

平面的グラフの一般化強単調性描画について

On generalized strongly monotone drawings of planar graphs

神谷 瑠飛 宮田 洋行 中野 眞一
Ryuto Kamiya Hiroyuki Miyata Shin-ichi Nakano

群馬大学大学院理工学府

Department of Computer Science, Gunma University

概要

グラフの描画方法には大きな任意性があり、さまざまな観点から見やすいグラフの描画方法が研究されている。本稿では、パスを見つけやすいグラフの描画として提案されている強単調性描画に着目し、それを精密化した概念として、 α -強単調性描画を提案する。木、極大平面的グラフ、平面的 3-木、2-連結外平面的グラフについて、既存研究で強単調性描画可能であることがわかっているが、本稿では、それらについて α -強単調性描画可能な α の値の評価を行い、それらの結果の精密化を行う。

1 はじめに

グラフ G に対し、その頂点を平面上の点、枝を頂点を結ぶ線分として表現したものを G の直線描画と呼ぶ。本稿では、枝が交差しない直線描画を単に直線描画と呼ぶことにする。グラフ G が直線描画を持つ必要十分条件は、 G が平面的グラフであることが知られる [2] が、一般に、一つの平面的グラフに対して直線描画は無数にあり、枝同士のなす角度、枝の長さ、対称性等、様々な基準の下、よりグラフの構造を理解しやすい描画が研究されている。本稿では、頂点間のパスを見つけやすい描画として提案されている強単調性描画について考察する。

定義 1.1 (強単調性描画 [1])

平面的グラフ G の直線描画 D において、パス P 上の頂点を方向 $\vec{d}$ のある直線上に射影したとき、頂点が P 上の順序と同じ順序で現れるとき、 P を $\vec{d}$ に関して単調という。任意の 2 頂点 u, v 間に $\vec{uv}$ に関し

て単調なパスが存在するとき、 D を G の強単調性描画と呼ぶ。

木が強単調性描画を持つことは Kindermann らにより示されている [4]。Felsner らは、さらに木の凸性を満たす強単調性描画を構成し、それを用いて、外平面的グラフが強単調性描画を持つことを示している [3]。さらに、Felsner らは、3-連結平面的グラフ、2-木についても強単調性描画が可能であることを示している。一方、連結グラフの範囲では、強単調性描画可能でないグラフが知られており [3]、2-連結平面的グラフの強単調性描画可能性は未解決問題として残されている。

強単調性描画可能なグラフクラスに関しては、上記のように多くのことが分かってきている。しかし、パスを見つけやすい描画が可能なグラフを分類する上では、単に強単調性描画可能か調べるだけでは不十分である。すなわち、頂点 u, v 間のパスが強単調性を満たすとき、 $\vec{uv}$ とパス上のそれぞれの枝の成す角度が 90° 未満であることになるが、実際にはその角度がどの程度大きいかにより、そのパスのを見つけやすさは大きく異なってくるように思われる。しかし、強単調性描画という概念ではそのような違いは表現できない。そこで、本稿では、そのような違いを考察するために、方向ベクトル $\vec{uv}$ とパスのなす具体的な角度について考慮した以下の概念を導入する。

定義 1.2 (α -強単調性描画)

平面的グラフ G の直線描画 D に対し、 G のパス $v_1, v_2, \dots, v_k$ が全ての $i = 1, \dots, k-1$ に対して、 $\angle(\vec{v_i v_{i+1}}, \vec{v_1 v_k}) \leq \alpha$ を満たす時、そのパスを α -強単調と呼ぶ。 G の任意の 2 頂点間に強単調なパスが存在するとき、 D を G の α -強単調性描画と呼ぶ。

本稿では、いくつかのグラフクラスで、この α の値をどこまで小さくできるか見積もることで、上記の強単調性描画可能性に関する既存研究の精密化を行う。具体的には、以下の結果を示す。

1. 最大次数 d 、高さ k の木は、 $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ -強単調性描画可能である。また、任意の $\alpha < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ について、 α -強単調性描画不可能である高さ k 、最大次数 d の木が存在する。
2. 最大次数 d の任意の極大平面的グラフは、 $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調性描画可能である。ただし、 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{3}}$ である。
3. 任意の平面的 3-木は、任意の $\alpha > 30^\circ$ に対して、 α -強単調性描画可能である。また、任意の $\beta < 30^\circ$ に対し、 β -強単調性描画不可能である平面的 3-木が存在する。
4. 任意の 2-連結外平面的グラフは、任意の $\alpha > 0^\circ$ に対して、 α -強単調性描画可能である。

2 木の描画法について

本節では、以下を証明する。

定理 2.1 T を最大次数 d 、高さ k の木とする。このとき、 T は $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ -強単調性描画可能である。また、高さ k の完全 d 分木 $T_{d,k}$ は、任意の $\alpha < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ について、 α -強単調性描画不可能である。

この定理の証明において、以下の補題を用いる。

補題 2.2 木の強単調性描画において、葉節点は、節点集合の凸包の頂点となる。

証明. まず、高さが 1 の木の場合を考える。節点の凸包の内部あるいは頂点以外の境界上に葉節点が存在するような強単調性描画が存在すると仮定する。このとき、その描画において、凸包は根 (r とする) と凸包上にある葉節点を結ぶ枝でいくつかの三角形に分割されている。凸包の頂点以外の境界か内部に節点 (w とする) を含む三角形 $\triangle rv_1v_2$ を定義する葉節点を v_1, v_2 とすると $\angle v_1wv_2 \geq \pi$ となる。そのとき、 $\angle v_1wr \geq \frac{\pi}{2}$ か $\angle v_2wr \geq \frac{\pi}{2}$ が成立しなければならない。これはパス v_1, r, w かパス v_2, r, w が強単調でないことを意味しており矛盾である。高さが 2 以上の時も同様の議論により命題が証明される。 ■

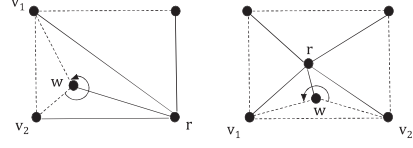


図 1: 高さ 1 の木の節点の凸包 (左図: r が凸包の頂点のとき. 右図: r が凸包の内部のとき)

(定理 2.1 の証明)

まず、補題 2.2 を用いて、 $T_{d,k}$ が任意の $\alpha < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ について、 α -強単調性描画不可能であることを示す。 $T_{d,k}$ の α -強単調性描画が存在したとする。このとき、補題より、 $T_{d,k}$ の葉は節点の集合の凸包上の頂点となる。また、同じ親をもつ節点は凸包上に連続して現れることがわかる。以後、以下のように場合分けして考察する。 $T_{d,k}$ の根を r とする。

(I) r が凸包の内部に属するとき

凸包の頂点集合は $T_{d,k}$ の葉節点集合と一致する。凸包の境界に沿って、葉節点に $v_1, v_2, \dots, v_{d^k}$ とラベル付けすると、同じ親 w を持つ節点 v_i, v_{i+1} 間のパスは、 v_i, w, v_{i+1} のみであり、このパスの α -強単調性より、 $\angle v_i v_{i+1} w, \angle v_{i+1} v_i w < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ が成り立つ (このような組 v_i, v_{i+1} は深さ $k-1$ の節点 w ごとに $d-1$ 個存在する)。また、違う親 w_1, w_2 を持つ節点 v_i, v_{i+1} 間のパスも一意に定まり、 $v_i, w_1, \dots, w_2, v_{i+1}$ の形で書ける。このパスの α -強単調性より、 $\angle v_i v_{i+1} w_2, \angle v_{i+1} v_i w_1 < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ が成り立つ (このような組は深さ $k-1$ の隣り合う節点 w_1, w_2 ごとに 1 つ存在する)。上記で考えた角度 $\angle v_i v_{i+1} w, \angle v_{i+1} v_i w, \angle v_i v_{i+1} w_2, \angle v_{i+1} v_i w_1$ は全部で $2d^{k-1}(d-1) + 2d = 2d^k$ 個存在し、それらの和は凸包の内角の和に一致する。凸包は d^k 角形であったため、上記角度の和は $180^\circ(d^k - 2)$ とならなければならない。しかし、それぞれの角度が $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ 未満であったため、和は $2d^k \times 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k}) = 180^\circ(d^k - 2)$ 未満となり、矛盾である。

(II) r が凸包の頂点となる場合

深さ 1 の節点の一つを選び、その節点と子孫の節点を凸包の外の十分遠くに適当に配置することにより、(I) の場合に帰着される。

以上により、 $T_{d,k}$ が任意の $\alpha < 90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ につい

て、 α -強単調性描画不可能であることがわかる。

次に、 $T_{d,k}$ の $90^\circ(1 - \frac{1}{d^k})$ -強単調性描画を構成する (なお、以下の描画方法は、Felsner ら [3] の描画方法を角度を調整して実行したものである)。まず、根 r を適当に配置し、深さ 1 の節点 $v_1, \dots, v_d$ を r を重心とする正 d 角形の頂点に順に配置する。この段階では、 $90^\circ(1 - \frac{2}{d})$ -強単調性が成り立っていることに注意する。次に、深さ 2 の頂点を配置する。深さ 1 の頂点 v_i ごとに、その子 $v_{i,1}$ を 1 つ選び、 $\angle(\overrightarrow{v_i v_{i,1}}, \overrightarrow{r v_i}) = 180^\circ \frac{d-1}{d^2}$ となるように v_i の十分近くに配置し (ただし、 v_i ごとに $|v_i v_{i,1}|$ が等しくなるようにする)、残りの v_i の子 $v_{i,j}$ ($j = 2, \dots, d$) を $\angle(\overrightarrow{v_i v_{i,j}}, \overrightarrow{v_i v_{i,j-1}}) = \frac{360^\circ}{d^2}$ 、 $|v_i v_{i,j}| = |v_i v_{i,j-1}|$ を満たすように配置する。

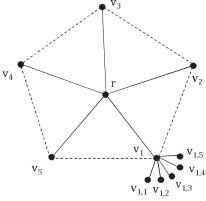


図 2: 木の描画途中 (5 分木の場合)

この描画は明らかに $90^\circ(1 - \frac{2}{d^2})$ -強単調性描画となっている。この手順を深さ k の節点まで繰り返すことで、 $T_{d,k}$ の $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ -強単調性描画が得られる。任意の最大次数 d 、高さ k の木 T についても、適当にダミーの頂点を追加し、完全 d 分木とし、その $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ -強単調性描画からダミーの頂点を取り除くことにより、 T の $90^\circ(1 - \frac{2}{d^k})$ -強単調性描画が可能である。■

3 極大平面的グラフの描画法について

Felsner らは 3-連結平面的グラフについて、主双対サークルパッキングに基づき、強単調性描画が可能であることを示した [3]。本節では、Felsner らの描画を極大平面的グラフの場合に解析し、 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{3}}$ としたとき、極大平面的グラフが $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^4-2})$ -強単調性描画可能であることを証明する。まず、いくつか定義を行う。以下の説明は、Felsner らの論文 [3] に沿ったものである。

定義 3.1 平面グラフ G の頂点集合、枝集合、面集合をそれぞれ V , E , F とする。円の族 $\mathcal{C}_V = \{C_v\}_{v \in V}$, $\mathcal{C}_F = \{C_f\}_{f \in F}$ が以下の条件を満たすとき、 G の主双対サークルパッキングと呼ぶ。

- $\mathcal{C}_V$ に属する任意の 2 つの円は境界以外で交わらない。また、 $C_u \cap C_v \neq \emptyset \Leftrightarrow (u, v) \in E$ が成り立つ。
- $o \in F$ を外面とすると、 $\mathcal{C}_F$ に属する任意の 2 つの円は境界以外で交わらない。一方、 C_o は他の全ての円を含む。また、 $C_f \cap C_g \neq \emptyset \Leftrightarrow (f, g) \in E^*$ が成り立つ。ただし、 E^* は G の双対グラフの枝集合を表す。
- 円の族 $\mathcal{C}_V = \{C_v\}_{v \in V}$, $\mathcal{C}_F = \{C_f\}_{f \in F}$ は直交する。すなわち、 G の枝 $e = (u, v)$ と双対グラフ G^* の対応する枝 $e^* = (f, g)$ について、 $p_e = C_f \cap C_g = C_u \cap C_v$ なる p_e が存在し、 C_u, C_v の共通接線 t_{e^*} と C_f, C_g の共通接線 t_e が p_e において交わる。

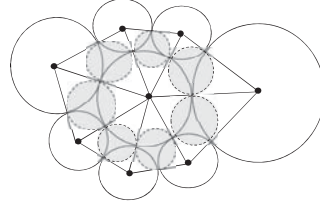


図 3: 主双対サークルパッキングと対応する直線描画 (ただし、外面に対応する円は省略)。

任意の 3-連結平面的グラフは主双対サークルパッキングをもつ描画が存在することが知られる。グラフ G の主双対サークルパッキング $\mathcal{C}_V = \{C_v\}_{v \in V}$, $\mathcal{C}_F = \{C_f\}_{f \in F}$ が与えられたとき、 C_v の中心に v を配置し、枝を線分で結ぶことで、 G の直線描画が得られる。この描画において、円 C_f は面 f に内接することに注意する。 G の面 f に対し、円 C_f で囲まれた円板 D_f を f の領域 R_f と呼び、頂点 v に対し、円 C_v で囲まれた円板 D_v とし、 $D_v \setminus \bigcup_{f \in F \setminus \{o\}} D_f$ を v の領域 R_v と呼ぶ。そして、外面 o の領域 R_o をそれらの領域の補集合と定義する。 p_v を C_v の中心、 p_f を C_f の中心とする。

定理 3.2 最大次数 d の任意の極大平面的グラフ G は、 $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調性描画可能である。ただし、 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{3}}$ である。

証明. Felsner ら [3] は主双対サークルパッキングから得られる G の描画が強単調性描画であることを示した。ここでは、主双対サークルパッキングから得られる描画に適当にメビウス変換を施し、外面上の 3 頂点に対応する円の半径を等しくしたときの描画を考える。そのとき、それぞれの面における最小角度が $\frac{57^\circ}{2a^{d-2}}$ 以上となることが知られる [5]。以下に、その描画が $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調性描画であることを示そう。

任意に 2 頂点 u, v をとる。そして、 u, v を結ぶ直線 l をとり (一般性を失わずに l は水平な直線とし、 u の x 座標よりも v の x 座標が大きいものと仮定する)、 l と交差する領域を左から順に考える。すると、頂点の領域と面の領域が交互に現れることになる。そのうち、頂点の領域を考え、対応する頂点を順に $w_0 (= u), w_1, \dots, w_k (= v)$ とする。このとき、パス $w_0, w_1, \dots, w_k$ が $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調であることを示す。

頂点領域 $R_{w_{i-1}}$ と R_{w_i} の領域の間で l と交差する面領域を R_f とする。 G は極大平面的グラフなので、 f は三角形となるが、その三角形の $p_{w_{i-1}}, p_{w_i}$ 以外の頂点を $p_{w'_i}$ とする。 p_f の x 座標は $p_{w_{i-1}}$ の x 座標よりも大きく、 C_f は f に内接するので、 $p_{w_i}, p_{w'_i}$ の x 座標は $p_{w_{i-1}}$ の x 座標よりも大きい。ここで、 $e = (w_{i-1}, w_i)$ 、 $e' = (w_{i-1}, w'_i)$ 、 $e'' = (w_i, w'_i)$ とする。すると、 l は e, e', e'' のうち 2 つと交差するが、左から順に交差する順序を考えると、 e, e'' の順か e', e'' の順か e', e の順の 3 通りの場合が考えられる。まず、 e, e'' の順に交差する場合を考えると、 w_{i-1}, w_i の定義より、 l は線分 $\overline{p_{w_{i-1}}p_e}$ 、 $\overline{p_{w_i}p_{e''}}$ と交差するので、 $\angle(\overrightarrow{ub}, \overrightarrow{e'}) \leq \angle p_{e''}p_ep_{w_i} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle p_{w'_i}p_{w_i}p_{w_{i-1}} \leq 90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}}$ が成り立つ。 e', e'' の順に交差する場合は、 l は線分 $\overline{p_{w_{i-1}}p_{e'}}$ 、 $\overline{p_{w_i}p_{e''}}$ と交差するので、 $\angle(\overrightarrow{ub}, \overrightarrow{e'}) \leq \angle p_{e'}p_{w_{i-1}}p_{w_i} < \angle p_{e'}p_ep_{w_i} \leq 90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}}$ が成り立つ。また、 e', e の順に交差する場合は、 p_e の x 座標も y 座標も $p_{e'}$ のものより大きいので、 $\angle(\overrightarrow{ub}, \overrightarrow{e'}) \leq \angle p_{w_{i-1}}p_ep_{e'} < 90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}}$ が成り立つ。したがって、いずれの場合もパス w_{i-1}, w_i は $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調である。よって、パス $w_0, w_1, \dots, w_k$ は $(90^\circ - \frac{57^\circ}{2a^{d-2}})$ -強単調であることがわかる。 ■

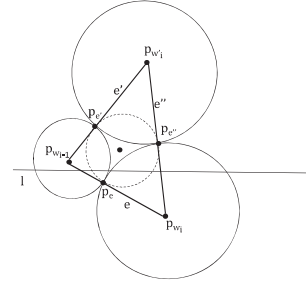


図 4: l が f の辺 e, e'' の順に交差する場合

4 平面的 3-木の描画法について

平面的 3-木とは、平面上の 3 角形から始め、面を 1 つ選んで内部に 1 頂点加えて三角形分割するという手順を繰り返して構成することのできるグラフである。このグラフは、強単調性よりも強い性質を持つ描画として知られる増加弦描画が可能であることが Nöllenburg ら [6] により示されている。その証明を詳しく検討すると、直ちに、任意の平面的 3-木が、任意の $\alpha > 60^\circ$ に対し、 α -強単調性描画可能であることが確かめられる。本節では、その結果を改良し、任意の $\alpha > 30^\circ$ に対し、 α -強単調性描画可能であることを示す。

定理 4.1 任意の平面的 3-木 G は、任意の $\alpha > 30^\circ$ に対し、 α -強単調性描画可能である。また、任意の $\beta < 30^\circ$ に対して、 β -強単調性描画不可能である平面的 3-木が存在する。

証明. G を頂点 v_1, v_2, v_3 からなるある三角形から始め、頂点 $v_4, \dots, v_n$ を順に追加して構成されたものとする (一般性を失わず、追加される頂点は常に内面のどれかに挿入されたものと考え、 $\triangle v_i v_j v_k$ の内部に挿入した頂点を $v_{i,j,k}$ と書くこととする)。このとき、 G の描画を以下のように構成する。まず、頂点 v_1, v_2, v_3 を $\triangle v_1 v_2 v_3$ が正三角形となるよう配置し、頂点 v_4 を $\triangle v_1 v_2 v_3$ の重心に配置する。次に、頂点 $v_{1,2,4}$ を線分 $\overline{v_3 v_4}$ の延長線上、頂点 $v_{1,3,4}$ を線分 $\overline{v_2 v_4}$ の延長線上、頂点 $v_{2,3,4}$ を線分 $\overline{v_1 v_4}$ の延長線上であって、 $\triangle v_{1,2,4} v_{1,3,4} v_{2,3,4}$ が正三角形となるよう、 v_4 の十分近くに配置する。なお、 $v_{1,2,4}, v_{1,3,4}, v_{2,3,4}$ のどれかが存在しない場合、存在するもののみ配置

する。この操作を全ての頂点が配置されるまで再帰的に繰り返す。

この描画が α -強単調性を満たすことを示す。この描画において、枝 v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 以外の枝の傾きは、ほぼ 30° かほぼ 150° かほぼ 270° の3通りのものに分類されることに注意する。 G の任意の2頂点 u, v を選ぶ。 u, v 間に枝が存在する場合、それが u, v 間の α -強単調性を満たすパスであるため、 u, v 間に枝が存在しない場合を考える。そのとき、 G 中の三角形 $\Delta v'_1v'_2v'_3$ と v'_1, v'_2, v'_3 と接続する $\Delta v'_1v'_2v'_3$ の内部の頂点 w で、 $\Delta v'_1v'_2v'_3$ の三角形分割 $\{\Delta v'_1v'_2w, \Delta v'_1v'_3w, \Delta v'_2v'_3w\}$ が u と v を分離するようなものが存在する。一般性を失わず、 u は“左上”の三角形、 v は“右上”の三角形の内部に属するものと仮定する。配置方法より、 $\overrightarrow{uw}$ はほぼ水平である。このとき、 u から w まで傾きがほぼ 30° かほぼ 150° の枝に沿って進み、また、 w から v まで傾きがほぼ 30° かほぼ 150° の枝に沿って進むことが可能である。よって、 u, v 間に α -強単調なパスが存在することになる。

次に、図5のような平面的3木 G_{16} が、任意の $\beta < 30^\circ$ に対して、 β -強単調性描画不可能であることを示す。仮に、 G_{16} が β -強単調性描画可能であったとする。まず、その描画において、 $\angle v_{10}v_4v_{14}, \angle v_9v_4v_{11}, \angle v_{13}v_4v_{15}$ のうち、少なくとも1つは 120° 未満であることに注意する。一般性を失わず、 $\angle v_{10}v_4v_{14} < 120^\circ$ と仮定する。今、頂点 v_{10}, v_{14} 間に β -強単調なパスが存在しなければならぬが、パス v_{10}, v_4, v_{14} は条件を満たさないので、パス v_{10}, v_1, v_{14} が β -強単調でなければならない。よって、 $\angle v_{10}v_1v_{14} > 120^\circ$ が成り立つ。したがって、 $\angle v_2v_1v_3 > 120^\circ, \angle v_1v_2v_3 < 60^\circ, \angle v_1v_3v_2 < 60^\circ$ を得る。頂点 v_9, v_{11} 間、 v_{13}, v_{15} 間に β -強単調なパスが存在しなければならぬので、 $\angle v_9v_4v_{11} > 120^\circ, \angle v_{13}v_4v_{15} > 120^\circ$ であり、 $\angle v_9v_4v_{10} < 120^\circ$ が成り立つ。頂点 v_9, v_{10} 間に β -強単調なパスが存在しなければならぬので、 $\angle v_9v_5v_{10} > 120^\circ$ が成り立たなければならない。同様に考えて、 $\angle v_8v_5v_9 > 120^\circ, \angle v_8v_5v_{10} > 120^\circ$ 。すると、 $\angle v_9v_5v_{10} + \angle v_8v_5v_9 + \angle v_8v_5v_{10} > 360^\circ$ となり、これは矛盾である。■

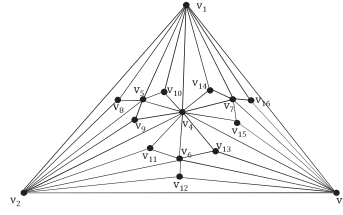


図5: 平面的3木 G_{16}

5 2-連結外平面的グラフの描画法について

最後に、いくらでも小さな $\alpha > 0^\circ$ について α -強単調性描画の構成できるグラフクラスを紹介する。

命題 5.1 任意の $\alpha > 0^\circ$ について、2-連結外平面的グラフは α -強単調性描画可能である。

証明. G を任意の2-連結外平面的グラフとし、その外平面的描画において外面を定義する閉路を C とする。 C 上の頂点 v_1 を任意に取り、それを原点に配置する。次に、 C において v_1 と隣接する頂点 v_2 を線分 $\overline{v_1v_2}$ の傾きが十分小さい $\epsilon_1 > 0$ となるように配置する。次に C 上で v_2 と隣接する頂点 v_3 を線分 $\overline{v_2v_3}$ の傾きが十分小さい $\epsilon_2 (> \epsilon_1)$ となるように配置する。これを全ての頂点が配置できるまで繰り返す。このような配置において、 G に存在する枝を交差なく線分で結ぶことが可能であり、また、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ を十分小さくとることにより、任意の $\alpha > 0^\circ$ に対し、 α -強単調性描画とすることができる。■

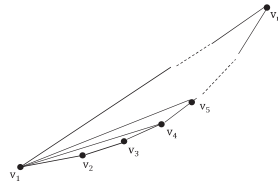


図6: 2-連結外平面的グラフの α -強単調性描画

6 まとめ

本稿では、グラフの強単調性描画の概念を精密化した α -強単調性描画の概念を提案し、木、極大平面的グラフ、平面的 3-木、2-連結外平面的グラフについて α -強単調性描画可能な α の値について考察し、木と平面的 3-木については、そのクラスで最適な値を与えた。木については、最大次数と高さに依存した下界が存在するのに対し、極大平面的グラフの場合は、最大次数のみで上界が与えられるのは興味深い事実である。また、2-連結平面的グラフが強単調性描画が可能であるかは未解決問題であり、また連結平面的グラフにおいては強単調性描画のできない例が知られる ([3]) が、これらのグラフについても、当然ながら、 180° -強単調性描画は可能である。どの程度 α を大きくとると、一般のグラフについて、 α -強単調性描画可能となるか調べるのも興味深い問題であると思われる。

参考文献

- [1] P. Angelini, E. Colasante, G. Di Battista, F. Frati, and M. Patrignani. Monotone drawings of graphs. *J. Graph Algorithms Appl.*, 16(1):5–35, 2012.
- [2] I. Fáry. On straight-line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math.*, 11:229–233, 1948.
- [3] S. Felsner, A. Igamberdiev, P. Kindermann, B. Klemz, T. Mchedlidze, and M. Scheucher. Strongly Monotone Drawings of Planar Graphs. In *Proc. of 32nd Int. Symp. Computational Geometry (SOCG’ 16)*, 37:1–37:15, 2016.
- [4] P. Kindermann, A. Schulz, J. Spoerhase, and A. Wolff. On monotone drawings of trees. In *Proc. of 22nd Int. Symp. Graph Drawing (GD’14)*, pp. 488–500, 2014.
- [5] S. Malitz. On the Angular Resolution of Planar Graphs. In *Proc. of 24th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC’ 92)*, pp. 527–538, 1992.
- [6] M. Nöllenburg, R. Prutkin, and I. Rutter. On self-approaching and increasing chord drawings of 3-connected planar graphs. *J. Comput. Geom.*, 7(1):47–69, 2016.