

The Schur subgroup and Schur index

都立大 理 山田俊彦

k は標数 0 の体, G は有限群とする. G の k 上の群環 kG は半単純である:

$$kG = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s.$$

我々は各単純成分 A_i を Schur 多元環とよぶ. χ を G の絶対既約指標とすると, $\chi(A_i) \neq 0$ なる単純成分 A_i が唯一つ存在する. この単純成分 A_i の index は χ の k 上の Schur index $m_{\chi}(x)$ である. A_i の中心は指標の体 $k(x)$ で, $[A_i : k(x)] = \chi(1)^2$.

A_i はある多元体 D 上の行列環: $A_i = M_t(D)$, ここで $t = \chi(1)/m_{\chi}(x)$. したがってもし D がわかれば A_i は完全に決定されることになる.

ところで D はある既約 kG -加群 M の準同型環である:

$$D = \text{End}_{kG}(M).$$

しかるに既約 kG -加群 M を決定する algorithm

は一般にはなにもない. したがって多元体 D を決定する

algorithm はなにもないのではないかと思われるかもしれない. しかしながら 1950 年代の初めに, Brauer と Witt によ

り, A_i は G の乗法表と x により *effective* に決定されることが確定した. たとえばもし k が代数体ならば, $k(x)$ の各素点 $\mathfrak{p}$ に対して Hasse invariant $\text{inv}_{\mathfrak{p}}(A_i)$ が実際に計算可能というわけである.

詳しくいうと, 彼等はこの問題を G の *hyperclementary subgroups* に対するそれに帰着させた. そしてそれはさらに円分多元環に対する問題にまで簡単化された. ここで円分多元環とは,

$$(\beta, K(\zeta)/K), \quad \beta(\sigma, \tau) \in \langle \zeta \rangle, \quad (K \supset k(x))$$

なる形の *crossed product* である. これらの結果は Brauer-Witt の定理とよばれている. この定理の内容はかなり複雑で, 彼等の証明はたいへん難解であった. しかしながら多くの人の努力により, 証明はいちじるしく簡易化された. 今や我々は, Brauer-Witt の定理の完全な形とその証明を, 筆者の講義ノート [1] の中に見出すことができる.

さて k 上の Brauer 群 $B_2(k)$ の Schur 部分群 $S(k)$ は, k 上の正規単純多元環でかつ Schur 多元環であるようなものを含む多元環類の全体として定義される. ここで Brauer-Witt の定理の系として, Schur 部分群 $S(k)$ は k 上の円分多元環を含む多元環類の全体であることが分る. したがって Schur 部分群の研究は, 円分多元環の研究に帰着された.

k が p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大のとき, Schur 部分群 $S(k)$ は筆者により完全に決定された. k は円体と仮定してよいことがわかる. ζ を 1 の p 中根とし, $\mathbb{Q}_p(\zeta) \supset k$ とするとき, $\mathbb{Q}_p(\zeta)/k$ の inertia group の構造により $S(k)$ が決定されるのである. 詳細は以下の通り:

(I) $p \neq 2$ とする. $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ は k と ζ_p を含む円分体, e を $\mathbb{Q}_p(\zeta)/k$ の分岐指数, $e = e_0 e'$, $(e_0, p) = 1$, $e' = p$ 中とする. そのとき $S(k)$ は $B_2(k)$ の位数 e_0 の唯一つの部分群である.

(II) $p = 2$ とする. $\mathbb{Q}_2(\zeta)$ は k と ζ_4 を含む円分体, $\mathbb{Q}_2(\zeta)$ に含まれる最大の 2 中根を ζ_{2^n} とする. もし $\mathbb{Q}_2(\zeta)/k$ の Galois 群が $\sigma(\zeta_{2^n}) = \zeta_{2^n}^{-1}$ なる automorphism σ を含めば, $S(k)$ は $B_2(k)$ の位数 2 の唯一つの subgroup である. その他の場合は $S(k) = 1$.

たとえば $\mathbb{Q}$ が有理数体, G が 2-group のとき, G のすべての既約指標 χ に対し $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$ or 2 であり, もし $\mathbb{Q}(\chi)$ が実でなければ $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$ であることなどは, (II) から直ちに分る.

また筆者は p 進円分多元環の Hasse 不変数に対する非常に有用な公式をえた. 実際その公式を用いることにより, 我々は k が代数体のときの Schur 部分群 $S(k)$ を研究することができる. いくつかの円体 k に対して $S(k)$ は決定されている.

筆者はまた cohomology 的な議論により, 一般に複雑な Galois 群をもつ円分多元環が簡単な Galois 群をもつ円分多元環と相似であることを示した. すなわちおおざっぱにいつて次のことがなりたつ:

$$(\beta, k(\zeta_n)/k) \sim (\alpha, k(\zeta_{p_1 \dots p_t})/k), \quad n = p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}.$$

この結果は最近 Janusz により強められた. すなわちおおざっぱにいつて次のとおり:

$$(\alpha, k(\zeta_{p_1 \dots p_t})/k) \sim \prod_i (\alpha_i, k(\zeta_{p_i})/k).$$

k が代数体のときの $S(k)$ の研究は, 現在多くの人により進行中であるが, かなり整数論的であるので省略する.

最後に次の結果を述べてこの小文を終えることにしよう:

定理 (Fein-Yamada). G を有限群, χ を G の既約指標, $m = m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ とする. そのとき m は G の exponent $\exp(G)$ を割り, m^2 は G の位数を割り. さらに

- (i) もし $2^r \mid m$ ならば, $2^{r+1} \mid \exp(G)$;
- (ii) もし $p \mid m$ かつ G の Sylow p -subgroup が abelian ならば, $p^{r+1} \mid \exp(G)$.

Brauer-Witt の定理を用いることにより, 最初の主張は比較的容易にえられる. 主張 (i), (ii) の証明は少し難しい. そしてそれらはかなり有用で, たとえば次の諸結果が直ちにえられる.

系. すべての p に対して G の p -Sylow 群が elementary abelian であれば, G の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

位数 175,560 の Janko 群 J_2 は, そのすべての p -Sylow 群が elementary abelian だから, J_2 の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

また $G = \langle a \rangle \cdot P$ が素数 p における hyperelementary group で, G の p -Sylow 群 P が elementary abelian ならば, G のすべての既約指標に対してその $\mathbb{Q}$ 上の Schur index は 1 である.

文 献

- [1] T. Yamada, The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture Notes in Math. Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.