

Reality に関する 2, 3 の注意

島根大・文理 松永弘道

可微分実多様体は、これを含む複素多様体の実部である様に見えることが出来る。([7] n°1)。一方 2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ の開集合 D から $\mathbb{C}^2$ への正則写像は、特異値 a の逆像を D から除いた部分で単射であるとき、schlicht であるといわれるが、この様な写像については H. Hopf の論文 [4] で詳しく調べられている。しかし、後で見る様に fold point, cusp point の近くで $f: D \rightarrow \mathbb{C}^2$ は schlicht でない。この様な状況のもとで、H. Whitney の論文 [6] の複素類似、すなわち写像そのものの複素化について調べてみた。この論文は 4 つの部分からなっているが、最後の部分を除いて局所的には類似可能であるとの結論を得た。 D を複素空間 $\mathbb{C}^2(x, y)$ の開集合とし、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}^2(u, v)$ を正則写像とすると、 f の関数行列式、およびその 1 次偏微分係数のうち 0 でないものがある様な点は、 f の good point とよばれる。 D のすべての点が good である写像は good とよばれる。 $V = (a, b)$ を $\mathbb{C}^2$ の中の

ベクトルとすると、作用素 $\nabla f = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ に対して $\nabla f(p) = 0$ をみたす $\nabla \neq (0,0)$ があれば、この点 p を f の特異点、そうでない点を正則点とよぶ。 f が good であれば、 f の特異点の全体は $\mathbb{D}$ の中の正則曲線となる。これを示すには複素関数論での陰関数定理 (例えば Gunning-Rossi の本) を用いればよい。この曲線の局所座標に関して、1 次微分が 0 でないとき、点 p は fold point, 1 次微分は 0 であるが 2 次微分が 0 でないとき、点 p は cusppoint とよばれる。 $\mathbb{D}$ が regular, fold, cusp のいずれかの点のみみりなりになっているとき、 f は excellent であるといわれる。 $\mathbb{D}$ の各点に f の 3 次近の偏微分係数を対応させることにより、 f には写像 $\bar{f}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^{20}$ が対応する。 f が excellent でない様を $\mathbb{C}^{20}$ の部分集合 S は 15 次元の variety となる。Whitney の論文 [6] のと同じ定理番号を用いると、

定理 11 A. $f_0: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を正則写像とすると、半径が十分小さい disc $D_0 \subset \mathbb{D}$ があって、 f_0 は D_0 でいくらでも近くにある excellent な写像により近似される。

証明は S の次元を実次元に直して論文 [6] の §9 の方法を用い、§11 の単位の分割を使う部分だけを除けば、残りは複素類似が可能である。

定理 15 A p が fold point ならば、 p と $f(p)$ のまわりの双正則な座標変換によって、

$$u = x^2, \quad v = y$$

の形で表す。

定理 16 A p が cusp point ならば, p と $f(p)$ のまわりの双正則な座標変換により

$$u = xy - x^3, \quad v = y$$

の形で表す。

証明は陰関数定理を用いて全く類似的にできる。

次に, $p_u: \mathbb{C}(u, v) \longrightarrow \mathbb{C}(u)$ を u 座標への射影とすると合成写像

$$u: \mathbb{C}^2(x, y) \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}(u, v) \longrightarrow \mathbb{C}(u)$$

を考える。cusp point は, この合成写像の非退化臨界点である。

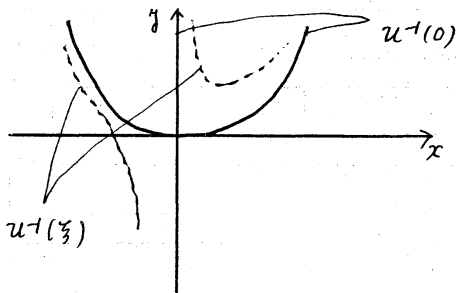
fold point はそうではない。座標変換

$$\begin{cases} X = x, & z_1 = \frac{X+Y}{2} \\ Y = y, & z_2 = -\frac{X-Y}{2}i \end{cases}$$

によって, $\mathbb{C}(u) \cong \xi$ に対して, cusp point の近くで, $u^{-1}(\xi)$ は

$$z_1^2 + z_2^2 = \xi$$

で表わされる。写像 u は $u^{-1}(0)$, $u^{-1}(\xi)$ に関して, 次の図



かゝる様な Fary 論文 [3] の仮定 1, 2 をみたしている。又 Fary [2] は写像に層係数コホモロジースベクトル系列を associate させている。そこで係数として K 群, 更に f の値域にエタをいれて KR 群を用いたかどうか興味深い問題の様であるが、筆者は未だその differential の様子等を調べる所迄至っていない。

次に $n+1$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})$ の中で

$$Q_{\pm 1}^{n+1} : z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = \pm 1$$

とおく。 $\mathbb{R}^{n+1}$ を実 $n+1$ 次元空間とすると、

$$E_{+1}^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\|=1, \text{内積}(x, y)=0\}$$

は球面 $S^{0, n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\|=1\}$ ([1] Atiyah の記号) の接ベクトル束であり、Real な写像 $(x, y) \rightarrow (x_k \sqrt{1+\|y\|^2} + iy_k, k=1, \dots, n+1)$ により Q_{+1}^{n+1} は $S^{0, n+1}$ の接ベクトル束とみれる。しかしこれは Real なベクトル束ではない。又

$$E_{-1}^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} ; \|y\|=1, \text{内積}(x, y)=0\}$$

は球面 $S^{n+1, 0}$ の接ベクトル束であり、Real な写像

$$(x, y) \rightarrow (x_k + iy_k \sqrt{1+\|x\|^2}, k=1, \dots, n+1)$$

により Q_{-1}^{n+1} は $S^{n+1, 0}$ の接ベクトル束とみれる。

$KR(Q_{\pm 1}^{n+1})$ を求めることは論文 [1] にも述べてある様に興味深い問題の様である。

注意 1. Whitney の good mapping $f: \mathbb{R}^2(x, y) \rightarrow \mathbb{R}^2(u, v)$ は正則な

写像 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ から得られたものではない。もしそうであれば
 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, 従って $u_x = u_y = v_x = 0$ ならば $v_y = 0$ となる
 はずである。[6] §6 参照。

注意2. 円周 S^1 の接束は自明束であるが, E_1^2 は Real 空間と
 しては $S^{2,0} \times \mathbb{R}^{0,1}$ ではない。 E_1^2 はどうであろうか。

参考文献

- [1] M.F. Atiyah, K-theory and Reality, Quart. J. Math. 17 (1966) 367-386
- [2] I. Fáry, Valeurs critiques et algèbres spectrales d'une applications, Ann. of Math. 63 (3), 1956, 437-490.
- [3] I. Fáry, Cohomologie des variétés algébriques, Ann. of Math. 65 (1), 1957, 21-73
- [4] H. Hopf, Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv. 29, 1955, 132-156.
- [5] G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, I. H. E. S. Publ. Math. 34, 1968, 105-112.
- [6] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane, Ann. of Math. 62 (3), 1955, 374-410
- [7] H. Whitney et F. Bruhat, Quelques propriétés fondamentales des ensemble analytiques-réels, Comm. Math. Helv. 33, 1959, 132-160