

# P. Erdős の一予想をめぐる数値実験

岡山大 理 頼 永 正 孝

岡山大 理 内 山 三 郎

## 1. Erdős の予想

P. Erdős はいろいろなところで次の予想を述べている  
 ( $[1, 2, 3]$ ):  $b \geq 2$  はあたえられた整数として, 自然数  
 $n$  に対し  $n - b^k$  が素数となる  $k$  ( $1 \leq k < (\log n)/\log b$ )  
 の個数を  $f(n)$  で表すとき

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} = 0$$

が成立つ. (1) は多分真であろうが, Erdős のいうよう  
 に, これを証明することはかなり難しいものと思われる.

個々の  $n$  に対する  $f(n)$  の値について,

定数  $c = c(b) > 0$  が存在して

$$(2) \quad f(n) > c \log \log n$$

が無限個の  $n$  に対して成立つ

ことと,

$b$  と互に素な整数からなる無限等差数列が存在し、  
この数列に属するすべての  $n$  に対して

$$f(n) = 0$$

が成立つ

ことが知られているにすぎない (cf. [1, 2]).

さて,  $n - b^k$  が  $1 \leq k < (\log n) / \log b$  をみたすすべての整数  $k$  に対して素数であるとき, 自然数  $n$  は性質  $P(1, b)$  をもつ, ということにしよう. もし (1) が真ならば, 任意の  $b \geq 2$  に対して, 性質  $P(1, b)$  をもつ  $n$  の個数は有限でなければならない. とくに  $b = 2$  のとき次の 7 個の整数

$$4, 7, 15, 21, 45, 75, 105$$

は性質  $P(1, 2)$  をもつが, Erdős はこれらの他に性質  $P(1, 2)$  をもつ自然数は存在しないであろうと予想する. そして彼は, 実際に素数表を用いて, 区間  $105 < n \leq 203775 (= 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19)$  には性質  $P(1, 2)$  をもつ  $n$  が存在しないことを見ている (cf. [1]). W.E. Mientka and R.C. Weitzenkamp [4] は計算機 IBM 7040 を使用して Erdős のこの結果を延長し,

$$105 < n \leq 18734724677955$$

$$(\equiv 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 79 > 2^{44})$$

の範囲にそのような整数の存在しないことを検証した。

われわれはこの数値実験を延長し、これまでに

$$105 < n \leq 152246817378604933869885$$

$$(\equiv 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 38916793 > 2^{77})$$

の区間に性質  $P(1, 2)$  をもつ整数  $n$  の存在しないことをたしかめた。使用した計算機は HITAC 20 である。

Mientka-Weitzenkamp [4] は、IBM 7040 を用いて、区間  $3 \leq b \leq 13$  内の各  $b$  についても、性質  $P(1, b)$  をもつ自然数  $n \leq 20000$  の個数をもとめているが、彼らのあたえた数値には誤りがあるように思われる。Mientka-Weitzenkamp によるこの数値と、われわれが HITAC 20 を用いてした実験による数値とを下に掲げる。

No. of numbers  $n \leq 20000$  with  $P(1, b)$

| b | M-W's | ours | difference |
|---|-------|------|------------|
| 2 | 9     | 7    | 2          |
| 3 | 23    | 20   | 3          |
| 4 | 81    | 77   | 4          |
| 5 | 63    | 58   | 5          |
| 6 | 240   | 234  | 6          |
| 7 | 159   | 152  | 7          |
| 8 | 110   | 102  | 8          |
| 9 | 280   | 251  | 29         |

|    |     |     |    |
|----|-----|-----|----|
| 10 | 383 | 373 | 10 |
| 11 | 265 | 254 | 11 |
| 12 | 351 | 339 | 12 |
| 13 | 385 | 372 | 13 |

われわれは更に  $2 \leq b \leq 21$  なる各  $b$  について性質  $P(1, b)$  をもつ正整数  $n \leq 2^m E 4$  ( $m = 0(1)10$ ) の個数を数えた。  
次の表は得られた結果の一部を示すものである。

No. of numbers  $n \leq x$  with  $P(1, b)$

| b  | $x = 32E4$ | $x = 1024E4$ | largest n found |
|----|------------|--------------|-----------------|
| 2  | 7          | 7            | 105             |
| 3  | 20         | 20           | 1330            |
| 4  | 92         | 100          | 5833497         |
| 5  | 61         | 66           | 7726572         |
| 6  | 349        | 411          | 9620063         |
| 7  | 199        | 247          | 9487050         |
| 8  | 153        | 210          | 8531205         |
| 9  | 534        | 1117         | 10166362        |
| 10 | 746        | 1177         | 9981153         |
| 11 | 639        | 1581         | 10219608        |
| 12 | 525        | 853          | 10203655        |
| 13 | 751        | 1511         | 10177200        |
| 14 | 921        | 1651         | 10238703        |
| 15 | 2080       | 5972         | 10239754        |
| 16 | 1790       | 5929         | 10239467        |
| 17 | 474        | 773          | 10120650        |
| 18 | 1086       | 2473         | 10228645        |
| 19 | 1580       | 4016         | 10230452        |
| 20 | 1472       | 4933         | 10233093        |
| 21 | 3717       | 14395        | 10237082        |

猶, R. C. Vaughan [5] は  $1 \leq k \leq (\log n)/\log 2$  なる  $k$  の整数  $k$  に対しても  $n - 2^k$  が素数であるような自然数  $n \leq N$  の個数  $E_2(N)$  の評価式

$$E_2(N) < N \exp\left(-\frac{c(\log N) \log \log \log N}{\log \log N}\right) \quad (c > 0 \text{ 定数})$$

をあたえている。

## 2. 問題の一般化

われわれは問題を次のように一般化する。整数  $a, b$  は  $1 \leq a < b$  をみたすものとする。  $1 \leq k < (\log n)/\log(b/a)$  なるすべての整数  $k$  に対して  $a^k n - b^k$  が素数であるとき、自然数  $n$  は性質  $P(a, b)$  をもつ、ということにする。どんな整数の組  $(a, b)$  ( $1 \leq a < b$ ) に対しても性質  $P(a, b)$  をもつ自然数は高々有限個しか存在しないのではないか？  $G.C.D.(a, b) > 1$  なる  $(a, b)$  についてはこれは明かであるから  $G.C.D.(a, b) = 1$  なるものだけを考えればよい。

われわれは  $1 \leq a < b \leq 21$ ,  $G.C.D.(a, b) = 1$  をみたす整数の組  $(a, b)$  (のいくつか) についてこの問題を考察し実験を試みた。次に得られた結果の一部を示す。

No. of numbers  $n \leq 5E12$  with  $P(a, b)$

| a, b  | number of n | n found |
|-------|-------------|---------|
| 7, 10 | 1           | 3       |
| 7, 9  | 1           | 2       |
| 4, 5  | 1           | 2       |
| 5, 6  | none        | —       |
| 6, 7  | 1           | 2       |
| 7, 8  | none        | —       |
| 8, 9  | none        | —       |

(  $b/a (>1)$  の値が十分小ならば  $n$  に対する限界は殆ど

無制限に上げられる！ )

No. of numbers  $n \leq x$  with  $P(a, b)$

| a, b  | $x = 2E4$ | $x = 512E4$ | largest n found |
|-------|-----------|-------------|-----------------|
| 2, 3  | 5         | 5           | 8               |
| 2, 5  | 34        | 34          | 507             |
| 2, 7  | 46        | 48          | 3305430         |
| 2, 9  | 87        | 99          | 1594135         |
| 2, 11 | 113       | 163         | 4373430         |
| 2, 13 | 135       | 196         | 4534467         |
| 2, 15 | 404       | 1036        | 5104333         |
| 2, 17 | 393       | 751         | 4946795         |
| 2, 19 | 187       | 476         | 5119215         |
| 2, 21 | 460       | 1026        | 5074165         |
| 3, 4  | 3         | 3           | 5               |
| 3, 5  | 4         | 4           | 24              |
| 3, 7  | 15        | 15          | 352             |
| 3, 8  | 12        | 12          | 497             |
| 3, 10 | 42        | 42          | 4409            |
| 3, 11 | 25        | 25          | 2160            |
| 3, 13 | 76        | 83          | 537808          |
| 3, 14 | 63        | 87          | 4696235         |
| 3, 16 | 45        | 47          | 202545          |

(附記)  $1 \leq a < b$ ,  $\text{G.C.D.}(a, b) = 1$  とする. 自然数  $n$  に対して  $a^k n - b^k$  が素数となる整数  $k$  ( $1 \leq k < (\log n) / \log(b/a)$ ) の個数をふたたび  $f(n)$  で表すとき, (1) の成立つことが予想される. いまのところ, われわれに証明できることは, (2) すなわち

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log \log n} \geq c$$

なる定数  $c = c(a, b) > 0$  の存在, および  $a, b$  と互に素な整数からなる密度正 (positive density) の集合があってこれに属する各  $n$  に対して  $f(n) = 0$  が成立つこと, だけである. 証明は Erdős [1] における論法による.

## 文 献

- [1] P. Erdős: On integers of the form  $2^k + p$  and some related problems. Summa Brasil. Math. 2 (1950), 113-123.
- [2] ———: Quelques problèmes de la théorie des nombres. Monographies de l'Enseignement Mathématique No. 6, Genève (non-dated). Esp. Problème 54, pp. 121-122.
- [3] ———: Résultats et problèmes en théorie des nombres. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (14e année: 1972/73). Secrétariat Mathématique, Paris (1973). MR 53(1977), #243.
- [4] W. E. Mientka and R. C. Weitzenkamp: On  $f$ -plentiful numbers. J. Combinatorial Theory 7 (1969), 374-377.
- [5] R. C. Vaughan: Some applications of Montgomery's sieve. J. Number Theory 5 (1973), 64-79. Esp. formula (1.5), p. 65.