

Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system

名大・理 田中和永 (Kazunaga Tanaka)

1. 序

Hamilton 系の homoclinic orbit の存在を変分法により考察する.

Hamilton 系の周期解の存在は変分法により Rabinowitz, Ekeland, Viterbo により非常によく研究されているが, homoclinic orbit に関してはまだほとんど行われていないように思われる.

ここでは次のような Hamilton 系について考える.

$$(HS) \quad \ddot{q} + V'(q) = 0$$

ここで $q = (q_1, \dots, q_N) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) であり, $\cdot = \frac{d}{dt}$

さらに $V : \mathbb{R}^N \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた potential で $e \in \mathbb{R}^N$ において singularity をもち, $0 \in \mathbb{R}^N$ 上狭義の最大値をとるとし, 0 から出て 0 へ戻る homoclinic orbit の存在を考える. 以下を仮定する

(V1) ある $e (\neq 0) \in \mathbb{R}^N$ が存在して $V \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{e\}, \mathbb{R})$,

(V2) $V(q) \leq 0$ ($\forall q \in \mathbb{R}^N \setminus \{e\}$) かつ $V(q) = 0$ は $q = 0$ の

ときに限る. さらに $\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) < 0$.

(V3) ある $\delta \in (0, |e|/2)$ が存在して

$$V(q) + \frac{1}{2} (V'(q), q) \leq 0 \quad \forall q \in B_\delta(0)$$

$$\text{但し } B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq \delta\}.$$

(V4) $-V(q) \rightarrow \infty$ as $q \rightarrow e$.

(V5) e の近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ と $U \in C^1(W \setminus \{e\}, \mathbb{R})$ が存在して

$$U(q) \rightarrow \infty \quad \text{as } q \rightarrow e$$

$$-V(q) \geq |U'(q)|^2 \quad \text{for } q \in W \setminus \{e\}$$

が成立する.

以上の仮定の下で次の定理が成立する.

定理 1.1. 仮定 (V1) - (V5) の下で (HS) は

$$q(t), \dot{q}(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty$$

なる非自明な解 (homoclinic orbit) を少なくとも1つ持つ.

注意 1.2. 1° 仮定 (V5) は strong force condition と呼ばれる.

特に e の近傍で $V(q) = -|q-e|^{-\alpha}$ なるときは, (V5) が成立するためには $\alpha \geq 2$ が必要十分である.

2° 仮定 (V3) は $-V(q)$ の 0 の近傍での凸性に関する条件である. 例えば $V''(0)$ が negative definite ならば (V3) は成立する.

注意 1.3. (HS) に対する変分法による homoclinic orbit の存在

結果は他に Rabinowitz [6] 及び Rabinowitz and Tanaka [7] がある.

また heteroclinic orbit については Rabinowitz [5] を参照されたい.

定理 1.1 の証明には, Palais-Smale 条件を得るために, まず
近似問題として $T \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \text{(HS:T)} \quad & \ddot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad \text{in } (0, T), \\ & \varphi(0) = \varphi(T) = 0 \end{aligned}$$

を考え, (HS:T) の非自明な解 $\varphi(t; T)$ をある種の minimax 法を用いて構成する. critical value の minimax による特徴づけを用いて得られる $T \geq 1$ に関する一様評価により, 適当な shift $T_T > 0$ と部分列 $T_k \nearrow \infty$ をとれば $\varphi(t + T_T; T_k)$ が非自明な homoclinic orbit に収束することとを示すことができ, homoclinic orbit の存在を得る. 以下の章で証明の概略を述べる.

注意 1.4. さらに一般の Hamilton 系

$$\dot{z} = JH_z(t, z(t))$$

($z = z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$, $H(t, z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ である) に対する homoclinic orbit の存在についても $H(t, z)$ が t について周期 2π をもち, z について superquadratic growth をもつ (i.e., $H(t, z)/|z|^2 \rightarrow \infty$ as $|z| \rightarrow \infty$) ときに Coti-Zelati, Ekeland and Sere [3], Hofer and Wysocki [4] 及び Tanaka [9] により研究がなされている. 特に [9] においては, 近似方程式と

して

$$(1.5)_T \quad \begin{aligned} \dot{z} &= JH_z(t, z(t)) \quad \text{in } \mathbb{R}, \\ z(t+2\pi T) &= z(t) \quad \text{in } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

($T \in \mathbb{N}$) を用い、Rabinowitz により導入された minimax 法に対応する $(1.5)_T$ の解は適当に shift 及び部分列をとると非自明な homoclinic orbit に収束することを適当な条件下で示している。詳しくは [9] を参照されたい。

2. 近似問題

$T \geq 1$ に対して 近似問題 $(HS: T)$ を考える。 $(HS: T)$ の解 $q(t)$ は次の functional の critical point として求められる

$$\begin{aligned} I_T(q) &= \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{q}|^2 dt - \int_0^T V(q) dt \\ &\in C^1(\Lambda_T, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

ここで Λ_T は $H_0^1(0, T; \mathbb{R}^N)$ の開集合として与えられる。

$$\Lambda_T = \{ q(t) \in H_0^1(0, T; \mathbb{R}^N); q(t) \neq e \quad \forall t \in (0, T) \}$$

このとき、strong force condition (V5) の下ではこれが成立する。

補題 2.1. (V4), (V5) の下では $(q_n) \subset \Lambda_T$ に対して

$$\inf_{t \in [0, T]} |q_n(t) - e| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ならば $I_T(q_n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. □

この補題を用いると之が得られる。

命題 2.2. (V4), (V5) の下で $I_T(q)$ は次の Palais-Smale 条件

(P.S.) をみたす.

(P.S.) : $|I_T(g_n)| \leq M$ かつ $I'_T(g_n) \rightarrow 0$ なる任意の $(g_n) \subset \Lambda_T$ に対して、収束部分列 (g_{n_k}) をえらび $g_{n_k} \rightarrow g \in \Lambda_T$ とできる. $\square$

この命題により、 $I_T(g)$ に対して minimax 法により、 $I_T(g)$ の critical point (すなわち (HS:T) の解) を求めることが出来る.

== 以下は I_T の minimax 法を用いる. (c.f. Bahri and Rabinowitz [1]).

$$D^{N-2} = \{x \in \mathbb{R}^{N-2}; |x| \leq 1\},$$

$$\Gamma_T = \{\gamma \in C(D^{N-2}, \Lambda_T); \gamma(x)(t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial D^{N-2} \times [0, T]\}$$

とおく. $\gamma \in \Gamma_T$ に対して

$$\gamma(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial(D^{N-2} \times [0, T]).$$

であるから $D^{N-2} \times [0, T] / \partial(D^{N-2} \times [0, T]) \cong S^{N-1}$ とみると、 $\gamma \in \Gamma_T$

に対して $\tilde{\gamma}: S^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$ を

$$\tilde{\gamma}(x, t) = \frac{\gamma(x, t) - e}{|\gamma(x, t) - e|}$$

で対応させることが出来る. $z = \tau$

$$\Gamma_T^* = \{\gamma \in \Gamma_T; \deg \tilde{\gamma} \neq 0\},$$

$$c(T) = \inf_{\gamma \in \Gamma_T^*} \max_{x \in D^{N-2}} I_T(\gamma(x))$$

を minimax value $c(T)$ を定義する. == 以下 Brouwer

degree を表わす. このとき (2) が成立する.

命題 2.3. $T \geq 1$ に依存しない定数 $c_0 > 0$ が存在して

$$0 < c_0 \leq c(T) \leq c(1) \quad \forall T \geq 1$$

をみたす.

証明. 任意に与えられた $\gamma \in \Gamma_1^*$ に対して $\gamma_T \in \Gamma_T$ を次のように定める.

$$\gamma_T(t) = \begin{cases} \gamma(x)(t), & (x, t) \in \mathcal{D}^{N-2} \times [0, 1], \\ 0, & (x, t) \in \mathcal{D}^{N-2} \times (1, T], \end{cases}$$

このとき, $\gamma_T \in \Gamma_T^*$ であり, $I_T(\gamma_T(x)) = I_1(\gamma(x)) \quad \forall x \in \mathcal{D}^{N-2}$ により

$$\begin{aligned} c(T) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_T^*} \max_{x \in \mathcal{D}^{N-2}} I_T(\gamma(x)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_1^*} \max_{x \in \mathcal{D}^{N-2}} I_T(\gamma_T(x)) \\ &= \inf_{\gamma \in \Gamma_1^*} \max_{x \in \mathcal{D}^{N-2}} I_1(\gamma(x)) = c(1). \end{aligned}$$

次に $c_0 > 0$ の存在を示す. 任意の $\gamma \in \Gamma_T^*$ に対して $\deg \tilde{\gamma} \neq 0$ より

$$\{\gamma(x)(t); (x, t) \in \mathcal{D}^{N-2} \times [0, T]\} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_{2\delta}(0)) \neq \emptyset$$

がある. ゆえに $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}^{N-2} \times [0, T]$ で $\gamma(x_0)(t_0) \notin B_{2\delta}(0)$

なるものがえらべる. 一方 $\gamma(x_0)(0) = 0$ により, $s_0 \in (0, t_0)$ で

$$\gamma(x_0)(s_0) \in \partial B_\delta(0), \quad \gamma(x_0)(t) \notin B_\delta(0) \quad \forall t \in (s_0, t_0)$$

なるものがえらべる. このような x_0, t_0, s_0 に対して $g(t) =$

$\gamma(x_0)(t)$ とかくと,

$$m_\delta = \min_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)} -V(x) > 0$$

に対して

$$\begin{aligned}
 I_T(\gamma(x_0)) &\geq \int_{s_0}^{t_0} \frac{1}{2} |\dot{\gamma}|^2 dt + \int_{s_0}^{t_0} -V(\gamma(t)) dt \\
 &\geq \frac{1}{2(t_0 - s_0)} \left(\int_{s_0}^{t_0} |\dot{\gamma}| dt \right)^2 + m_\delta(t_0 - s_0) \\
 &\geq \frac{1}{2(t_0 - s_0)} |\gamma(t_0) - \gamma(s_0)|^2 + m_\delta(t_0 - s_0) \\
 &\geq (2m_\delta)^{1/2} |\gamma(t_0) - \gamma(s_0)| \\
 &\geq (2m_\delta)^{1/2} \delta \equiv c_0.
 \end{aligned}$$

ここで $\gamma \in \Gamma_T^*$ は任意であつたから, $c(T) \geq c_0$ を得る. $\square$

また通常の deformation lemma を用いることにより次を得ることが出来る.

命題 2.4. $c(T) > 0$ は $I_T(\gamma)$ の critical value である. $\square$

命題 2.3, 2.4 により次を得る.

命題 2.5. 任意の $T \geq 1$ に対して, $(HS; T)$ は非自明な解

$\gamma(t; T)$ をもつ. さらに $T \geq 1$ には依存しない定数 $c_0, c_1 > 0$ が存在して

$$0 < c_0 \leq I_T(\gamma(t; T)) \leq c_1 < \infty \quad \forall T \geq 1$$

が成立する. $\square$

3. 極限移行

命題 2.5 で得られた解 $\gamma(t; T)$ に対して, 以下の評価を得る

ことが出来る.

命題 3.1. $T \geq 1$ によらない定数 $C > 0$ が存在して

$$(3.2) \quad \|\dot{f}(t; T)\|_{L^2(0, T)} \leq C,$$

$$(3.3) \quad \int_0^T -V(f(t; T)) dt \leq C,$$

$$(3.4) \quad \|f(t; T)\|_{L^\infty(0, T)} \leq C.$$

が任意の $T \geq 1$ に対して成立する. □

また $f(t; T)$ が $(HS; T)$ の解であることにより

$$E_T \equiv \frac{1}{2} |\dot{f}(t; T)|^2 + V(f(t; T))$$

は t によらず、一定であるが、上式を $(0, T)$ 上積分し (3.2) (3.3)

を用いると次を得る

$$\begin{aligned} \text{命題 3.5. } E_T &\rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad \text{特に } |\dot{f}(0; T)| = |\dot{f}(T; T)| \\ &= \sqrt{2E_T} \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad \square$$

また (V3) より $f(t; T)$ に対して、下かきの一様な評価を得る = とおける。

$$\text{命題 3.6. } \|f(t; T)\|_{L^\infty(0, T)} \geq \delta \quad \forall T \geq 1.$$

証明. まず任意の $t \in (0, T)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} |f(t; T)|^2 &= |\dot{f}(t; T)|^2 - (V'(f(t; T)), f(t; T)) \\ &= -2V(f(t; T)) - (V'(f(t; T)), f(t; T)) + 2E_T \end{aligned}$$

が成立する. $E_T = \frac{1}{2} |\dot{f}(0; T)|^2 > 0$ 及び (V3) により

$$\frac{d^2}{dt^2} |f(t; T)|^2 > 0 \quad \text{if} \quad f(t; T) \in B_\delta(0).$$

= ゆえに $|f(t; T)|^2$ が最大値をとる $t = t_0$ では $f(t_0; T) \notin B_\delta(0)$ が従う. すなわち $\|f(t; T)\|_{L^\infty} \geq \delta$. □

命題 3.6 により、 $\tau_T \in (0, T)$ をとり

$$\varphi(\tau_T; T) \in \partial B_\delta(0)$$

とできる。 $\equiv \equiv \equiv$

$$\tilde{\varphi}(t; T) = \begin{cases} \varphi(t + \tau_T; T), & t \in [-\tau_T, T - \tau_T], \\ 0 & t \notin [-\tau_T, T - \tau_T]. \end{cases}$$

とおくと、次が成立する。

1° $\tilde{\varphi}(t; T)$ は (HS) の $(-\tau_T, T - \tau_T)$ での解

2° $\tilde{\varphi}(0; T) \in \partial B_\delta(0) \quad \forall T \geq 1$

3° $\|\dot{\tilde{\varphi}}(t; T)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|\tilde{\varphi}(t; T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \int_{\mathbb{R}} -V(\tilde{\varphi}(t; T)) dt \leq C$

$\equiv \equiv \equiv C > 0$ は $T \geq 1$ によらない定数。

3° により、 $T_k \nearrow \infty$ なる部分列 (T_k) をえらび、次の意味で

$$\tilde{\varphi}(t; T_k) \text{ が } y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \quad (\dot{y}(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N))$$

へ収束するようにできる。

$$(3.7) \quad \tilde{\varphi}(t; T) \rightarrow y(t) \quad \text{in } L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$$

$$(3.8) \quad \dot{\tilde{\varphi}}(t; T) \rightharpoonup \dot{y}(t) \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$$

さらに

$$(3.9) \quad \int_{\mathbb{R}} -V(y(t)) dt \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} -V(\tilde{\varphi}(t; T)) dt \leq C$$

このとき 補題 2.1 と同様に

$$y(t) \neq e \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

が、 $\dot{y} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ 及び (3.9) より従う。

次の命題により 定理 1.1 の証明は完成する。

命題 3.10. $y(t)$ は (HS) の $\mathbb{R}$ 上の非自明解であり.

$y(t), \dot{y}(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm\infty)$ をみたす.

証明 命題 3.5 により, $-\tau_T \rightarrow -\infty, T - \tau_T \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty)$

が従い, これより $y(t)$ は (HS) の $\mathbb{R}$ 上の解であることがわかる.

また $\tilde{y}_T(t; T)$ の性質 2° により, $y(0) \in \partial B_\delta(0)$ であり $y(t) \neq 0$

が得られる. また $y(t), \dot{y}(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm\infty)$ について

$\dot{y}(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, (3.9) 及び $y(t)$ が (HS) の解であることが

従う. □

以上により (HS) の非自明な homoclinic orbit $y(t)$ が得られた.

注意 3.11. 以上において potential $V(y)$ の singularity は 1 点 $y \in \mathbb{R}^N$ であると仮定したが, 次のように若干一般化できる.

(V0) $S \subset \mathbb{R}^N$ は compact であり, $0 \notin S$ は $\mathbb{R}^N \setminus S$ の非有界な連結成分に属する

(V1') $V \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus S, \mathbb{R})$

(V2') $V(y) \leq 0 \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus S)$ かつ $V(y) = 0$ は $y = 0$ のときに限り, さらに $\overline{\lim_{|y| \rightarrow \infty}} V(y) < 0$.

(V3') ある $\delta \in (0, \frac{1}{2} \text{dist}(0, S))$ が存在して

$$V(y) + \frac{1}{2} (V'(y), y) \leq 0 \quad \forall y \in B_\delta(0)$$

(V4') $-V(y) \rightarrow \infty \quad \text{as } y \rightarrow S$

(V5') S の近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ と $U \in C^1(W \setminus S, \mathbb{R})$ が存在して

$$U(q) \rightarrow \infty \quad \text{as } q \rightarrow S$$

$$-V(q) \geq |U'(q)|^2 \quad \forall q \in W \setminus S$$

をみたす.

以上の条件の下で次の存在定理が成立する.

定理 3. 12. (V0), (V1') - (V5') の仮定の下で (HS) は

$$q(t), \dot{q}(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty$$

なる非自明な解を少なくとも1つもつ.

□

文 献

- [1] A. Bahri and P.H. Rabinowitz, A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, J. Funct. Anal. 82 (1989), 412 - 428.
- [2] V. Benci and F. Giannoni, Homoclinic orbits on compact manifolds, preprint, Università di Pisa, 1989.
- [3] V. Coti-Zelati, I. Ekeland and E. Sere, Une approche variationnelle au problème des orbites homoclines de système hamiltonians, preprint 1989.
- [4] H. Hofer and K. Wysocki, First order elliptic system and the existence of homoclinic orbits in Hamiltonian system, preprint

1989.

- [5] P. H. Rabinowitz, Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system, to appear in *Analyse Nonlineaire*.
- [6] P. H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems, to appear in *Proc. Royal Soc. Edinburgh*.
- [7] P. H. Rabinowitz and K. Tanaka, Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems, preprint 1989.
- [8] K. Tanaka, Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system, to appear in *Analyse Nonlineaire*.
- [9] K. Tanaka, Homoclinic orbits in a first order superquadratic Hamiltonian system: Convergence of subharmonic orbits, preprint 1989.