

楕円曲線：保型形式の岩澤理論

東京工業大学 加藤和也

Mazur と Wiles によって 1980 年 すぎに解決された岩澤 main conjecture は、 $\mathbb{Q}$ 分体のアイデアに類群とリーマン・ゼータ関数のふしぎな関係も考察するものであった。1990 年頃に至って、 $\mathbb{Q}$ 単数の性質を大いに用いた、岩澤 main conjecture の別証が、Kolyvagin の方法にもとずいて Rubin によって与えられた。

この Kolyvagin と Rubin の方法において、「 $\mathbb{Q}$ 単数」の代わりに、「モジュラー曲線の K_2 群の中に Beilinson が定義した元」を用いると、楕円曲線や保型形式の岩澤理論が解明される。つまり、

テーマ	$\mathbb{Q}$ 分体の岩澤理論 リーマンゼータ関数と $\mathbb{Q}$ 分体の ideal 類群 の関係	楕円曲線や保型形式の岩澤理論 楕円曲線や保型形式の zeta 関数と Tate-Shafarevich 群や Selmer 群 の関係
活躍する ピタゴラスの化身	$\mathbb{Q}$ 単数	モジュラー曲線の K_2 の中の Beilinson elements

§ 1. 結果と方法.

1° 楕円曲線

E を $\mathbb{Q}$ 上のモジューラーな楕円曲線とし、 $L(E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ をそのゼータ関数とし、Dirichlet 指標 χ に対し、 $L(E, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$ とおく。 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 K に対し

$$E(K), \quad \text{Sel}(E, K), \quad \text{III}(E, K)$$

をそれぞれ、 E の K 有理点の群、 E の K 上の Selmer 群、 E の K 上の Tate-Shafarevich 群とおく。 完全列

$$0 \rightarrow E(K) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{Sel}(E, K) \rightarrow \text{III}(E, K) \rightarrow 0$$

が存在する。 $\text{III}(E, K)$ は有限と予想されている。

可換群 G 、 G 加群 M 、 G の指標 $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し

$$M_\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \text{Image}(\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\chi} \mathbb{C})$$

とおく。

次の定理 1 は Birch Swinnerton-Dyer 予想の、定理 2 (1) は p 進 Birch Swinnerton-Dyer 予想の、定理 2 (2) は楕円曲線の岩澤 main conjecture の、部分的解決である。

定理 1 ζ_N を 1 の原始 N 乗根とし、 $\chi: \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を Dirichlet 指標とする。 $L(E, \chi, 1) \neq 0$ とする。 この時、 $E(\mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$ 、 $\text{Sel}(E, \mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$ 、 $\text{III}(E, \mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$ は

有限群である

ここで $()_X$ は, $()$ のなかみを $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ 加群と見て
定めたものである.

定理 2 p を素数とし, E は p で good ordinary reduction であるとする.

$$L_{p\text{-adic}}(E, s) \in \Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q})]$$

を E の p 進ゼータ関数とする.

$$(1) \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}}(E(\mathbb{Q})) \leq \text{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E, s)$$

$$(2) \quad X = \text{Hom}\left(\varprojlim_n \text{Sel}(E, \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right) \text{ とするとき,}$$

X は有限個の Λ 加群であり, Λ の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p} \neq (p)$ なるものに対し

$$\Lambda_{\mathfrak{p}}\text{ 加群 } X_{\mathfrak{p}} \text{ の長さ} \leq \text{ord}_{\mathfrak{p}}(L_{p\text{-adic}}(E, s)).$$

ここで $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(L_{p\text{-adic}}(E, s))$ とは, $L_{p\text{-adic}}(E, s)$ の、離散付値環 $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ における order (付値) のことである. また

$$\text{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E, s) \text{ とは, } \mathfrak{p} \text{ として}$$

$$(*) \quad \text{Ker}(\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_p, \sigma \mapsto 1 \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(\bigcup_n \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}))$$

をとるとき $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(L_{p\text{-adic}}(E, s))$ のことである.

定理 2 (1) は 定理 2 (2) からしたかう. というのは, $\mathfrak{p}$ として $(*)$ をとるとき,

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E, s) &\stackrel{\substack{\geq \\ \uparrow \\ \text{定理2(2)より}}}{\geq} \wedge_p \text{加群 } \mathcal{X}_p \text{ の長さ} \\
&\geq \dim_{\mathbb{Q}_p} (\mathcal{X}_p / p \mathcal{X}_p) \\
&= \text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}(\text{Sel}(E, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p) \\
&\geq \text{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})
\end{aligned}$$

となるからである。

2° 保型形式

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ を重み $k \geq 2$ の尖点形式とし ($q = e^{2\pi i z}$, $z \in$ 上半平面), Hecke 作用素の同時固有関数であるものとする。ある技術的な理由 (下記の結果を得るためのもの) により, $a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \geq 1$ と仮定する。 $a_1 = 1$ とする。セータ関数

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$$

が定義される。 $k=2$ の時, f は $\mathbb{Q}$ 上のモジュラーな楕円曲線 E に対応し, $L(f, \chi, s) = L(E, \chi, s)$ である。

$k \geq 2$ が一般の場合も, $\text{Sel}(E, K)$ に類似した $\text{Sel}(f, K)$ が定義される。どんなふうに定義されるかということ, Deligne により, $G_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が連続に作用する階数 2 の $\hat{\mathbb{Z}}$ 加群 T_f (ここに $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) が定まる (たとえば $k=2$ なら T_f は f に対応する楕円曲線の Tate 加群 $T(E)$ の Tate twist $T(E(-1))$ である)

が、 $Sel(f, K)$ は $H^1(Gal(\bar{K}/K), T_f \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(k-1))$ のある部分群として定義される。 $(k=2$ で f が E に対応すれば $Sel(f, K) = Sel(E, K)$ となる.)

定理 1' : $k \geq 3$ なら $Sel(f, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ は有限群である。

(定理 1 と様子が違って、こちらは常に有限となるのは、

$k \geq 3$ であれば $L(f, \chi, k-1) \neq 0$ が必ず成立する ($s=k-1$ は絶対収束域の中にあること、 $L(f, \chi, s)$ がオイラー積表示をもつことによる) ためである。)

定理 2 (2) の類似も、 p -進セータ関数 $L_{p\text{-adic}}(f, s)$ について成立する。

3° 方法

方法は、Kolyvagin の Euler system の方法を用いるものである。この方法で、ちょうど Rubin が円単数の性質を大いに用いて円分体の ideal 類群の大きさをあてえることができたように、モジュラー曲線の K_2 群の中の Beilinson elements の性質を大いに用いて、 $S(f, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ の大きさをあてえることができる。

ただしそのあてえられかたが $L(f, \chi, k-1)$ に関係したあてえられかたであることを示すのに、Beilinson elements が p -adic に $L(f, \chi, k-1)$ と関係すること、を p -進 Hodge 理論を用いて示すことが必要で、その箇所を次の §2 (とくに §2 の 3°) に述べる。

§2. セータの化身とセータの値

1° セータの化身円単数

モジュラ - 曲線の K_2 の中の Beilinson elements というのは、
セータの化身である。それについて述べるのに、もっとわかり
やすいセータの化身である、円単数のことをまず考えたい。
円単数とは

$$1 - \zeta_N \quad (\zeta_N \text{ は } 1 \text{ の 原始 } N \text{ 乗根, } N \geq 2)$$

のことで、セータ関数と $\mathbb{C}$ 内で次のように関係する。

$$\zeta_N = e^{\frac{2\pi i \alpha}{N}} \quad \text{と おく と}$$

$$(*) \quad \log |1 - \zeta_N| = - \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \left(\zeta_{\equiv \alpha(N)}(s) + \zeta_{\equiv -\alpha(N)}(s) \right).$$

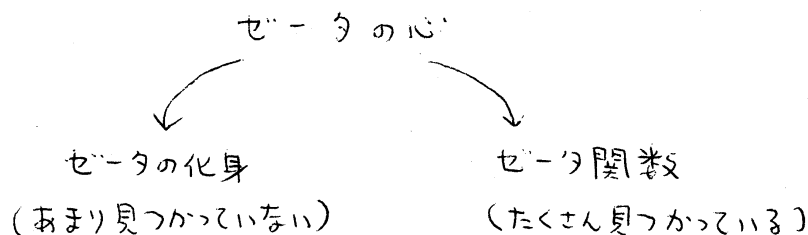
ここに $\zeta_{\equiv \alpha(N)}(s)$ は部分 リ - マン - セータ関数で、

$$\zeta_{\equiv \alpha(N)}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \alpha \pmod{N}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

として $\operatorname{Re}(s) > 1$ で定義され、複素平面全体に解析接続された
ものである。

$$1 - \zeta_N \in \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}]^{\times} = K_1(\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}])$$

であって、 $1 - \zeta_N$ は K 群の元と見られる。このようにセータ
の化身は K 群に属するのである。3° に述べるように、円単数は
 p -adic にもセータの値と、 p 進 Hodge 理論を通じて関係する。
円単数は、セータの心のこもった元なのである。



次の古典的結果は、 $r=0$ の場合、上の(*) に一致するもので、 $r=2$ の場合は $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ などをもたらす、重要なものだが、あとで保型形式の話との対比上、重要になる。

古典的定理. $r \geq 0$ とし

$$\omega_N^{(r)} = \frac{1}{2} \left(t \frac{d}{dt} \right)^r \log \{ (1-t)(1-t^{-1}) \} \Big|_{t=\zeta_N}$$

と置く、 $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i a}{N}}$ とおくとき、

$$\omega_N^{(0)} = - \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \left(\zeta_{\equiv a(N)} + \zeta_{\equiv -a(N)} \right) (s).$$

$r \geq 1$ のとき

$$\omega_N^{(r)} = (-1)^{r-1} \times (r-1)! \times \left(\frac{N}{2\pi i} \right)^r \times \left(\zeta_{\equiv a(N)} + (-1)^r \zeta_{\equiv -a(N)} \right)^{(r)}.$$

2° 保型形式のゼータの化身

$Y(N)$ を level N の modular 曲線とする。 $Y(N)$ は、 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ を定数体とする代数曲線で、

$$Y(N) \otimes_{\mathbb{Q}(\zeta_N)} \mathbb{C} = \Gamma(N) \backslash \mathcal{H}_g$$

$\mathcal{H}_g$ = 上半平面, $\Gamma(N) = \text{Ker}(SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ となるもの

のである。 $M_k(Y(N))$ を $Y(N)$ 上の重み k の modular form 全体とする。

次のような対比を考えていく

	古典的理論	モジューラ-曲線の場合
もとになる関数	$(1-t)(1-t^{-1})$	${}_c\theta$
等分点での値	Γ 単数 $\in \mathbb{Q}(\mathcal{N})^\times$	Siegel unit $\in \mathbb{Q}(Y(N))^\times$
それを使ってできる ゼータの化身	同上	Beilinson element $\in K_2(Y(N))$
「もとになる関数の log を何度も微分してから 等分点での値をとったもの」	$\omega_N^{(r)} \in \mathbb{Q}(\mathcal{N})$ ($r \geq 1$)	Eisenstein series $\in M_k(Y(N))$
それを使ってできる ゼータの化身	同上	志村 element $\in M_k(Y(N))$

右端の欄のものを順に述べていく。

${}_c\theta$ について : c を 6 と互いに素な整数とする。 $\mathcal{E}$ を $Y(N)$ 上の universal elliptic curve とするとき、 $\mathcal{E}$ 上の有理関数 ${}_c\theta$ が定義される。 $\mathbb{C}$ 上へゆくと、 $\mathcal{E} \rightarrow Y(N)$ は

$$(\mathbb{C} \times \mathcal{E}_\tau) / \sim \xrightarrow{\text{第2射影}} \Gamma(N) \backslash \mathcal{E}_\tau \quad \text{ここは}$$

$$\sim \text{ は } (z, \tau) \sim (z + m\tau + n, \tau) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$(z, \tau) \sim \left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$$

で生成される同値関係。そして ${}_c\theta$ は

$${}_c\theta(z, \tau) = q^{\frac{c^2-1}{12}} (-t)^{\frac{c-c^2}{2}} \cdot f_q(t)^{c^2} f_q(t^c)^{-1}$$

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad t = e^{2\pi i z}, \quad f_q(t) = \prod_{n \geq 0} (1 - q^n t) \times \prod_{n > 0} (1 - q^n t^{-1})$$

と定義されるものである。

Siegel unit $(\alpha, \beta) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} - \{(0, 0)\}$ と, b と互いに素な整数 c に対し, Siegel unit ${}_c g_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}^\times(Y(N))^\times$ が

$${}_c g_{\alpha, \beta}(\tau) = {}_c \theta\left(\frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N}, \tau\right) \quad \text{where } a = \frac{a}{N}, \beta = \frac{b}{N}$$

と定義される. つまり ${}_c g_{\alpha, \beta}$ は, ${}_c \theta$ の $\mathbb{C}^\times$ の等分点.

$$\tau \mapsto \left(\frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N}, \tau\right) : Y(N) \rightarrow \mathbb{C}^\times \text{ における値.}$$

Beilinson elements b と互いに素な整数 c, d に対し

$${}_{c,d} K_N = \{ {}_c g_{\frac{1}{N}, 0}, {}_d g_{0, \frac{1}{N}} \} \in K_2(Y(N))$$

が Beilinson element と呼ばれる zeta の化身である.

c や d という補助の数を除くためには, $c \equiv 1 \pmod{N}$, $(c, b) = 1$,

$c \neq \pm 1$ なる c をとって

$$g_{\alpha, \beta} = {}_c g_{\alpha, \beta} \otimes \frac{1}{c^2 - 1} \in \mathbb{C}^\times(Y(N))^\times \otimes \mathbb{Q}$$

とおくと, これは c のとり方によらない.

$$K_N = \{ g_{\frac{1}{N}, 0}, g_{0, \frac{1}{N}} \} \in K_2(Y(N)) \otimes \mathbb{Q}$$

とおく.

Eisenstein series $(\alpha, \beta) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} - \{(0, 0)\}$ と, b と互いに素な整数 c , $r \geq 1$ に対し

$${}_c E_{\alpha, \beta}^{(r)}(\tau) = \left(\frac{d}{2\pi i d\tau}\right)^r \log({}_c \theta(z, \tau))$$

とおく. $r \neq 2$ なら $E_{\alpha, \beta}^{(r)} = \frac{1}{c^2 - c^r} {}_c E_{\alpha, \beta}^{(r)}$ ($(c, b) = 1$, $c \equiv 1 \pmod{N}$, $c \neq \pm 1$)

とおくとこれは c のとり方によらない. したがって $r \geq 3$ なら

$$E_{\alpha, \beta}^{(r)}(\tau) = (-1)^{r-1} \times \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r} \times \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N} + m\tau + n\right)^r}.$$

志村 element 6 と互いに素な整数 c, d と, $a \geq 1, b \geq 1$ な

る整数 a, b に対し

$$c, d \omega_N^{(a, b)} = c E_{\frac{1}{N}, 0}^{(a)} \cdot d E_{0, \frac{1}{N}}^{(b)} \in M_{a+b}(Y(N))$$

と置く, $a \neq 2, b \neq 2$ のとき

$$\omega_N^{(a, b)} = E_{\frac{1}{N}, 0}^{(a)} \cdot E_{0, \frac{1}{N}}^{(b)} \in M_{a+b}(Y(N))$$

と置く.

Beilinson element, 志村 element の $\mathbb{C}$ 上での zeta 関数との関係は次のとおり.

定理 (Beilinson) . Beilinson の regulator map

$$K_2(Y(N)) \longrightarrow H^1(Y(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \mathbb{Z} \cdot 2\pi i)^+ \otimes \mathbb{R}$$

による K_N の像は

$$\left(\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, N)=1}}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \right) \cdot (s + \bar{s})$$

ここに $T(n)$ は Hecke 作用素, s は 0 から ∞ への虚軸 $\in H_1(X(N) \otimes \mathbb{C}, \text{comp}, \mathbb{Z}) \cong H^1(Y(N) \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Z} \cdot 2\pi i)$

定理 (志村) . Eichler-Shimura 同型

$$M_k(Y(N)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H^1(Y(N) \otimes \mathbb{C}, S_{\text{sym}}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z})^+ \otimes \mathbb{R}$$

による $\omega_N^{(a, b)}$ ($a \geq 1, b \geq 1, a+b=k, a \neq 2, b \neq 2$) の像は

$$\left. \sum_{\substack{n=1 \\ (n, N)=1}}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \right|_{s=k-1} \cdot \left\{ \frac{s_N^{(a, b)}}{(2\pi i)^{k-1}} + \overline{\left(\frac{s_N^{(a, b)}}{(2\pi i)^{k-1}} \right)} \right\}.$$

ここに, f は universal elliptic curve $E \rightarrow Y(N)$, $s_N^{(a, b)}$ は

$H^1(Y(N) \otimes \mathbb{C}, S_{\text{sym}}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z})^+$ の重要な元で,

「 τ が 0 から $i\infty$ まで虚軸を走るとき

$\text{Sym}^{k-2} H_1(f^{-1}(\tau), \mathbb{Z})$ の元 $(\text{道「0から}\tau\wedge\text{」})^a \cdot (\text{道「0から}1\wedge\text{」})^b$

の総体」 $\in H_1(X(N) \otimes \mathbb{C}, \text{cusps}, \text{local system } \tau \mapsto H_1(f^{-1}(\tau), \mathbb{Z}))$

$$\cong H^1(Y(N) \otimes \mathbb{C}, \text{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z}).$$

3° ゼータの化身の p 進性質

1° に登場した円単数と $\omega_N^{(r)}$ ($r \geq 1$), Beilinson element と志村 element は, p 進世界の中で次のように関係する. 志村 element は, 上の定理 (志村) により $L(f, \chi, k-1)$ に関係するので, Beilinson element は $L(f, \chi, k-1)$ に p-adic に関係するのである.

$$\begin{aligned} \text{定理 } \varprojlim_n \mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})^\times &\rightarrow \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}), \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1)) \\ &\cong \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}), \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(1-r)) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Z}_p(1-r)) \xrightarrow{(*)} \mathbb{Q}(\zeta_N) \otimes \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

($r \geq 1$) による $((1 - \zeta_{Np^n})(1 - \zeta_{Np^n}^{-1}))_{n \geq 1}$ の像は $2\omega_N^{(r)}$.

$$\begin{aligned} \text{定理 } \varprojlim_n K_2(Y(Np^n)) &\rightarrow \varprojlim_n H^2(Y(Np^n), \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(2)) \\ &\xrightarrow{\text{saib}} \varprojlim_n H^2(Y(Np^n), \text{Sym}^{k-2} R^1 f_* (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})(1)) \\ &\rightarrow H^2(Y(N), (\text{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z}_p)(1)) \\ &\xrightarrow{(*)} M_k(Y(N)) \otimes \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

による $(c, d K_{Np^n})_{n \geq 1}$ の像は $c, d \omega_N^{(a), (b)}$.

(*) は p 進 Hodge 理論から定まるもの)