$$

が無限組の整数解をもつ。

証明 任意の正の実数 α の無限連分数展開を考える。

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$$

と分解する。ここで、 $[\alpha]$ はガウス記号、 $\{\alpha\}$ は α の小数部分。

$$[\alpha] = q_1, \{\alpha\} = \frac{1}{\alpha_1}$$

とおくと、

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

ここで、 $\alpha_1 > 1$ となる。これを繰り返して次の式を得る。

$$\begin{aligned} \alpha &= q_1 + \frac{1}{\alpha_1} \\ \alpha_1 &= q_2 + \frac{1}{\alpha_2}, q_2 = [\alpha_1] \\ &\vdots \\ \alpha_n &= q_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, q_{n+1} = [\alpha_n] \\ &\vdots \end{aligned}$$

これより無限連分数展開、

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

を得る。ここで、前節と同様に近似分数を

$$\begin{aligned}\delta_1 &= q_1 \\ \delta_2 &= q_1 + \frac{1}{q_2} \\ \delta_3 &= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} \\ &\vdots\end{aligned}$$

とおいたとき、各 k に対し、

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

とおく。

無理数 $\alpha = \sqrt{d}$ の近似分数を使って、

$$P_{2n}^2 - dQ_{2n}^2 = (P_{2n} - \alpha Q_{2n})(P_{2n} + \alpha Q_{2n})$$

となり、この値を z_{2n} と記す。ここで、

$$0 < P_{2n} - \alpha Q_{2n} < \frac{1}{Q_{2n+1}}$$

であるから、

$$0 < P_{2n} + \alpha Q_{2n} < 2\alpha Q_{2n} + P_{2n} - \alpha Q_{2n} < 2\alpha Q_{2n} + \frac{1}{Q_{2n+1}}$$

となる。 z_{2n} を評価すると、

$$0 < z_{2n} < \frac{1}{Q_{2n}} \left(2\alpha Q_{2n} + \frac{1}{Q_{2n+1}} \right) < 2\alpha + 1$$

となり、 z_{2n} は正の整数となる。 1 と $2\alpha + 1$ の間には $[2\alpha + 1]$ 個の整数しかないから、ある $1 \leq k \leq [2\alpha + 1]$ が存在して、方程式 (12) は無限個の整数解を持つ。 $\square$

方程式 (12) の無限個の解を $(u_n, v_n)_{n \in \omega}$ とリストすることにする。

主張 $k = 1$

いま $k > 1$ と仮定する。つまり、方程式 (1) に非自明な解は無いと仮定する。各 $n \in \omega$ に対し、整数の組 (u_n, v_n) のそれぞれの数を k で割った余りを p_n, q_n とする。余りの組 (p_n, q_n) は有限 (高々 k^2) の組合せしかありえない。鳩ノ巣論法により、少なくとも一つの組が無限回現われる。それを (p, q) と表す。余りの組が (p, q) となる方程式 (12) の解のリストを $(s_n, t_n)_{n \in \omega}$ とおく。ここで、 (s_n, t_n) は近似分数の分子と分母の組だから互いに素である。(6) より、

$$Q_2 < Q_4 < Q_6 < \cdots$$

よって、これらの部分列である $t_1, t_2, t_3, \dots$ も互いに異なる。したがって、分数の列 $\frac{s_n}{t_n}$ もすべて異なる。

定義により、

$$s_1^2 - dt_1^2 = (s_1 - \alpha t_1)(s_1 + \alpha t_1) = k \quad (13)$$

$$s_2^2 - dt_2^2 = (s_2 - \alpha t_2)(s_2 + \alpha t_2) = k \quad (14)$$

ここで、 $\alpha = \sqrt{d}$ だから、

$$(s_1 - \alpha t_1)(s_2 + \alpha t_2) = s_1 s_2 - dt_1 t_2 - \alpha(s_1 t_2 - s_2 t_1) \quad (15)$$

同様に、

$$(s_1 + \alpha t_1)(s_2 - \alpha t_2) = s_1 s_2 - dt_1 t_2 + \alpha(s_1 t_2 - s_2 t_1) \quad (16)$$

ここで、 (s_n, t_n) の性質より、

$$s_n = a_n k + p, \quad t_n = b_n + q$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} s_1 s_2 - dt_1 t_2 &= s_1(a_2 k + p) - dt_1(b_2 k + q) \\ &= s_1\{(a_2 - a_1)k + a_1 k + p\} - dt_1\{(b_2 - b_1)k + b_1 k + q\} \\ &= s_1\{(a_2 - a_1)k + s_1\} - dt_1\{(b_2 - b_1)k + t_1\} \\ &= k\{s_1(a_2 - a_1) - dt_1(b_2 - b_1)\} + s_1^2 - dt_1^2 \\ &= k\{s_1(a_2 - a_1) - dt_1(b_2 - b_1) + 1\} \\ &= kx_1 \end{aligned}$$

同様に、

$$s_1 t_2 - s_2 t_1 = ky_1$$

となる。ここで x_1 も y_1 も整数。

いま $y_1 \neq 0$ である。なぜなら、 $y_1 = 0$ とすると、

$$ky_1 = s_1 t_2 - s_2 t_1 = 0$$

となり、

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$$

であり矛盾。

等式 (15) と (16) より、

$$(s_1 - \alpha t_1)(s_2 + \alpha t_2) = kx_1 + \alpha ky_1 = k(x_1 + \alpha y_1) \quad (17)$$

$$(s_1 + \alpha t_1)(s_2 - \alpha t_2) = kx_1 - \alpha ky_1 = k(x_1 - \alpha y_1) \quad (18)$$

が得られる。(13) と (14) を掛け合わせると (17), (18) より、

$$\begin{aligned} k^2 &= (s_1^2 - dt_1^2)(s_2^2 - dt_2^2) \\ &= (s_1 - \alpha t_1)(s_2 + \alpha t_2)(s_1 + \alpha t_1)(s_2 - \alpha t_2) \\ &= k^2(x_1 + \alpha y_1)(x_1 - \alpha y_1) \\ &= k^2(x_1^2 - dy_1^2) \end{aligned}$$

よって、

$$x_1^2 - dy_1^2 = 1$$

つまり (x_1, y_1) は方程式 (1) の非自明な解となり矛盾。

4 解の行列表示

この節では、一般化されたペルの方程式

$$x^2 - dy^2 = m^2$$

の解の行列表示を考える。まず、最小解 (a, b) に対し、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \sqrt{d} \right)^n + \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} \sqrt{d} \right)^n \right\} \\ y_n &= \frac{m}{2\sqrt{d}} \left\{ \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \sqrt{d} \right)^n - \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} \sqrt{d} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

とおくと、 (x_n, y_n) はこの方程式の一般解となる。

$$A = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$|A| = \frac{1}{m^2} (a^2 - db^2) = \frac{m^2}{m^2} = 1$$

であり、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、方程式の一般解は $(\pm x_n, \pm y_n)$ である。

例 10 $m = 1, d = 3$ のとき、 $(2, 1), (7, 4), (26, 15), (97, 56), (362, 209), (1351, 780), \dots$ は解である。

参考文献

- [1] 倉田令二郎. ガウス 2 次形式論 (1). 河合ブックレット 数学シリーズ 3. 河合文化教育研究所, 1987.
- [2] グリファント. 方程式の解き方. 東京図書, 1993.