

MEASURE-COMplete SPACES

静岡大・教育 大田 春外 (Haruto Ohta)

位相空間論の研究課題の 1 つは、位相的性質が種々の operations の下でどの程度保存されるかを調べることである。さて位相空間上の抽象的測度論では、その上の任意の測度が或る意味でよい性質を持つという条件によって、いくつかの位相空間のクラスが定義される。これらの空間の概念は、それらが位相的性質、即ち、同相写像の下で不変な性質であるにも拘らず、上に述べた様な位相空間論の立場からは組織的な研究がなされてはいない。そこでこの問題について、今までに何が知られて何が知られていないかを明らかにしたい。

以下、“space” と言えは、完全正則な Hausdorff 位相空間を意味する。space X について、

$F(X)$: X の closed sets の全体,

$Z(X)$: X の zero-sets の全体,

$B_0(X)$: X の Borel sets の全体,

$B_a(X)$: X の Baire sets の全体,

とする。 X 上の "Borel (Baire) measure" は, $B_0(X)$ ($B_a(X)$) 上で定義された finite, nonnegative, σ -additive measure を意味する。

1. Measures の性質。必要とする measures の性質について簡単に述べる。詳しくは, Borel measures については [14] を, Baire measures については [14] 又は [35] を参照されたい。また Borel measures については,

DEFINITIONS 1.1. μ は space X 上の Borel measure とする。任意の $B \in B_0(X)$ に対して,

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) ; \text{compact } K \subseteq B \}$$

が成り立つとき, μ は Radon measure であるという。また,

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(F) ; F \subseteq B, F \in F(X) \}$$

が成り立つとき, μ は regular であるという。いま包含関係によって順序付けられた open sets の与える net $\mathcal{U}$ について $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cup \{ \emptyset ; \emptyset \in \mathcal{U} \}$ とあるとき, $\mathcal{U} \nearrow \mathcal{U}_0$ とかく。任意のそのような net $\mathcal{U}$ に対して,

$$\mathcal{U} \nearrow \mathcal{U}_0 \Rightarrow \mu(\mathcal{U}_0) = \sup \{ \mu(U) ; U \in \mathcal{U} \}$$

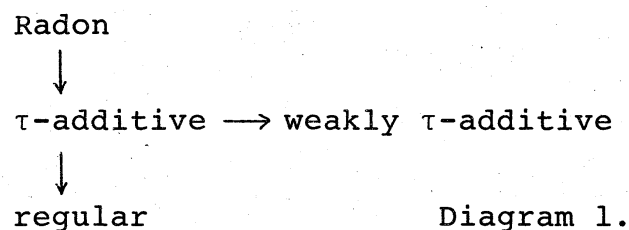
が成り立つとき, μ は τ -additive であるという。また任意

のその様な net $\mathcal{U}$ に対して,

$$\mu \nearrow x \Rightarrow \mu(x) = \sup \{ \mu(U) ; U \in \mathcal{U} \}$$

が成り立つとき, μ は weakly τ -additive であるという。

Radon measure は, locally compact space X の compact support をもつ complex-valued continuous functions 全体から成る normed space $C_c(X)$ 上に定義された linear functional μ に Riesz の表現定理により, 2 種分表示する際に構成される measure として知られており, Schwartz [32] によれば, 一般の space X 上に扱われる様になる。Radon measure であることと regularity は, Borel sets の measure μ を分り易い集合の measure で近似出来ることを示すことと考へられる。また (1.1) で定義された 4 つの性質は, 互いに measures のある種の連続性を表わしていることと考へることも出来る。これらの間には, 次の関係がある。



また, regular, weakly τ -additive measure は τ -additive である。矢印の逆が成立しないことを示す例を挙げよう。

EXAMPLES 1.2. (a) 可算順序数 ω_1 の Borel

set B は, 次の (0) または (1) のいずれか一つを満たす。

(0) $\exists$ closed unbounded set $F \subseteq \omega_1$ s.t. $F \cap B = \emptyset$.

(1) $\exists$ closed unbounded set $F \subseteq \omega_1$ s.t. $F \subseteq B$.

(0) が成り立つ場合 $\nu(B) = 0$, (1) が成り立つ場合 $\nu(B) = 1$

と ν は定義される measure $\nu \in \omega_1$ 上の Dieudonné measure

と成る。これは regular であり weakly τ -additive である。

実際, $U = \{\alpha; \alpha < \omega_1\}$ とすれば, $U \nearrow \omega_1$ であるが,

$\sup\{\nu(\alpha); \alpha < \omega_1\} = 0 < 1 = \nu(\omega_1)$ 。

(b) $\nu \in \omega_1$ 上の Dieudonné measure とせよ。 $\omega_1 + 1$

の Borel set B に対して $\mu(B) = \nu(B \cap \omega_1)$ とする。これは $\omega_1 + 1$

上定義される measure $\mu \in \omega_1 + 1$ 上の Dieudonné measure

と成る。 $\omega_1 + 1$ の compact 性より μ は weakly τ -additive。と

なる。 $\sup\{\mu(F); F \subseteq B, F \in \mathcal{F}(\omega_1 + 1)\} = 0 < 1 = \mu(\omega_1)$

である。 μ は regular である。

(c) S は単位円周上の Sorgenfrey の位相 Σ を与える

space とする。 S の Borel sets は通常位相に関する Borel

sets と一致する。 Σ 上の Lebesgue measure $\lambda \in B_0(S)$ 上

で定義される。このとき, S は hereditarily Lindelöf であること

から λ は τ -additive。と成る。 S の compact set の濃度は

高々可算である。 λ は Radon measure である。 $\square$

一方, Baire measures をいうときは, Radon measure に対応する概念は tight measure と呼ばれる。これは τ -additivity と同様の様に定義される。

DEFINITIONS 1.3. $\mu \in \text{space } X \text{ 上の Baire measure とする。}$ X の compact set である K にも Baire set である B の outer measure が必要とされる。即ち, $M \subseteq X$ に対して,

$$\mu^*(M) = \inf \{ \mu(B) ; M \subseteq B \in \mathcal{B}_a(X) \}$$

とされる。すなわち, 任意の $B \in \mathcal{B}_a(X)$ に対して,

$$\mu(B) = \sup \{ \mu^*(K) ; \text{compact } K \subseteq B \}$$

が成り立つとき, μ は tight measure と呼ばれる。任意の cozero-set U_0 と cozero-sets からなる任意の net U に対して

$$U \nearrow U_0 \Rightarrow \mu(U_0) = \sup \{ \mu(U) ; U \in U \}$$

が成り立つとき, μ は τ -additive であるという。

Space X 上の Baire measure μ をいうときは, 任意の $B \in \mathcal{B}_a(X)$ に対して, $\mu(B) = \sup \{ \mu(Z) ; Z \subseteq B, Z \in \mathcal{Z}(X) \}$ が成り立つ。この意味で Baire measure は常に regular である。またこのことから weak τ -additivity に対応する概念は, Baire measures である, τ -additivity と一致することが分る。任意の tight measure は τ -additive である。逆が成り立つことはない例は, (1.2) (c) の Borel measure $\lambda \in \mathcal{B}_a(S)$ 上に制限されることにより, 2 得られる。

2. Measures の性質 2.5, 2 定義した空間.

DEFINITIONS 2.1. Space X 上の任意の Borel measure μ Radon measure 2 あるとき, X は Radon space と呼ばれる。 X 上の任意の Borel measure μ (weakly) τ -additive 2 あるとき (weakly) Borel measure-complete と呼ばれる。 $\tau = \tau$ は, 簡単な τ 2 あるとき, Borel measure-complete space Σ HB-space, weakly Borel measure-complete space Σ B-space と呼ぶ。 $\tau \neq \tau$ space X 上の任意の regular Borel measure μ Radon measure 2 あるとき, X は Borel strongly measure-compact ($=$ Borel SMC) と呼ばれる。 X 上の任意の regular Borel measure μ τ -additive 2 あるとき Borel measure-compact ($=$ Borel MC) と呼ばれる。

Radon spaces の概念は Schwartz [32], B-spaces, HB-spaces Σ Borel MC-spaces は Gardner [10] 2 ある。 HB-space, B-space は, Adamski [1] 2 あるとき, τ τ τ -space, weak τ -space の名前 2 独立に定義した。 Borel SMC-spaces は Okada-Okazaki [29] 2 あるとき weak Radon space の名前 2 定義した。 $\tau = \tau$ は "weak Radon" Σ 別の意味 2 用い。 $\tau \neq \tau$ 2 定義する space は products Σ 2 あるとき役に立つ。

DEFINITION 2.2. Space X 上の任意の Borel

measure μ に對して, $\mu(X) = \sup \{ \mu^*(K); \text{compact } K \subseteq X \}$ が成り立つとき, X は weak Radon space と呼ぶ。但し, $\mu^*(K) = \inf \{ \mu(U); K \subseteq U, U: \text{open} \}$ である。

一方, Baire measures について, 次の様な spaces の性質が古くから研究されて, ここに用いる名前も Moran [27] に引く, 2525 である。

DEFINITIONS 2.3. Space X 上の任意の Baire measure が tight であるとき, X は strongly measure-compact ($=$ SMC) と呼ばれる。また, X 上の任意の Baire measure が τ -additive であるときは measure-compact ($=$ MC) と呼ばれる。MC-spaces は almost Lindelöf spaces, Φ -spaces または B-compact spaces と呼ばれることもある。

今までの述べた spaces は互いに次の様に関係する。

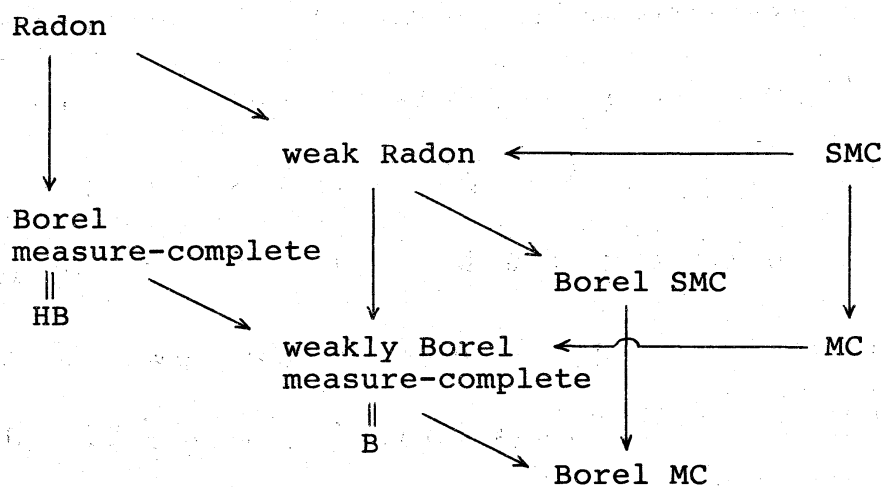


Diagram 2.

これらの spaces の詳細については, [12], [14] 又は [35] を参照せよ。Diagram 2 の矢印の逆については, 次の問題は未解決である。

QUESTION 2.4. Borel MC-space を B-space としても存在するか。

Gruenhage-Gardner は [16] で CH を仮定すれば (2.4) は Yes であることと証明した。(2.4) と同様に, Borel SMC を weak Radon である space の例も見付かっていないが, これらの問題は, weak Radon space の定義が十分確立されたものとは言えないので, (2.4) の意味はわからないかも知れない。その他の矢印の逆はすべて成り立っている。(EXAMPLES 2.12 を見よ。)

REMARK 2.5. X 上の任意の Borel measure μ regular であるような space X は Borel-regular space と呼ばれる ([29])。組合せとして, 他に任意の weakly τ -additive measure の regular であるような spaces 等も考えられるが, 調べた限りでは研究されていない。これらについては触れないことにする。

さて, Diagram 2 は, 位相空間論で扱われる spaces の間の関係の中でどのような位置を占めているだろうか。これを考える前に, 逆の矢印が成立するための条件について

を少し注意しよう。まず HB-space は任意の subspace の B-space である様な space である ([10, Proposition 7.4]) 即ち, HB-space は hereditarily B-space である。次に, X 上の任意の τ -additive Borel measure の Radon measure であるとき, X は pre-Radon space と呼ばれる ([13])。 X が BX の Borel set であるば, X は pre-Radon space であることが知られている。従って, locally compact spaces や, より一般に, Čech-complete spaces 等は pre-Radon spaces である。詳しくは [13] を見よ。次の関係が成り立つ。

$$(2.6.1) \quad \text{Radon} = \text{HB} + \text{pre-Radon},$$

$$(2.6.2) \quad \text{Borel SMC} = \text{Borel MC} + \text{pre-Radon},$$

$$(2.6.3) \quad \text{SMC} = \text{MC} + \text{pre-Radon}.$$

証明は易しい。weak Radon spaces と B-spaces の間にも同様の関係が期待されるが確認して置きたい。最後に Borel MC (Borel SMC) が MC (SMC) となるための必要十分条件について §7 で詳しく述べる。例として, normal, countably paracompact spaces についてはこれらの両者は一致する。

結果として, B-spaces と Borel MC-spaces がどのような位置にあるかを知らば, 他の spaces についても知ることも出来る。よって B-spaces の位相空間として理解し易いと思はれる特徴付けを与えよう。

THEOREM 2.7. Space X が B-space であるためには,

X 上の任意の Borel measure μ と任意の X の open cover $\mathcal{U}$ に對して, $\mathcal{U}$ の countable subfamily $\mathcal{U}'$ で $\mu(X \setminus \bigcup \mathcal{U}') = 0$ であるものが存在する ことが必要十分。

証明は易しい。従って, Lindelöf spaces は B-spaces である。更に一般的结果を述べるために, [35] に従って, 任意の discrete (closed discrete) subset の濃度が real-valued measurable cardinal (= r.v.m.c.) ではない様では space は D-space (CD-space) である。ZFC の無矛盾では, ZFC に $\aleph_2$ の濃度の r.v.m.c. ではないという仮定を付け加えても無矛盾であることが知られている。

THEOREM 2.8 ([14, THEOREM 10.2]).

- (1) Weakly θ -refinable D-space は B-space である。
- (2) Weakly θ -refinable CD-space は Borel MC-space である。

COROLLARY 2.9. Hereditarily weakly θ -refinable D-space は HB-space である。

また, (2.9) と (2.6.1) より locally compact, hereditarily weakly θ -refinable, D-space は Radon space である。これは知られている最良の結果である。CD-space であることは Borel MC であるために必要である。他方,

weak θ -refinability は HB-space であるために、必ずしも必要ではない。[14, EXAMPLE 10.5] を見よ。"weakly θ -refinable" と "metalingelöf" に変えようという問題に 7.12 は Gardner-Pfeffer の決めた定理と問題がある。

THEOREM 2.10 ([11]). 任意の locally compact, hereditarily metalingelöf, locally c.c.c. D-space は Radon space であるかという問題は ZFC で決定不可能である。実際、 $MA + \neg CH$ の下で肯定的であり、 CH の下で否定的である。

QUESTION 2.11 ([11]). $MA + \neg CH$ の下で、locally compact, hereditarily metalingelöf, D-space は Radon space か。

最後に、Diagram 2 に戻り、2 例を挙げよう。

EXAMPLES 2.12. (a) $\omega_1 + 1$ は SMC であるが、(1.2) より HB-space ではない。

(b) 2^ω が r.v.m.c. ではないと仮定せよ。このとき、Isbell's space $\Psi = N \cup R$ ([15, 51]) は Radon space であるが、MC ではない。

(c) 単位区間 $[0, 1]$ に Sorgenfrey の位相を与えた Space S は、HB か MC であるか、(1.2) より Borel SMC ではない。□

3. Subspaces. 前節で定義された spaces の性質が subspaces にどのように保たれるかについて、知られている結果を下表にまとめる。Space X の subset S は、 S を含む任意の open set U に対して、 $S \subseteq B \subseteq U$ である $B \in \text{Ba}(X)$ が存在するとき、generalized Baire set であるという。

	A. arbitrary	B. Borel	C. open	D. F_σ	E. closed	F. generalized Baire	G. Baire
1. Radon	0	1	1	1	1	0	1
2. HB	1	1	1	1	1	1	1
3. weak Radon	0	0	0	1	1	0	1
4. B	0	0	0	1	1	1	1
5. Borel SMC	0	0	0	1	1	0	1
6. Borel MC	0	0	0	1	1	?	1
7. SMC	0	0	0	?	1	0	1
8. MC	0	0	0	?	1	1	1
9. Borel-regular	1	1	1	1	1	1	1
10. pre-Radon	0	1	1	1	1	0	1

TABLE 1.

1-F は単位区間の subspace である Bernstein set ([14, 5.4] を見よ) を示す。これは 1-B と共に Schwartz [32, p. 118-120] に示す。

2-A は Gardner [10, THEOREM 5.2]。

3-C は $\omega_1 + 1$ の subspace $\omega_1 \in \mathcal{T}$ である。3-F は 1-F と同じ例。3-D と 3-G は新しい。

4-C は 3-C と同じ例。これは Adamski [1] による。

4-D も [1]。4-F は Okada-Okazaki [29]。

5-C は 3-C と同じ [29]。5-D は [29]。5-F は 1-F と同じ。5-G は, 6-G, 10-G と (2.6.2) の結果である。

6-C は 5-C と同じ。6-D は [29]。6-G は [29, THEOREM 4.3] の 5 導かれる。

7-C は 3-C と同じ。これは Moran [27] による。7-E は Mosiman-Wheeler [28]。7-F は 1-F と同じ。これは Knowles [22] による。7-G は [27]。

8-C は 7-C と同じ。8-E は Kirk [21]。8-F は [29]。

9-A は [29, PROPOSITION 4.8]。

10-F は 1-F と同じ。10-B の証明は簡単。

結果として, 次の問題が残る。

QUESTION 3.1. Borel MC-space の generalized Baire subspace は Borel MC である。

QUESTION 3.2. SMC-space の Fr-subspace は SMC である。

QUESTION 3.3 ([35, Problem 8.11])。MC-space の Fr-subspace は MC である。

10-D と (2.6.3) より (3.3) の肯定解は (3.2) にも肯定的に答える。

4. Unions. 知られた結果を TABLE 2 にまとめます。Space X の subspace S は、任意の $B \in \text{Ba}(S)$ に対して、 $\tilde{B} \cap S = B$ である $\tilde{B} \in \text{Ba}(X)$ が存在するとき、 X は Baire-embedded であるといふ。

	A. finite union	B. countable union	C. union with a compact set	D. countable union of Baire-embedded sets
1. Radon	1	1	-	1
2. HB	1	1	-	1
3. weak Radon	1	1	1	1
4. B	1	1	1	1
5. Borel SMC	1	1	1	1
6. Borel MC	1	1	1	1
7. SMC	0	0	1	1
8. MC	0	0	1	1

TABLE 2.

1-B は Schwartz [32] による。compact set は HB とは

限 5 階 の $1-C$ と $2-C$ は 意味 が 持 た ない。 $2-B$, $4-B$, $5-B$ と $7-D$, $8-D$ は Okada-Okazaki [29], $6-B$ は Gardner [10] に 属 する。 $8-C$ は Wheeler [35, THEOREM 8.10]。 $3-B$ と $7-C$ は 新 し い。 $7-A$ と $8-A$ は 示 可 例 を 与 え る。

EXAMPLE 4.1. 2 つ の SNC-spaces の union が 持 ち ます。 U も MC 2 階 の τ と 示 可。 D は 濃 度 ω_1 の discrete space, $D^* = D \cup \{\omega\}$ は D の one-point compactification と せ る。

$$X = (D^* \times (\omega + 1)) \setminus \{(\omega, \omega)\}$$

は, σ -compact space $D^* \times \omega$ と discrete space $D \times \{\omega\}$ の union である。 $\omega < 3$ 故, X は MC 2 階 の。 持 ち 持 ち, 任意 の $B \in \mathcal{B}_a(X)$ に対して, $B \cap (D \times \{\omega\})$ は $(D \times \{\omega\}) \setminus B$ の い ず れ か 一 方 だけ が 高 々 可 算 である。 $\omega < 2$, 前 の 場合 $\mu(B) = 0$, 後 の 場合 $\mu(B) = 1$ と して X 上 の Baire measure μ を 定 義 可 故, μ は τ -additive 2 階 の。 $\square$

次 の 様 子 の 問 題 は, 調 べ ば 限 り 2 階, 全 く 研 究 さ れ て い ない。

QUESTION 4.2. locally finite union, locally countable union について 2 階, 何 が 言 え る か。

5. Products. TABLE 3 は products について 2 階 と 知 ら れ ている 結果 である。 " $c \geq m_r$ " 2 階, 連続体 の 濃 度 c が

r.v.m.c. であることとを意味する。* は " CH 又は $c \geq m_r$ " の下で, ** は " $c \geq m_r$ " の下で, *** は " $MA + \neg CH$ " の下で 0 又は 1 であることとを示す。

	A. finite product	B. product with a compact space	C. countable product	D. $\{0, 1\}^{\omega_1}$	E. N^{ω_1} and R^{ω_1}	F. N^c and R^c
1. Radon	0*	-	0*	0	0	0
2. HB	0*	-	0*	0	0	0
3. weak Radon	1	1	1	1	0***	0
4. B	0**	1	0**	1	1***	0
5. Borel SMC	?	1	?	1	0***	0
6. Borel MC	0**	1	0**	1	1***	0
7. SMC	1	1	1	1	0	0
8. MC	0	1	0	1	1***	0

*: CH or $c \geq m_r$ / **: $c \geq m_r$ / ***: $MA + \neg CH$

TABLE 3.

1-A に于いて, CH の下での反例は Wage [33], $c \geq m_r$ の場合は Fremlin-Haydon ([14, EXAMPLE 11.25]) に与えられている。Compact Space は HB とは限らないうちの 1-B と 2-B は意味が同じ。1-C は 1-A の結果。1-D は $\omega_1 + 1 \in \{0, 1\}^{\omega_1}$ である。

ことから。これは Schwartz [32] による、2 注意された。

2-A について、後述述べる様に、1-A に対する反例は 2-A に対しても反例となる。2-D は 1-D と同じ。

3-C は新しい結果である。Compact space は weak Radon であるから 3-D は明らか。§7 で示す様に、Borel SMC から MC である SMC である。従って、3-E は 7-E と 8-E から導かれる。3-F は 6-F の結果である。

4-A は 6-A の結果。4-B は B-space と weak Radon space の種から B-space であることから。この結果は新しい。4-D は 3-D と同じ。4-E は 8-E の結果。4-F は 3-F と同じ。

5-B は次節で述べる様に、Borel SMC から perfect map の preimage に保存されるから。5-E は 3-E と同じ。

6-A は Sorgenfrey lines の積 $S \times S$ である。 $C \geq m_r$ である、 $S \times S$ は CD-space である。ゆえに Borel MC である。(Lutzer [24] による、 $S \times S$ は hereditarily weakly D-refinable であることが証明されている。従って $C \geq m_r$ である、(2.9) より $S \times S$ は HB-space である。) 6-B は 5-B と同じ。6-E は 8-E の結果。6-F は、Borel MC である space の例である Haydon's space ([14, 5.7]) から N^C は closed subspace として埋蔵出来るから。

7-C は Moran [27, THEOREM 4.7]。7-D は 3-D と同じ。

。 7-E は Wheeler [35, p. 129] に見ゆ。

8-A については, Sorgenfrey line S は MC である。
 Moran [26, COROLLARY 4.5] によれば, $S \times S$ は MC ではない。
 8-B は Moran [27, THEOREM 5.3] によれば, 2 MC-space と SMC-space の積は MC である。 8-E は Fremlin [9, p. 84]。
 8-F は 6-F の結果でもあるが, Moran [26], Kemperman-Maharam [20] によれば, 2 最初に証明された。

表 15, 4-E, 6-E と 8-E は 2FC と決定不可能である。

それ以外の集合論の仮定については, それらが必要であるかどうかは分らない。従って, 次の問題は未解決である。

QUESTIONS 5.1. $\mathbb{R}$ の (1)-(5) の spaces の性質は finite products と countable products に保たれるか。
 (1) Radon space, (2) HB-space, (3) B-space, (4) Borel SMC-space, (5) Borel MC-space。

特に, (1) については Schwartz による。この問題については次の結果が知られている ([32, p. 121-122])。

THEOREM 5.2. Radon spaces X_1, X_2 については,
 $X_1 \times X_2$ が Radon space であるためには, 任意の compact sets $K_i \subseteq X_i$ に対して $K_1 \times K_2$ が Radon space であることが必要十分。

従って, (5.1) の (1) については反例が存在する。

は、それは compact spaces である。結果として、
(2.6.1) より (1) の否定解は (2) にも否定的に答える。

(5.1) は否定的であることが予想される。そこで次の問題が起る。

QUESTIONS 5.3. X_1, X_2 が $X_1 \times X_2$ 上にどのような様相条件を満たすならば、(5.1) を挙げた (1)-(5) の性質は $X_1 \times X_2$ 上に保たれるか。 countable products についてはどうか。

(5.3) の解答の1つの可能性として、Gardner によって証明された次の定理を述べよう。

THEOREM 5.4 ([10, THEOREMS 8.1, 8.2]). $M \in \mathcal{W}(M)$ の r.v.m.c. であるような様相 metric space とする。

(1) X が HB-space ならば、 $X \times M$ は HB-space。

(2) X が MC-space であり $X \times M$ が normal, countably paracompact ならば、 $X \times M$ は MC-space。

最後に、uncountable products については、Hechler [18], Koumoullis [23] による詳しい研究がある。

6. Mappings. Space X から space Y への連続する種々の continuous map があるとき、 $X(Y)$ が §2 で定義された space ならば、 $Y(X)$ も同じ性質を持つという問題について考へる。一般に、 Y 上の Borel (Baire)

measure μ の性質を X の性質を用いて調べるためには, μ を X の σ -algebra $\{f^{-1}(B); B \in \mathcal{B}_0(Y)\}$ で定義された measure と見えて, μ を $\mathcal{B}_0(X)$ 上に拡張する必要がある。このため問題は measure の拡張の理論と密接に関係する。(open) perfect image について知られている肯定的な結果はすべてこの様な拡張定理の系として得られたものである。TABLE 4 で, A, B, C は X の性質が Y に保たれるか, D は逆に Y の性質が X に保たれるかどうかを示している。

	A. closed image	B. perfect image	C. open perfect image	D. perfect pre-image
1. Radon	?	?	?	-
2. HB	?	?	?	-
3. weak Radon	?	?	?	1
4. B	?	?	?	1
5. Borel SMC	?	?	?	1
6. Borel MC	?	?	?	1
7. SMC	0	0	1	1
8. MC	0	0	1	1

TABLE 4.

compact space であるとしても HB ではないから 1-D と 2-D は意味がない。各 $f^{-1}(y)$ が Radon (HB) であるという仮定を付け加えたとしても, TABLE 3, 1-A (2-A) から分る様に, CH 又は $C \geq m_r$ の仮定の下では, open perfect preimage の場合の答は否定的である。

3-C は, 一般に compact space との積と closed subspace について保存される性質は perfect preimage についても保存されることから。4-D ~ 8-D も同じ理由で成り立つが, 4-D, 6-D, 8-D については, [3, COROLLARIES 4.13, 4.6, 4.3] で, 5-D, 7-D については [5, THEOREM 4.5] より一般的可写像の下で証明された。

7-C は [5, THEOREM 4.3] から導かれる。8-C は [4, COROLLARY 2.9]。7-B と 8-B を示す例は与える。

EXAMPLE 6.1. SMC-space の perfect image であるとしても MC ではないことを示す。X は (4.1) の space X とする。このとき, Kato [19, THEOREM I] の proof より, X は 2つの Baire-embedded MC-spaces の union として表わされる space Y の perfect image である。TABLE 2, 8-D より, Y は MC である。また, Y は locally compact space X の perfect preimage として locally compact である, (2.6.3) より Y は SMC である。ところが, (4.1) で示した様に, X は MC ではない。□

次の問題は未解決である。

QUESTIONS 6.2. $f \in \text{space } X \text{ へ } \text{space } Y \text{ の上への}$
closed (又は perfect, 又は open perfect) map である。
 X は (1) - (6) の space ならば, Y も同じ space である。

(1) Radon space, (2) HB-space, (3) weak Radon space,
(4) B-space, (5) Borel SMC-space, (6) Borel MC-space.

Y は条件 Σ の下では, (Borel) SMC, MC-space の
perfect image になることは, Bachman, Sultan, Sze To 等によ
り 2 次の様な肯定的な結果が知られている。

THEOREM 6.3 ([5, THEOREM 4.3], [4, THEOREM
2.7]). $f \in \text{space } X \text{ へ } \text{countably metacompact space } Y$
の上への perfect map である。このとき, X は Borel SMC
(Borel MC) ならば, Y も同じである。

(私の予想では, Y の countable metacompactness は
不要である。) Space Y は, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ である任意の closed
sets である decreasing sequence (F_n) に対して, $F_n \subseteq U_n$
かつ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$ である cozero-sets U_n の存在するとき,
cozero-dominated であるという。

THEOREM 6.4 ([5, THEOREM 4.3], [4, COROLLARY
2.8]). $f \in \text{space } X \text{ へ } \text{cozero-dominated space } Y$ の
上への perfect map である。このとき, X は SMC (MC) ならば

3 は, Y も $\text{SMC}(MC)$ である。

QUESTION 6.5. $\text{SMC}(MC)$ -space の perfect map を
 8 3 image は, Borel $\text{SMC}(MC)$ -space である。

QUESTION 6.6. $\text{SMC}(MC)$ -space の perfect image を
 10 3 space Σ 特徴付けよう。

r.v.m.c. の存在 Σ を示すことは, (2.8) より weakly
 θ -refinable spaces は B-spaces の重要なクラスである。次
 の問題は Burke [7, p.20, TABLE II] による。

QUESTION 6.7. Weak θ -refinability は closed
 (又は perfect) image によって保存されるか。

7. MC v.s. Borel MC . Borel MC -space である MC
 であるかという問題によって少し注意する。

DEFINITION 7.1 (Wheeler [34]). Space X 上の任
 意の Baire measure が regular Borel measure に拡張出来る
 とき, X は Mařík space と呼ばれる。

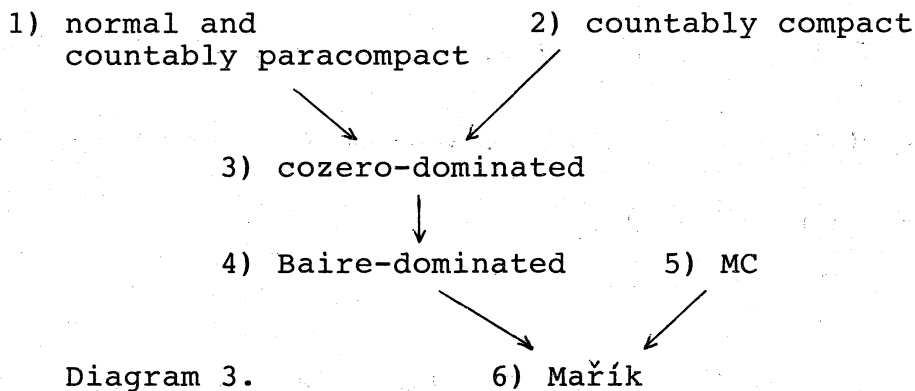
詳しくは [35] を見よ。次の関係が成り立つ。

$$(7.2.1) \quad MC = \text{Borel } MC + \text{Mařík},$$

$$(7.2.2) \quad \text{SMC} = \text{Borel } \text{SMC} + \text{Mařík}.$$

証明は易しい。2 はどのような様相 space が Mařík space になるか
 0. cozero-dominated の定義で, cozero-set は Baire set である。

置きかえて得られる概念を Baire-dominated とする。次の関係が知られている。



(1) $\rightarrow$ (6) は Mařík [25] にある百葉的の結果である。

(3) $\rightarrow$ (6) は Bachman-Sultan [4], (4) $\rightarrow$ (6) は Adamski [2],

(5) $\rightarrow$ (6) は Knowles [22] にある。Wheeler [35] に "MC-space は cozero-dominated か" という問題がある。Michael line と無理数の積 $M \times P$ は, $\mathbb{Q}$ の r.v.m.c. ではない ($\mathbb{Q} < m_r$ と表せる), MC であること Moran [27] にある。知られているが, 最近, 玉野研一氏にその次の (7.3) が証明された。

FACT 7.3. $M \times P$ は Baire-dominated ではない。

$\mathbb{Q} < m_r$ より強い $MA + \neg CH$ の下では, 他の例がある。

TABLE 3, 7-E より, このとき N^{ω_1} は MC である。 $\omega = 3$ の

FACT 7.4. N^{ω_1} は Baire-dominated ではない。

$\mathbb{Q} < m_r$ を仮定しない例が望まれているが, この問題に関する

7. もし paracompact である MC-space が存在すれば,
 cozero-dominated である MC-space が存在することになる。
 そして実際そのような space は存在する。例えば, (6.1) の
 space Y を考えよ。これは Wheeler [35] のもう 1 つの問題
 "paracompact である locally compact MC-space は存在する
 か" にも肯定的に答える。

8. あとがき。 HB, B, Borel MC と MC-spaces の定
 義と measures を与えて $\{0, 1\}$ -measures に置きかえて得ら
 れる概念は, それぞれ対応した次の様になる。

HB-space $\rightarrow$ Borel-complete space,

B-space $\rightarrow$ weakly Borel-complete space,

Borel MC-space $\rightarrow$ closed complete space,

MC-space $\rightarrow$ realcompact space.

これは measure theory には特殊であるが, 位相空
 間論ではむしろ良く研究されている概念である。Borel-
 complete spaces については [17], weakly Borel-complete
 spaces については [30], closed complete spaces については
 [6], [8], [31] を参照せよ。realcompact spaces については
 良く知られている。例えば, [15] を見よ。右側の spaces の
 性質から左側の spaces の性質が, ある程度, 推測出来る場

合がある。(もちろん, 全く平行ではない。例えば, $\text{realcompact spaces}$ の種は realcompact であるが, MC-spaces について成り立たない, TABLE 3, 8-A.)

また, 右側の spaces については, すべてフィルターを用いた位相的で (即ち, measures を用いない, と言ったのもフィルターと $\{0, 1\}$ -measures は同じことだから) 特徴付けを与えることが出来る。これに対して, 左側の spaces の位相的で特徴付けを見出す問題は未解決である。特に, MC-spaces については [35, Problem 8.13] である。いずれの場合も簡単な答は予想されない。

最後に参考文献について, Borel measures については Gardner [12], Gardner-Pfeffer [14] に, Baire measures については Wheeler [35] によく整理して述べられている。

参 考 文 献

1. W. Adamski, τ -smooth Borel measures on topological spaces, Math. Nachr. 78 (1977), 97-107.
2. W. Adamski, Extensions of tight set functions with applications in topological measure theory, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 353-368.
3. G. Bachman and A. Sultan, Measure theoretic techniques in topology and mappings of replete and measure replete spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 18 (1978), 267-285.

4. G. Buchman and A. Sultan, On regular extensions of measures, *Pacific J. Math.* 86 (1980), 389-395.
5. G. Bachman and M. Szeto, On strongly measure replete lattices and the general Wallman remainder, *Fund. Math.* 122 (1984), 199-217.
6. R. L. Blair, Closed completeness in spaces with weak covering properties, in *Set-Theoretic Topology*, ed. G. M. Reed, Academic Press, New York (1977), 17-45.
7. D. K. Burke, Closed mappings, in *Surveys in General Topology*, ed. G. M. Reed, Academic Press, New York (1980), 1-32.
8. N. Dykes, Generalizations of realcompact spaces, *Pacific J. Math.* 33 (1970), 571-581.
9. D. H. Fremlin, Uncountable powers of $\mathbb{R}$ can be almost Lindelöf, *Manus. Math.* 22 (1977), 77-85.
10. R. J. Gardner, The regularity of Borel measures and Borel measure compactness, *Proc. London Math. Soc.* (3) 30 (1975), 95-113.
11. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Some undecidability results concerning Radon measures, *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980), 65-74.
12. R. J. Gardner, The regularity of Borel measures, *Lecture Notes in Math.* 945 (1981), 42-100.
13. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Conditions that imply a space is Radon, *Lecture Notes in Math.* 1089 (1983), 11-22.
14. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Borel measures, in *Handbook of Set-Theoretic Topology*, ed. K. Kunen and J. E. Vaughan, North Holland, Amsterdam (1984), 961-1043.
15. L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York (1960).
16. G. Gruenhage and R. J. Gardner, Completeness and weak covering properties, and measure-compactness, *J. London Math. Soc.* 18 (1978), 316-324.
17. A. W. Hager, G. D. Reynolds and M. D. Rice, Borel-complete topological spaces, *Fund. Math.* 75 (1972), 135-143.

18. S. Hechler, On $N^{\aleph_1}$ and the almost Lindelöf property, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 353-355.
19. A. Kato, Union of realcompact spaces and Lindelöf spaces, Canad. J. Math. 31 (1979), 1247-1268.
20. J. Kemperman and D. Maharam, R^C is not almost Lindelöf, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 772-773.
21. R. B. Kirk, Measures in topological spaces and B-compactness, Indag. Math. 31 (1969), 172-183.
22. J. Knowles, Measures on topological spaces, Proc. London Math. Soc. 17 (1967), 139-156.
23. G. Koumoullis, On the almost Lindelöf property in products of separable metric spaces, Comp. Math. 48 (1983), 89-100.
24. D. J. Lutzer, Another property of the Sorgenfrey line, Comp. Math. 24 (1972), 359-363.
25. J. Mařík, The Baire and Borel measure, Czech. Math. J. 7 (1957), 248-253.
26. W. Moran, The additivity of measures on completely regular spaces, J. London Math. Soc. 43 (1968), 633-639.
27. W. Moran, Measures and mappings on topological spaces, Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 493-508.
28. S. Mosiman and W. F. Wheeler, The strict topology in a completely regular setting: relations to topological measure theory, Canad. J. Math. 24 (1972), 873-890.
29. S. Okada and Y. Okazaki, On measure-compactness, and Borel measure-compactness, Osaka J. Math. 15 (1978), 183-191.
30. M. D. Rice and G. D. Reynolds, Weakly Borel-complete topological spaces, Fund. Math. 105 (1980), 179-185.
31. M. Sakai, On WB-complete spaces and products of a-realcompact spaces, Thesis for Master's Degree, (1983), Univ. of Tsukuba.
32. L. Schwartz, Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford Univ. Press, London (1973).
33. M. L. Wage, Products of Radon spaces, Russian Math. Surveys, 35 (1980), 185-187.

34. R. F. Wheeler, Extensions of a σ -additive measure to the projective cover, Lecture Notes in Math. 794 (1979), 81-104.
35. R. F. Wheeler, A survey of Baire measures and strict topologies, Expo. Math. 2 (1983), 97-190.

B-space	6	Mařík space	23
Baire-dominated space	25	measure-compact (= MC)	
Baire-embedded	14	space	7
Baire measure	2	pre-Radon space	9
Borel-complete space	25	Radon measure	2
Borel measure	2	Radon space	6
Borel measure-compact		realcompact space	25
(= Borel MC) space	6	regular measure	2
Borel measure-complete		r.v.m.c.	10
space	6	space	1
Borel-regular space	8	strongly measure-compact	
Borel strongly measure-com-		(= SMC) space	7
pact (= Borel SMC)		τ -additive Baire measure	5
space	6	τ -additive Borel measure	2
Ba(X)	2	tight measure	5
Bo(X)	2	weakly Borel-complete space	
c	15		25
$c \geq m_r$	15	weakly Borel measure-com-	
$c < m_r$	24	plete space	6
CD-space	10	weakly τ -additive measure	
closed-complete space	25		3
cozero-dominated space	22	weak Radon space	7
D-space	10	Z(X)	1
Dieudonne measure	4		
F(X)	1		
generalized Baire set	12		
HB-space	6		